

المركز الجامعي برج بوعريودج
المكتبة المركزية
الإعارة الخارجية

ملخصات شوم

نظريات ومسائل
في

№ 10497

31:33 101

الإحصاء

تأليف

دكتور/ موراى ر. شبيجل

الأستاذ السابق ورئيس قسم الرياضيات

معهد رنسلير للفنون التطبيقية المتعددة - كونكتيكوت

ترجمة

دكتور/ شعبان عبد الحميد شعبان

قسم الإحصاء الرياضى - معهد الدراسات والبحوث الإحصائية

جامعة القاهرة - جمهورية مصر العربية

مراجعة

أستاذ دكتور/ أحمد حسن الموازينى

وكيل معهد الدراسات والبحوث الإحصائية

جامعة القاهرة - جمهورية مصر العربية

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م.

نصر

مقدمة

يلعب علم الإحصاء أو ما يسمى أحياناً بالأساليب الإحصائية دوراً متزايداً في جميع نواحي النشاط البشرى تقريباً . كبداية إذا أخذنا دنيا الأعمال فقط وحددنا أوجهها فإننا نجد أن أثر الإحصاء انتشر الآن إلى الزراعة والأحياء ، إدارة الأعمال ، الكيمياء ، الاتصالات ، الاقتصاد ، التربية ، الالكترونيات ، الطب ، الفيزياء ، العلوم السياسية ، علم النفس ، علم الاجتماع وعديد من المجالات الأخرى في العلوم والهندسة .

والهدف من هذا الكتاب هو تقديم الأسس العامة للإحصاء والتي تفيد كل فرد بصرف النظر عن مجال تخصصه . وقد روعي في تأليف الكتاب أنه يمكن استخدامه ككتاب مساعد لجميع الكتب المتداولة في الإحصاء . « أو كنهج مقرر في الإحصاء » وهو كذلك ذو قيمة كرجع للباحثين في بداية استخدامهم للإحصاء في مشاكل البحوث الخاصة بهم .

يبدأ كل فصل بعرض واضح للتعريف والنظريات والأسس وكذلك توضيح الموضوعات الأخرى المتعلقة بهذا الفصل - يل ذلك مجموعات متدرجة من المسائل المحلولة ومسائل إضافية وهي في أغلب الأحيان تستخدم بيانات مأخوذة من مشاكل إحصائية حقيقية . وتساعد المسائل المحلولة في شرح وتبسيط النظرية والتركيز على النقاط الدقيقة والتي بدون مراعاتها يشعر الطالب أنه على أرض غير صلبة كما تعطى تكرار للمبادئ الأساسية والتي تؤثر تأثيراً حيوياً في عملية التدريس . وتتضمن المسائل المحلولة عدداً من إثباتات الصيغ أما العدد الكبير من المسائل الإضافية بإجاباتها فتساعد على المراجعة الكاملة على الموضوعات الموجودة بكل فصل . والأساس الرياضي الوحيد المطلوب لفهم الكتاب كله هو الحساب ومبادئ الجبر ويقدم الفصل الأول من الكتاب مراجعة لأهم المفاهيم الرياضية المستخدمة به ويمكن قراءته إما مع بداية المقرر أو الرجوع إليه كلما ظهرت حاجة إلى ذلك خلال الدراسة . تعالج الأجزاء الأولى من الكتاب تحليل التوزيعات التكرارية وما يرتبط بها من مقاييس النزعة المركزية والتشتت والالتواء والتفرطح . . وهذا بالطبع يؤدي إلى مناقشة مبادئ الاحتمالات وتطبيقاتها وهذا يشكل مقدمة لدراسة نظرية المعامنة . وتعالج أولاً أساليب نظرية المعينات ذات الحجم الكبير والتي تتضمن التوزيع الطبيعي وتطبيقاته في التقديرات الإحصائية واختبارات الفروض والمعنوية . أما نظرية المعينات ذات الحجم الصغير وتتضمن توزيع ت - أستيدنت وتوزيع كا تربيع (χ^2) مع تطبيقاتهما فتعالج في الفصول التالية . وقد خصص فصل في توفيق المنحنيات وطريقة المربعات الصغرى والتي تعد ذات أهمية في حد ذاتها وتؤدي منطقياً إلى دراسة الموضوعات الخاصة بالارتباط والانحدار في حالة متغيرين . الارتباط الجزئي والمتعدد الذي يتضمن أكثر من متغيرين عولج في فصل مستقل . وفي ختام الكتاب خصص فصلان لتحليل السلاسل الزمنية والأرقام القياسية على التوالي .

وتعد الموضوعات المتضمنة في الكتاب أكثر مما يمكن دراسته كقرر في المستوى الأول . والدافع لذلك هو إعطاء الكتاب مرونة أكثر في وضعه كرجع مفيد وكذلك إثارة الاهتمام في الموضوعات المدرجة به . عند استخدام الكتاب من الممكن تغيير ترتيب كثير من الفصول المتأخرة أو حذف بعض من هذه الفصول بدون صعوبة . وعلى سبيل المثال فإن الفصول من ١٣ إلى ١٧ يمكن تقديمها مباشرة بعد الفصل الخامس إذا كان من المطلوب دراسة الارتباط والانحدار والسلاسل الزمنية والأرقام القياسية قبل نظرية المعامنة . وكذلك فإن أغلبية الفصل السادس يمكن حذفه إذا كان الدارس لا يرغب في تخصيص وقت كبير لدراسة الاحتمالات . وفي مقرر في المستوى الأول فإنه يمكن حذف الفصل الخامس عشر . والمبرر لترتيب الحالي للكتاب أن الاتجاه الحديث في الدراسة هو تدريس نظرية المعامنة والاستدلال الإحصائي في بداية المقرر بقدر الإمكان .

إنني أشكر عديداً من الوكالات الخاصة والحكومية لتعاونهم في إمدادي بالبيانات الخاصة بالجدول . وقد ذكر المرجع الخاص بكل جدول في مكانه المناسب خلال الكتاب وعلى وجه الخصوص فإني مدين إلى الأستاذ « السير » رونالد أ . فيشر (زميل الجمعية الملكية ، كامبردج) . والدكتور فرانك بيتس (زميل الجمعية الملكية ، روثامستود) وكذلك إلى السادة أصحاب شركة أوليفروبويد وأذنيرة لساحهم باستخدام الجدول رقم (٣) من كتابهم « جداول إحصائية للبحوث البيولوجية والزراعية والطبية » .

كذلك أعبر عن شكري وامتناني إلى العاملين بدار شوم للنشر لروحهم الطيبة وتعاونهم لتحقيق الرغبة الشديدة لمحاولة المؤلف الوصول إلى السكال .

المحتويات

صفحة

الفصل الأول : المتغيرات والأشكال البيانية

الإحصاء . المجتمع والمينة . الإحصاء الوصفي والاستقرائي . المتغيرات المتقطعة والمتصلة . تقريب البيانات .
الرموز العلمية . العمليات الحسابية . العوال . الإحداثيات المتعامدة . الأشكال البيانية . الممسادات .
المتباينات . اللوغاريتمات . الأعداد المقابلة للوغاريتمات ٤٤- ١

الفصل الثاني : التوزيعات التكرارية

البيانات الخام . المفردات المنظومة . التوزيعات التكرارية . فترة الفئات . حدود الفئات . الحدود الحقيقية
لفئات . حجم أو طول الفئة . مركز الفئة . قواعد عامة لتكوين توزيع تكرارى . المدرجات التكرارية
والمضلعات التكرارية . التوزيع التكرارى النسبى . التوزيع التكرارى المتجمع . المنحنى التكرارى
المتجمع . التوزيع التكرارى المتجمع النسبى . المنحنى التكرارى المتجمع النسبى . المنحنيات التكرارية .
أشكال المنحنيات التكرارية ٧١- ٤٥

الفصل الثالث : الوسط والوسيط والمنوال والمقاييس الأخرى للنزعة المركزية

رمز الدليل أو الرقم الجانبي الأسفل . رمز التجميع . المتوسطات ومقاييس النزعة المركزية . الوسط
الحسابى . الوسط الحسابى المرجح . خصائص الوسط الحسابى . حساب الوسط الحسابى من بيانات مبوبة .
الوسيط . المنوال . علاقة اختيارية بين الوسط والوسيط والمنوال . الوسط الهندسى . الوسط التوافقى .
علاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى والوسط التوافقى . جذر متوسط الرىيمات . الرىيمات والعشيرات
والمتينات ٧٢- ١١١

الفصل الرابع : الانحراف المعياري والمقاييس الأخرى للتشتت

التشتت أو التغير . المدى . الانحراف المتوسط أو متوسط الانحرافات . نصف المدى الربيعى أو الانحراف
الربيعى . مدى المتينات ١٠ - ٩٠ . الانحراف الميسارى . التباين . الطريقة المختصرة لحساب الانحراف
المعيارى . خصائص الانحراف المعيارى . طريقة شارليز للمراجعة . معامل شبرد لتصحيح التباين . علاقة
اختيارية بين مقاييس التشتت . التشتت المطلق والتشتت النسبى . معامل الاختلاف . المتغير المعيارى
والدرجات المعيارية ١١٢- ١٣٨

الفصل الخامس : العزوم والالتواء والتفرطح

العزوم . العزوم من البيانات المبوبة . العلاقة بين العزوم . حساب العزوم من بيانات مبوبة . طريق شارليز
للمراجعة ومعامل شبرد لتصحيح العزوم فى شكل غير موز . الالتواء . التفرطح . العزوم والالتواء
والتفرطح للمجتمع ١٣٩- ١٥٥

الفصل السادس : أساسيات نظرية الاحتمالات

التعريف التقليدي للاحتمال . تعريف الاحتمال كتكرار نسبي . الاحتمال الشرطي . الأحداث المستقلة والتابعة . الأحداث المتنافية . التوزيعات الاحتمالية المتقطعة . التوزيعات الاحتمالية المتصلة . التوقع الرياضي . العلاقة بين متوسط وتباين المجتمع وتباين العينة . التحليل التوافقي . المبادئ الأساسية . مضروب n . التباديل . التوافيق . تقريب ستيرنج $1/n$. العلاقة بين نظرية الاحتمال ونظرية الفئات ... ١٥٦-١٩٤

الفصل السابع : توزيعات ذي الحدين ، الطبيعي وبواسون

توزيع ذي الحدين . بعض خصائص توزيع ذي الحدين . التوزيع الطبيعي . بعض خصائص التوزيع الطبيعي . العلاقة بين توزيع ذي الحدين والتوزيع الطبيعي . توزيع بواسون . بعض خصائص توزيع بواسون . العلاقة بين توزيع ذي الحدين وتوزيع بواسون . توزيع كثيرات الحدود . توفيق توزيع نظري للتوزيع التكراري لعينة ... ١٩٥-٢٢٥

الفصل الثامن : مبادئ نظرية العينات

نظرية العينات . المعاينة العشوائية . الأرقام العشوائية . المعاينة بإرجاع وبدون إرجاع . توزيعات المعاينة . توزيع المعاينة للأوساط . توزيع المعاينة للنسب . توزيع المعاينة للفروق والمجموع . الخطأ المعياري ... ٢٢٦-٢٤٨

الفصل التاسع : نظرية التقدير الإحصائية

تقدير المعالم . التقديرات غير المتحيزة . التقدير الكفؤ . التقدير بنقطة والتقدير بفترة . تقدير فترة الثقة لمعلم المجتمع . تقدير فترة الثقة للأوساط . فترات الثقة للنسب . فترات الثقة للفروق والمجموع . فترة الثقة للانحرافات المعيارية . الخطأ المحتمل ... ٢٤٩-٢٦٦

الفصل العاشر : نظرية القرارات الإحصائية واختبارات الفروض والمنعوية

القرارات الإحصائية . الفروض الإحصائية . فرض العدم . اختبارات الفروض والمنعوية . الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني . مستوى المنعوية . اختبارات تتضمن التوزيع الطبيعي . اختبار من طرف واحد واختبار من طرفين . اختبارات خاصة . منحى توصيف العمليات . قوة الاختبار . خرائط الرقابة . اختبارات المنعوية التي تتضمن الفروق بين العينات . اختبارات تتضمن توزيع ذي الحدين ... ٢٦٧-٢٠٢

الفصل الحادي عشر : نظرية العينات الصغيرة

العينات الصغيرة . توزيع « أستودينت » t . حدود الثقة . اختبارات الفروض والمنعوية . توزيع كا^٢ - تربيع كا^٢ . حدود الثقة لكا^٢ . درجات الحرية ... ٣٠٣-٢٢٢

الفصل الثاني عشر : اختبار كا^٢ (كا - تربيع)

التكرارات المشاهدة والنظرية . تعريف كا^٢ . اختبارات الممنوعة . اختبار كا^٢ لجودة التوفيق .
جداول الاقتران . تصحيح بيتس للمتغير المتصل . صيغة مبسطة لحساب كا^٢ . معامل الاقتران . ارتباط
الصفات . خاصية الانجماع في كا^٢ ٣٤٨-٣٢٢

الفصل الثالث عشر : توفيق المنحنيات وطريقة المربعات الصغرى

العلاقة بين المتغيرات . توفيق المنحنيات . معادلة المنحنى التقريبي . طريقة التمهيد باليد في توفيق المنحنى .
الخط المستقيم . طريقة المربعات الصغرى خط المربعات الصغرى . العلاقات غير الخطية . المربعات
الصغرى للقطع المكافئ . تطبيقات على السلاسل الزمنية . مسائل تتضمن أكثر من متغيرين ٣٨٧-٣٤٩

الفصل الرابع عشر : نظرية الارتباط

الارتباط والانحدار . الارتباط الخطي . مقاييس الارتباط . معادلة الانحدار باستخدام المربعات الصغرى .
الخطأ المعياري للتقديرات . الانحراف المفسر والانحراف غير المفسر . معامل الارتباط . ملاحظات
على معامل الارتباط . صيغة عزم حاصل الضرب لمعامل الارتباط الخطي . صيغة مختصرة للعمليات الحسابية .
خطوط الانحدار ومعامل الارتباط الخطي . ارتباط الرتب . ارتباط السلاسل الزمنية . ارتباط الصفات .
نظرية المعاينة للارتباط . نظرية المعاينة للانحدار ٤٢٩-٣٨٨

الفصل الخامس عشر : معامل الارتباط الجزئي والمتعدد

الارتباط المتعدد . رمز الدليل . معادلة الانحدار . مستوى الانحدار . المعادلات الاعتدالية لمستوى انحدار
المربعات الصغرى . مستويات الانحدار ومعاملات الارتباط . الخطأ المعياري للتقدير . معامل الارتباط
المتعدد . تبديل المتغير التابع . التعميم في حالة أكثر من ثلاثة متغيرات . الارتباط الجزئي . العلاقة بين
معاملات الارتباط المتعددة والجزئية . معامل الارتباط المتعدد غير الخطي ٤٥١-٤٣٠

الفصل السادس عشر : تحليل السلاسل الزمنية

السلاسل الزمنية . الرسم البياني للسلاسل الزمنية . التحركات المميزة في السلاسل الزمنية . تصنيف
التحركات في السلاسل الزمنية . تحليل السلاسل الزمنية . المتوسطات المتحركة . تمهيد السلاسل الزمنية .
تقدير الاتجاه العام . تقدير التغيرات الموسمية . الدليل الموسمي . تحليل البيانات من تأثير الموسم .
تقدير التغيرات الدورية . تقدير التغيرات الطارئة أو العشوائية . قابلية البيانات للمقارنة . التنبؤ .
تلخيص الخطوات الأساسية في تحليل السلاسل الزمنية ٤٩٦-٤٥٢

الفصل السابع عشر : الأرقام القياسية

الرقم القياسي . تطبيقات الأرقام القياسية . مناسيب الأسعار . خواص مناسيب الأسعار . مناسيب الكمية
أو الحجم . مناسيب القيمة . سلسلة المناسيب ووصلة المناسيب . المشاكل المتعلقة بحساب الأرقام القياسية .
استخدام المتوسطات . الاختبارات النظرية للأرقام القياسية . رموز . الطريقة التجميعية البسيطة . الوسط
البسيط للمناسيب . الطريقة التجميعية المرجحة . رقم فيشر المثالي . رقم مارشال . أدجورث القياسي .
الوسط المرجح للمناسيب . الأرقام القياسية للكمية أو الحجم . الرقم القياسي للقيمة . تغيير فترة الأساس
للأرقام القياسية . الانكماش في السلاسل الزمنية ٥٣١-٤٩٧

ملحق

- I. إحدائيات المنحنى الطبيعي المعياري ٥٣٢
- II. المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري من 0 إلى z ٥٣٣
- III. المئينات لتوزيع ت - « أستودنت » ٢٣٤
- IV. المئينات لتوزيع كا^٢ ٥٣٥
- V. اللوغاريتمات المعتادة لأربع أرقام عشرية ٥٣٧-٥٣٦
- VI. قيمة λ - ٥٣٨
- VII. أرقام عشوائية ٥٣٩
- VIII. خطوات الحصول على المعادلات الاعتدالية لخط المربعات الصغرى ٥٤٠

المصطلحات ٥٥٢-٥٤١

الفهرس الأبجدي ٥٦٤-٥٥٣

الفصل الأول

المفردات والاشكال البيانية

الإحصاء :

يختص الإحصاء بالطرق العملية لجمع وتنظيم وتلخيص وعرض وتحليل البيانات وكذلك الوصول إلى نتائج مقبولة وقرارات سليمة على ضوء هذا التحليل .

ويستخدم الاصطلاح في معناه الضيق للتعبير عن البيانات نفسها أو الأرقام المستخرجة من هذه البيانات مثل المتوسطات . وعلى هذا نتحدث عن إحصاءات العمالة وإحصاءات الحوادث وغيرها .

المجتمع والعينة - الإحصاء الوصفي والاستقرائي :

عند جميع بيانات تخص خاصية من خصائص مجموعة من الأفراد أو الأشياء ، مثل أطوال أو أوزان طلبة جامعيين أو عدد الوحدات المعبأة أو غير المعبأة في إنتاج مصنع للمسابير في يوم معين ، فإنه قد يكون من المستحيل أو من غير العمل ملاحظة المجموعة بأكملها وخاصة إذا كانت كبيرة . وبدلاً من اختبار المجموعة كلها ، والتي تسمى بالمجتمع الإحصائي أو المجموعة الكلية فإنه يمكن اختبار جزء صغير من المجموعة يسمى بالعينة .

والمجتمع يمكن أن يكون محدوداً أو غير محدود . وعلى سبيل المثال فإن المجتمع المكون من إنتاج مصنع لإنتاج المسابير في يوم معين هو مجتمع محدود ، بينما المجتمع المكون من جميع النتائج الممكنة (صورة ، كتابة) في قذفات متتالية للعملة هو مجتمع غير محدود .

وإذا كانت العينة ممثلة للمجتمع فإنه يمكن الحصول على نتائج مهمة عن المجتمع بتحليل بيانات هذه العينة . وفرع الإحصاء الذي يهتم بالشروط التي يجب توافرها حتى يكون هذا الاستدلال سليماً يسمى بالإحصاء الاستقرائي أو الاستدلال الإحصائي .

وبما أن هذا النوع من الاستدلال لا يمكن أن يكون مؤكداً فإن لغة الاحتمال تستخدم عند عرض النتائج .

أما فرع الإحصاء الذي يهدف فقط إلى وصف وتحليل مجموعة معينة وذلك دون الوصول إلى نتائج أو استدلال خاصة بالمجموعات الأكبر حجماً فإنه يسمى بالإحصاء الوصفي أو الإحصاء الاستنتاجي .

قبل المضي في استكمال دراسة الإحصاء فإننا سنقوم بمراجعة بعض المفاهيم الرياضية المهمة .

المتغيرات المتقطعة والمتصلة :

المتغير هو رمز مثل X, Y, H, x, B والذي يمكن أن يأخذ أى قيمة سبق تحديدها تسمى مجال هذا المتغير . إذا كان متغير لا يأخذ سوى قيمة وحيدة فإنه يسمى ثابتاً .

المتغير الذى يمكن أن يأخذ أى قيمة بين قيمتين معينتين فيسمى متغيراً متصلًا ، خلاف ذلك يسمى متغيراً متقطعاً .

مثال ١ — الرقم N لعدد الأطفال في عائلة والذي يأخذ فقط القيم $0, 1, 2, 3, \dots$ ولا يمكن أن يأخذ القيم 2.5 أو 3.842 ، هو متغير متقطع .

مثال ٢ — العمر A لشخص من الممكن أن يكون 62 سنة ، 63.8 سنة أو 65.8341 سنة وذلك حسب درجة الدقة في القياس ، هو متغير متصل .

البيانات التى يمكن التعبير عنها بمتغير متقطع أو متصل تسمى بيانات متقطعة أو بيانات متصلة على التوالى . ومثال البيانات المتقطعة عدد الأطفال في 1000 أسرة بينما أطوال 100 طالب جامعى يمكن اعتبارها كشال على البيانات المتصلة . وبوجه عام فإن القياسات ينشأ عنها بيانات متصلة بينما العد أو الترقيم ينشأ عنها بيانات متقطعة .

قد يكون من المفيد أحياناً أن يمتد مفهوم المتغير إلى خصائص غير رقمية . فعلى سبيل المثال فإن اللون C في قوس قزح يمكن أن يأخذ « القيم » أحمر ، برتقالى ، أصفر ، أخضر ، أزرق ، نيل ، بنفسجى . وبشكل عام يمكن التعبير عن اللون الأحمر بالرقم ١ ، البرتقالى بالرقم ٢ ، وهكذا .

تقريب البيانات :

تقريب رقم مثل 72.8 إلى أقرب رقم عشري هو 73 حيث أن 72.8 أقرب إلى 73 منها إلى 72 . كذلك فإن تقريب الرقم 72.8146 إلى أقرب رقم مئوى أو إلى رقين عشريين هو 72.81 حيث أن 72.8146 أقرب إلى 72.81 منها إلى 72.82 .

في تقريب رقم مثل 72.465 إلى أقرب رقم مئوى تصادفنا صعوبة حيث أن الرقم 72.465 في نفس درجة البعد عن الرقين 72.46 ، 72.47 وقد اصطلح من الناحية العملية أن يتم في هذه الحالات التقريب إلى الرقم الزوجى السابق على 5 . مثال ذلك 72.465 تقرب إلى 72.46 ، 183.575 تقرب إلى 183.58 ، $116\ 500\ 000$ يقرب إلى أقرب مليون إلى $116\ 000\ 000$ وهذا الحل العمل يفيد على وجه الخصوص في تصغير الأخطاء المترتبة على التقريب إذا أجرى عدد كبير من العمليات (أنظر المسألة ١ - ٤)

الرموز العلمية :

عند كتابة أى رقم وخاصة إذا كان متضمناً عدداً كبيراً من الأصفار قبل أو بعد العلامة العشرية ، فإنه من المفيد استخدام الرمز العلمى للأساس 10 .

مثال ١ - $10^1 = 10, 10^2 = 10 \times 10 = 100, 10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000, 10^4 = 10000, 10^5 = 100000$

مثال ٢ - $10^0 = 1, 10^{-1} = 0.1, 10^{-2} = 0.01, 10^{-3} = 0.0001$

مثال ٣ - $864000000 = 8.64 \times 10^8, 0.00003416 = 3.416 \times 10^{-5}$

لاحظ أن ضرب رقم بـ 10^8 ، مثلا يؤدي إلى تحريك العلامة العشرية 8 أماكن إلى اليمين . كما أن ضرب رقم بـ 10^{-6} يؤدي إلى تحريك العلامة العشرية 6 أماكن إلى اليسار

من المعتاد أن تستخدم الأقواس أو النقطة للتعبير عن ضرب رقمين أو أكثر . مثلا

$$5 \times 3 = 15, (10)(10)(10) = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10 \times 10 \times 10 = 1000.$$

إذا استخدمت الحروف للدلالة على أرقام فإنه من المعتاد حذف الأقواس أو النقطة . على سبيل المثال .

$$ab = (a)(b) = a \cdot b = a \times b.$$

وتعد الرموز العملية مفيدة في الحساب وخاصة في تحديد مكان العلامة العشرية . وتستخدم في ذلك القاعدة .

$$(10^p)(10^q) = 10^{p+q}, \quad \frac{10^p}{10^q} = 10^{p-q}$$

حيث p ، q أى رقم .

في الرقم 10^p ، p تسمى الأس و 10 الأساس .

$$(10^3)(10^2) = 1000 \times 100 = 100000 = 10^5 \text{ (i.e. } 10^{3+2}\text{)},$$

$$\frac{10^6}{10^4} = \frac{1000000}{10000} = 100 = 10^2 \text{ (i.e. } 10^{6-4}\text{)}$$

مثال ١ -

$$(4000000)(0.0000000002) = (4 \times 10^6)(2 \times 10^{-10}) = (4)(2)(10^6)(10^{-10}) = 8 \times 10^{6-10}$$

$$8 \times 10^{-4} = 0.0008$$

مثال ٢ -

$$\frac{(0.006)(80000)}{0.04} = \frac{(6 \times 10^{-3})(8 \times 10^4)}{4 \times 10^{-2}} = \frac{48 \times 10^1}{4 \times 10^{-2}} = \left(\frac{48}{4}\right) \times 10^{1-(-2)}$$

$$= 12 \times 10^3 = 12000$$

مثال ٣ -

الأرقام المعنوية :

إذا كانت دقة تسجيل وزن شيء هو في الصورة 65.4 kg فهذا يعني أن الوزن الحقيقي بين 65.35 kg و 65.45 kg والأرقام البقية التي نحتاج إليها لتحديد العلامة العشرية ، بالإضافة إلى الأصفار اللازمة لتحديد العلامة العشرية ، تسمى الأرقام المعنوية للرقم .

مثال ١ - الرقم 65.4 له 3 أرقام معنوية

مثال ٢ - الرقم 4.5300 له 5 أرقام معنوية

مثال ٣ - الرقم $0.0018 = 1.8 \times 10^{-3}$ له 2 أرقام معنوية

مثال ٤ - الرقم $0.001800 = 1.800 \times 10^{-3}$ له 4 أرقام معنوية

الفصل الأول : المتغيرات والأشكال البيانية

الأرقام التي ترتبط بعملية التعداد أو التقييم ، بمكس القياسات ، بطبيعتها أرقام صحيحة وهذا يكون لها عدد غير محدود من الأرقام المعنوية . في مثل هذه الحالات قد يكون من الصعب تحديد الأرقام المعنوية بدون وجود معلومات إضافية . مثال ذلك الرقم 186 000 000 من الممكن أن يكون له 9 ، 4 ، 3 أرقام معنوية . فإذا كان من المعروف أن له 5 أرقام معنوية فإنه من الأفضل أن يسجل 186.00 مليون أو 1.8600×10^8 .

العمليات الحسابية :

عند إجراء عمليات الحساب المتضمنة عمليات الضرب ، القسمة والحصول على جنور الأرقام فإن النتيجة النهائية لن تحتوى على أرقام معنوية بأكثر من الأرقام المعنوية بالرقم الذي به أقل رقم معنوى (أنظر المسألة ١ - ٩)

أمثلة :

1. $73.24 \times 4.52 = (73.24)(4.52) = 331$
2. $1.648/0.023 = 72$
3. $\sqrt{38.7} = 6.22$
4. $(8.416)(50) = 420.8$, if 50 is exact.

عند إجراء عمليات الجمع والطرح فإن النتيجة النهائية لن تحتوى على أرقام معنوية بعد العلامة العشرية بأكثر من الأرقام التي تحتوى على أقل رقم معنوى بعد العلامة العشرية (أنظر المسألة ١ - ١٠) .

أمثلة :

1. $10.316 + 2.7 = 5.9$
2. $83.42 - 72 = 11$
3. $47.816 - 25 = 22.816$, if 25 is exact.

القاعدة السابقة في الجمع والطرح يمكن تميمها (أنظر المسألة ١ - ١١)

الدوال :

إذا كان لكل قيمة من قيم المتغير X قيمة أو أكثر تقابلها للمتغير Y فإنه يذكر أن Y دالة في X وتكتب $Y=F(X)$ (وتقرأ Y تساوى دالة F في X) وذلك للتعبير عن هذا الاعتماد الدالى . ويمكن أن تستخدم حروف أخرى بدلا من F مثل G, ϕ, \dots وهكذا .

ويسمى المتغير X بالمتغير المستقل والمتغير Y بالمتغير التابع

إذا كان لكل قيمة من قيم X قيمة وحيدة للمتغير Y فإن Y تسمى بدالة وحيدة القيمة في X وخلاف ذلك تسمى بدالة متعددة القيم في X .

مثال ١ - العدد الكلى P لسكان الجزر البريطانية يمد دالة في الزمن t ، وتكتب $P = F(t)$.

مثال ٢ - الاستطالة S للزنبرك في وضع رأسى يمد دالة في الوزن W المعلق في نهاية الزنبرك . وبالرموز ،

$$S = G(W)$$

الفصل الأول : المتغيرات والأشكال البيانية

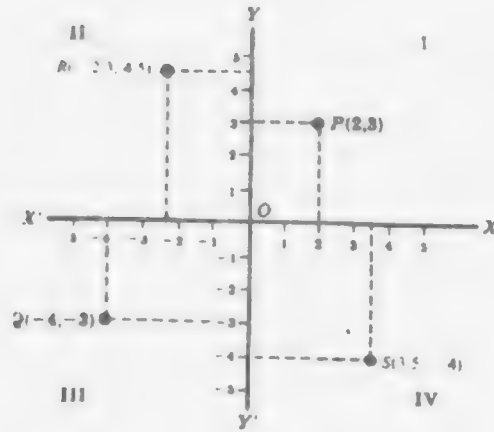
ويمكن تمثيل الاعتماد الدالي أو المقابلة بين المتغيرات على صورة جدول . كذلك يمكن التعبير عنها على صورة معادلة تربط بين المتغيرات مثال $Y = 2X - 3$ ومنها يمكن تحديد قيمة Y المقابلة للقيم المختلفة للمتغير X .

إذا كانت $Y = F(X)$ فإنه من المعتاد كتابة $F(3)$ مثلاً للتعبير عن « قيمة Y عندما تكون $X = 3$ » ، $F(10)$ نعبّر عن « قيمة Y عندما تكون $X = 10$ » وهكذا . على سبيل المثال إذا كانت $Y = F(X) = X^2$ فإن $F(3) = 3^2 = 9$ هي قيمة المتغير Y عندما تكون $X = 3$.

مفهوم الدالة يمكن تعميمه ليشمل حالة متغيرين أو أكثر (أنظر المسألة ١ - ١٧) .

الإحداثيات المتعامدة :

إذا أخذنا في الاعتبار الخطان المتعامدان على بعضهما $Y'OY$ و $X'OX$ سمياً المحاور x و y (أنظر الشكل ١ - ١) حيث يوضح المقياس المناسبة . هذان الخطان يقسمان المستوى المحدد بهما والمسمى بالمستوى xy إلى أربع مناطق معرّفاً بالأرقام I, II, III, IV وهذه تسمى بالربع الأول ، الربع الثاني ، الربع الثالث والربع الرابع على التوالي .



شكل ١ - ١

تسمى النقطة O بنقطة الأصل أو نقطة الصفر . إذا كانت هناك نقطة P وأسقطنا خطوطاً عمودية على المحورين x و y من النقطة P فإن قيمة x و y عند هذه النقطة التي تتقابل فيها الخطوط العمودية المسقط مع هذه المحاور تسمى بالإحداثيات المتعامدة أو بشكل أبسط بإحداثيات النقطة P ويمبر عنها بالنقطة (x, y) ويسمى الإحداثي x أحياناً بالإحداثي السيني والإحداثي y بالإحداثي الصادي . في الشكل (١-١) الإحداثي السيني للنقطة P هي 2 والإحداثي الصادي لها هو 3 . وإحداثيات النقطة P هو $(2, 3)$.

وعلى العكس مما سبق فإذا أعطينا إحداثيات نقطة فإنه يمكن تعيين موضع هذه النقطة . على هذا فإن النقطة ذات الإحداثيات $(-4, -3)$ ، $(-2, 3, 4, 5)$ وكذلك $(3, 5, -4)$ مثلاً بالحروف S, R, Q على التوالي بالشكل . ومن الممكن برسم المحور z يمر بالنقطة O وعمودي على المستوى xy نعيم الفكرة السابقة . وفي هذه الحالة فإن إحداثيات النقطة P يمكن التعبير عنها بالصورة (x, y, z) .

الأشكال البيانية :

الشكل البياني هو تعبير تصويري للعلاقة بين المتغيرات . وتستخدم في الإحصاء أنواع عديدة من الأشكال وذلك حسب طبيعة البيانات موضع الدراسة والهدف المرجو منه من الشكل . من بين هذه الأشكال الأعمدة البيانية ، الرسوم الدائرية والرسوم التصويرية ، وغير ذلك . وهذه الأشكال يشار إليها أحياناً بالعلاقات أو الأشكال التوضيحية . وعلى هذا نتحدث عن خرائط الأعمدة البيانية وخرائط الرسوم الدائرية (أنظر المسائل أرقام ١ - ٢٣ ، ١ - ٢٤ ، ١ - ٢٦ ، وكذلك ١ - ٢٧) .

المعادلات :

المعادلة هي تعبير على الصورة $A = B$ حيث تسمى A بالعنصر أو الجانب الأيسر للمعادلة و B بالعنصر أو الجانب الأيمن لها إذا أجرينا على طرفي المعادلة نفس العمليات فإننا نحصل على معادلة مكافئة . وبهذا فإذا جمعنا أو طرحنا أو ضربنا كلا من طرفي المعادلة مستخدمين نفس المقدار فإننا نحصل على معادلة مكافئة والاستثناء الوحيد هو القسمة على الصفر فهي غير مسموح بها .

مثال :

اعتبر المعادلة $2X + 3 = 9$.

إطرح 3 من الطرفين $2X = 6$ أو $2X + 3 - 3 = 9 - 3$.

إقسم الطرفين على 2 : $X = 3$ أو $2X/2 = 6/2$.

هذه القيمة لـ X تعد حلا للمعادلة المعطاة وهذا يمكن إثباته إذا عوضنا عن X بالقيمة 3 فإننا سنحصل على $9 = 3 + 2(3)$ أى $9 = 9$ وهذه متساوية . وتسمى عملية الحصول على حلول لمعادلة بحل المعادلة .

والفكرة السابقة يمكن استخدامها للحصول على حلول معادلتين في مجهولين أو ثلاث معادلات في ثلاثة مجاهيل وهكذا . هذه المعادلات تسمى بالمعادلات الآتية .

المتباينات :

الرمزان $<$ ، $>$ يعنيان « أقل من » و « أكبر من » على التوالي . والرموز \leq ، \geq يعنيان « أقل من أو يساوى » و « أكبر من أو يساوى » على التوالي . وهذه الرموز تعرف برموز المتباينات .

مثال ١ — $3 < 5$ تقرأ « 3 أقل من 5 » .

مثال ٢ — $5 > 3$ تقرأ « 5 أكبر من 3 » .

مثال ٣ — $X < 8$ تقرأ « X أقل من 8 » .

مثال ٤ — $X \geq 10$ تقرأ « X أكبر من أو تساوى 10 » .

مثال ٥ — $4 < Y \leq 6$ تقرأ « 4 أقل من Y والتي بدورها أقل من أو تساوى 6 » أو « تقع Y بين 4 و 6 بحيث أن 4 نفسها غير متضمنة بينما 6 نفسها متضمنة في الفترة أو « Y أكثر من 4 وأقل من أو تساوى 6 » .

تسمى العلاقات التي تتضمن رموز المتباينة بالمتباينات . وكما كنا نتحدث عن عناصر المعادلة فإنه يمكن الحديث عن عناصر المتباينة . فالمتباينة

$$4 < Y \leq 6 \text{ عناصرها هي } 4, Y, 6 .$$

المتباينة الصحيحة تستمر صحيحة :

(أ) إذا طرح نفس الرقم من أو أضيف إلى كل من عناصر المتباينة

أمثلة : بما أن $15 > 12$ فإن $15 + 3 > 12 + 3$ أى $18 > 15$ وكذلك $15 - 3 > 12 - 3$ أى $12 > 9$.

(ب) إذا ضرب كل عنصر في أو قسم على نفس الرقم الموجب .

أمثلة بما أن $15 > 12$ فإن $(3)(15) > (3)(12)$ أى $(36) > (36)$ وكذلك $\frac{15}{3} > \frac{12}{3}$ أى $(5) > (4)$

(ج) إذا ضرب كل عنصر في أو قسم على نفس الرقم السالب على أن يقلب اتجاه المتباينة .

أمثلة : بما أن $15 > 12$ فإن $(-3)(15) < (-3)(12)$ أى $(-45) < (-36)$ كذلك $\frac{15}{-3} < \frac{12}{-3}$ أى $(-5) < (-4)$

اللوغاريتمات :

أى رقم موجب N يمكن التعبير عنه كقوى للرقم 10 أى أنه من الممكن الحصول على الرقم p بحيث $N = 10^p$ و تسمى p لوغاريتم N للأساس 10 أو اللوغاريتم المعتاد للرقم N وتكتب $p = \log N$ أو $p = \log_{10} N$ على سبيل المثال فإن الرقم $1000 = 10^3$ وهذا فإن $\log 1000 = 3$ كذلك فيما أن $0.01 = 10^{-2}$ فإن $\log 0.01 = -2$

إذا كان الرقم N رقماً يقع بين 1 و 10 أى 10^0 و 10^1 فإن $p = \log N$ تقع بين الصفر والواحد ومن الممكن الحصول عليها من جداول اللوغاريتمات في الملحق صفحة ٥٣٦ .

مثال ١ — الحصول على $\log 2.36$ نبدأ بالبحث في أسفل العمود المنون N إلى أن نصل إلى الرقبن 23

ثم نتحرك إلى اليمين في اتجاه العمود المنون 6 . سنجد أن التقاطع هو 3729 . وهذا يكون

$$\log 2.36 = 0.3729 \text{ أى } 2.36 = 10^{0.3729}$$

لوغاريتم أى عدد موجب يمكن الحصول عليه من لوغاريتمات الأرقام من 1 إلى 10 .

مثال ٢ — من المثال (١) ، $2.36 = 10^{0.3729}$ إذا ضربنا الأطراف على التوالي بالرقم 10

$$23.6 = 10^{1.3729}, 236 = 10^{2.3729}, 2360 = 10^{3.3729}, \dots$$

أى

$$\log 2.36 = 0.3729, \log 23.6 = 1.3729, \log 236 = 2.3729, \log 2360 = 3.3729$$

مثال ٣ - بما أن $10^{0.3729} = 2.36$ فإن القسمة المتكررة على الرقم 10 ، نجد

$$0.236 = 10^{0.3729-1} = 10^{-0.6271}, \quad 0.0236 = 10^{0.3729-2} = 10^{-1.6271}.$$

ومن المعتاد أن نكتب 1 - 0.3729 على صورة 10 - 9.3729 أو $\bar{1}.3729$ وكذلك 2 - 0.3729 نكتب 10 - 8.3729 على صورة $\bar{2}.3729$ وهكذا باستخدام هذه الرموز نجد .

$$\begin{aligned} \log 0.236 &= 9.3729 - 10 = \bar{1}.3729 = -0.6271 \\ \log 0.0236 &= 8.3729 - 10 = \bar{2}.3729 = -1.6271, \text{ etc} \end{aligned}$$

ويسمى الجزء العشري 0.3729 في كل هذه اللوغاريتمات بالجزء العشري . أما الجزء الباقي قبل العلامة العشرية للجزء العشري مثل 1, 2, 3 وكذلك $\bar{1}, \bar{2}$ أو 10 - 8, 10 - 9 يسمى بالعدد البياني .

القواعد التالية من السهل إثباتها :

١ - العدد البياني في لوغاريتم أى عدد أكبر من الواحد الصحيح يكون موجباً ويساوى عدد الأرقام الصحيحة في العدد الأصلي ناقصاً واحداً .

بهذا يكون العدد البياني في لوغاريتم 2.36, 23.6, 236, 2360 هو 0, 1, 2, 3 وتكون لوغاريتماتها 0.3729, 1.3729, 2.3729, 3.3729 .

٢ - العدد البياني في لوغاريتم أى عدد أصغر من الواحد الصحيح يكون سالباً ويساوى عدد الأصفار التي تل العلامة العشرية مباشرة مضافاً إليها واحداً . بهذا يكون العدد البياني في لوغاريتم 0.236, 0.0236, 0.00236 هو 3 - 1, 2 - 1, 3 - 1 وتكون لوغاريتماتها $\bar{3}.3729, \bar{2}.3729, \bar{1}.3729$ على التوالي .

أما إذا كان لوغاريتم عدد ذا أربعة أرقام مثل 758.2, 2.364 فإنه يمكن الحصول عليها بالاستكمال (أنظر المسألة ١ - ٢٦) .

الأعداد المقابلة للوغاريتمات :

يمكن كتابة الرقم 2.36 في الشكل الأسى على صورة $10^{0.3729} = 2.36$ ويسمى الرقم 2.36 بالعدد المقابل لوغاريتم 0.3729 أو $\text{antilog } 0.3729$ أى أنه الرقم الذى لوغاريتمه 0.3729 ويترتب على ذلك ما يلي :

$$\begin{aligned} \text{antilog } 1.3729 &= 23.6, \quad \text{antilog } 2.3729 = 236, \quad \text{antilog } 3.3729 = 2360, \\ \text{antilog } 9.3729 - 10 &= \text{antilog } \bar{1}.3729 = 0.236, \\ \text{antilog } 8.3729 - 10 &= \text{antilog } \bar{2}.3729 = 0.0236, \end{aligned}$$

ويمكن الحصول على الأعداد المقابلة للوغاريتم أى رقم بالرجوع إلى الجدول في الملحق .

مثال : الحصول على العدد المقابل للوغاريتم $10 - 8.6284$ فإننا نبحث عن الجزء العشري 0.6284 في جدول الجداول حيث نجد عند تقاطع الصف المعنون 42 والعمود 5 فإن الرقم المطلوب هو 425 وبما أن العدد البياني هو $10 - 8$ فإن الرقم هو 0.0425 .

وبنفس الطريقة فإن $\text{antilog } 3.6284 = 4250$ $\text{antilog } 5.6284 = 425000$

أما إذا كان الجزء العشري غير موجود بالجدول فإنه يمكن الحصول على العدد بالاستكمال (أنظر المسألة رقم ١ - ٣٧)

الحسابات باستخدام اللوغاريتمات :

$$\log MN = \log M + \log N$$

$$\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$$

$$\log M^p = p \log M$$

وباستخدام هذه النتائج معاً فإننا نجد على سبيل المثال

$$\log \frac{A^p B^q C}{D^r E} = p \log A + q \log B + r \log C - s \log D - t \log E$$

أنظر المسائل من ١ - ٣٨ إلى ١ - ٤٥

مسائل محلولة

المتغيرات :

١ - ١ حدد أيًا من البيانات التالية تمثل بيانات متقطعة وأيها تمثل بيانات متصلة

الحل : متقطعة

(أ) عدد الأسهم المباعة في سوق الأوراق المالية

الحل : متصلة

(ب) درجات الحرارة المسجلة كل نصف ساعة في مكتب الأرصاد الجوية

الحل : متصلة

(ج) أعمار لمبات التليفزيون المنتجة في شركة ما

الحل : متقطعة

(د) الدخول السنوية لأساتذة كلية

الحل : متصلة

(هـ) أطوال 1000 مسافر من إنتاج مصنع

١ - ٢ وضع مجال كل من المتغيرات التالية وحدد أيًا من هذه المتغيرات متصل وأيها متقطع .

(أ) الرقم ٧ لعدد ليترات الماء في ماكينة غسيل .

المجال : أي رقم يبدأ من الصفر إلى طاقة الماكينة .

المتغير متصل .

(ب) عدد الكتب B الموضوع على رف في إحدى المكتبات .
المجال $0, 1, 2, 3, \dots$ إلى أكبر عدد من الكتب يمكن أن تناسب الرف .
المتغير متقطع .

(ج) المجموع S لعدد النقاط التي نحصل عليها من رمية زهرتي طاولة
المجال : الأرقام الممكنة الحاصل عليها من رمية واحدة لزهرتي طاولة هي $1, 2, 3, 4, 5, 6$. وهذا يكون
مجموع النقاط في رمية زهرتين هو $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$. وهذا هو مجال S .
المتغير متقطع .

(د) القطر d لكرة
المجال : إذا اعتبرنا أن النقطة هي كرة قطرها صفر فإن المجال d هو جميع القيم ابتداء من الصفر .
المتغير متصل .

(هـ) الدولة C في أوروبا .
المجال : إنجلترا ، فرنسا ، ألمانيا ، ... وهكذا . ويمكن تمثيلها رقمياً $1, 2, 3, \dots$ وهكذا .
المتغير متقطع .

تقريب البيانات :

١ - ٣ قرب الأرقام التالية إلى درجة النقة المشار إليها

(أ) 48.6	أقرب وحدة 49	(و) 143.95	أقرب نسبة من العشرة 144.0
(ب) 136.5	أقرب وحدة 136	(ز) 368	أقرب نسبة من المائة 400
(ج) 2.484	أقرب نسبة من مئة 2.48	(ح) 24448	أقرب نسبة من ألف 24000
(د) 0.0435	أقرب نسبة ألف 0.044	(ط) 5.56500	أقرب نسبة من المائة 5.56
(هـ) 4.50001	أقرب وحدة 5	(ي) 5.56501	أقرب نسبة من المائة 5.57

١ - ٤ أجمع الأرقام 4.35, 8.65, 2.95, 12.45, 6.65, 7.55, 9.75

(أ) مباشرة

(ب) بالتقريب إلى أقرب نسبة من العشرة حسب طريقة « الرقم الزوجي »

(ج) بالتقريب بحيث يزيد الرقم السابق على 5

الحل .

(أ)	(ب)	(ج)
4.35	4.4	4.4
8.65	8.6	8.7
2.95	3.0	3.0
12.45	12.4	12.5
6.65	6.6	6.7
7.55	7.6	7.6
9.75	9.8	9.8
المجموع 52.35	المجموع 52.4	المجموع 52.7

لاحظ أن الطريقة (ب) أحسن من الطريقة (ج) حيث أنها تؤدي إلى تناقص أخطاء التقريب المتراكمة ب.

التمرين العلمية والأرقام المعنوية :

١ - ٥ عبر عن الأرقام التالية بدون استخدام قوى العدد 10 .

- (أ) 4.823×10^7 . حرك العلامة العشرية 7 أماكن إلى اليمين فيكون الناتج 48230000
 (ب) 8.4×10^{-6} . حرك العلامة العشرية 6 أماكن إلى اليسار فيكون الناتج 0.000 008 4
 (ج) $0.000\ 380 = 3.80 \times 10^{-4}$ (د) $300 \times 10^8 = 30\ 000\ 000\ 000$
 (د) $186\ 000 = 1.86 \times 10^5$ (و) $70\ 000 \times 10^{-10} = 0.000\ 007\ 000\ 0$

١ - ٦ ما هو عدد الأرقام المعنوية في الأرقام التالية إذا افترضنا أن الأرقام مسجلة بدقة ؟

- (أ) 149.8 mm أربعة (د) 0.00280 m ثلاثة (ز) 9 منازل غير محدود
 (ب) 149.80 mm خمسة (هـ) 1.00280 m ستة (ح) 4.0×10^3 g إثنان
 (ج) 0.0028 m إثنان (و) 9 g واحد (ط) 7.58400×10^{-5} N ستة

١ - ٧ ما هو الحد الأقصى للخطأ في القياسات التالية إذا افترضنا أنها مسجلة بدقة ؟ حدد عدد الأرقام المعنوية لكل رقم في كل حالة .

- (أ) 73.854 mm من الممكن أن تكون القياسات في المدى من 73.8535 mm إلى 73.8545 mm وبهذا يكون الحد الأقصى للخطأ 0.0005 mm يحتوي الرقم على خمسة أرقام معنوية .
 (ب) $0.09800\ m^3$ رقم الـ m^3 من الممكن أن يكون أى رقم من 0.097 995 إلى 0.098 005 وبهذا يكون الحد الأقصى للخطأ $0.000\ 005\ m^3$ يحتوي الرقم على أربعة أرقام معنوية .
 (ج) $3.867 \times 10^8\ km$. الرقم الحقيقي بالكيلومترات أكبر من 3.8665×10^8 ولكنه أقل من 3.8675×10^8 .

وبهذا يكون الحد الأقصى للخطأ هو $0.0005 \times 10^8\ km$. يحتوي الرقم على أربعة أرقام معنوية .

١ - ٨ أكتب الأرقام التالية باستخدام الرموز العملية ، مفترضاً أن جميع الأرقام معنوية إلا إذا ذكر غير ذلك .

$$\begin{array}{ll} (أ) & 24\,380\,000 \text{ (four sig. fig.)} = 2.438 \times 10^7 \\ (ب) & 0.000\,009\,851 = 9.851 \times 10^{-6} \\ (ج) & 7\,300\,000\,000 \text{ (five sig. fig.)} = 7.3000 \times 10^9 \\ (د) & 0.000\,184\,00 = 1.8400 \times 10^{-4} \end{array}$$

العمليات الحسابية :

١ - ٩ وضح أنه في حاصل ضرب الرقم 5.74 في 3.8 مفترضاً أن أرقامها المعنوية هي ثلاثة وإثنان على التوالي لا يمكن أن يكون دقيقاً لأكثر من رقمين معنويين .

الطريقة الأولى :

$5.74 \times 3.8 = 21.812$ ولكن ليس كل ناتج الضرب معنوياً . ولتحديد عدد الأرقام المعنوية فنلاحظ أن الرقم 5.74 يمكن أن يكون أى رقم بين 5.745 ، 5.735 بينما الرقم 3.8 يمكن أن يكون أى رقم بين 3.75 ، 3.85 . وبهذا يكون أصغر قيمة ممكنة لحاصل الضرب هو $5.735 \times 3.75 = 21.50625$ وتكون أكبر قيمة ممكنة هي $5.745 \times 3.85 = 22.118\,25$.

ربما أن المدى الممكن للقيم هو من 21.506 25 إلى 22.118 25 فإنه من الواضح أن الأرقام المعنوية لن تزيد من الأرقام الخمسة الأولى ، وتكتب النتيجة 22 . لاحظ أن الرقم 22 يمثل أى رقم بين 21.5 ، 22.5 .

الطريقة الثانية :

اعتبر في الصورة التالية أن الأرقام المائلة مشكوك في صحتها ، وبهذا يجب حاصل الضرب كالاتي :

$$\begin{array}{r} 5.74 \\ 3.8 \\ \hline 4592 \\ 1722 \\ \hline 21.812 \end{array}$$

يجب أن لا تحتفظ بأكثر من رقم واحد مشكوك فيه في النتيجة وبهذا يكون الرقم 22 إلى رقمين معنويين .

لاحظ أنه من الضروري الاحتفاظ بعدد أكبر من الأرقام المعنوية أكبر مما هو في آخر حد دقيق . لاحظ أنه لو قمنا بتقريب الرقم 5.74 إلى 5.7 فإن حاصل ضرب $5.7 \times 3.8 = 21.66 = 22$ إلى رقمين معنويين ، كما في النتيجة السابقة . عند إجراء الحسابات بدون استخدام آلة حاسبة فإنه يمكن التقليل من العمل بعدم الاحتفاظ بأكثر من رقم أو رقمين معنويين بعد آخر معامل دقيق وتقرب النتيجة النهائية إلى أقرب رقم معنوى .

١ - ١٠ أجمع الأعداد 4.193 55, 15.28, 5.9561, 12.3, 8.472 مفترضاً أن جميع الأرقام معنوية

الحل :

في (أ) الرقم المشكوك فيه في عمليات الجمع مكتوب بخط مائل . النتيجة النهائية والتي لا تتضمن أكثر من رقم واحد مشكوك فيه هي 46.2

	4.19	(ب)	4.193 55	(أ)
	15.28		15.28	
	5.96		5.956 1	
	12.3		12.3	
	8.47		8.472	
	46.20		46.201 65	

بعض العمل يمكن تقليله لو اتبعنا الطريقة (ب) حيث احتفظنا
برقم معنوي عشرين واحد أكثر من الرقم الأقل دقة. والنتيجة النهائية ،
مقربة إلى 46.2 تتفق مع النتيجة في (أ) .

١ - ١١ أجمع 1372410 — 12 684 000 + 475 000 000 إذا كانت هذه الأعداد تحتوي على 3, 5, 7 أرقام معنوية على التوالي

الحل :

في عمليات الجمع في (أ) جميع الأرقام احتفظ بها ثم قربت النتيجة . في (ب) استخدمت طريقة مشابهة لما استخدمناه في الحل ١ - ١٠ (ب) . في كلتا الحالتين فإن الأرقام المشكوك فيها مكتوبة بخط مائل .

475 000 000	487 700 000	(ب)	475 000 000	487 684 000	(أ)
+ 12 700 000	- 1 400 000		+ 12 684 000	- 1 372 410	
487 700 000	486 300 000		487 684 000	486 311 590	

وتقرب النتيجة النهائية إلى 486 000 000 وقد يكون من الأفضل لبيان أن هناك 3 أرقام معنوية أن تكتب على صورة 486 مليون أو 4.86×10^8 .

١ - ١٢ أجر العمليات الموضحة فيما يلي :

$$8.35/98 = 0.085 \quad (ب) \quad 48.0 \times 943 = (48.0)(943) = 45 300 \quad (أ)$$

$$(28)(4193)(182) \quad (2.8 \times 10^1)(4.193 \times 10^3)(1.82 \times 10^2) \quad (ج) \quad (2.8)(4.193)(1.82) \times 10^{1+3+2} \quad 21 \times 10^6 \quad 2.1 \times 10^7$$

وهذه يمكن كتابتها 21 مليون لبيان أن هناك رقمين معنويين

$$\begin{aligned} \frac{(526.7)(0.001280)}{0.000034921} &= \frac{(5.267 \times 10^2)(1.280 \times 10^{-3})}{3.4921 \times 10^{-5}} = \frac{(5.267)(1.280)}{3.4921} \times \frac{(10^2)(10^{-3})}{10^{-5}} \quad (د) \\ &= 1.931 \times \frac{10^{2-3}}{10^{-5}} = 1.931 \times \frac{10^{-1}}{10^{-5}} \\ &= 1.931 \times 10^{-1+5} = 1.931 \times 10^4 \end{aligned}$$

وهذه يمكن كتابتها 19.31 ألف لبيان أن هناك أربعة أرقام معنوية

$$\begin{aligned} \frac{(1.47562 - 1.47322)(4895.36)}{0.000159180} &= \frac{(0.00240)(4895.36)}{0.000159180} = \frac{(2.40 \times 10^{-3})(4.89536 \times 10^3)}{1.59180 \times 10^{-4}} \quad (هـ) \\ &= \frac{(2.40)(4.89536)}{1.59180} \times \frac{(10^{-3})(10^3)}{10^{-4}} = 7.38 \times \frac{10^0}{10^{-4}} = 7.38 \times 10^4 \end{aligned}$$

هذه أيضاً يمكن كتابتها 73.8 ألف لإظهار الأرقام الثلاثة معنوية بالعدد

$$(و) \text{ إذا كان البسط } 6, 5 \text{ أرقاماً دقيقة ، } 3.84 + 5.009 = 8.85$$

$$\sqrt{128.5} = 89.24 \quad \sqrt{39.3} = 6.27 \quad (ح) \quad 1416\sqrt{71.35} = (3.1416)(8.447) = 26.54 \quad (ز)$$

١٢-١ احسب قيمة كل ما يلي إذا كانت $X = 3, Y = -5, A = 4, B = -7$ حيث كل الأرقام يفترض فيها أنها دقيقة .

$$2X - 3Y = 2(3) - 3(-5) = 6 + 15 = 21 \quad (أ)$$

$$4Y - 8X + 28 = 4(-5) - 8(3) + 28 = -20 - 24 + 28 = -16 \quad (ب)$$

$$\frac{AX + BY}{BX - AY} = \frac{(4)(3) + (-7)(-5)}{(-7)(3) - (4)(-5)} = \frac{12 + 35}{-21 + 20} = \frac{47}{-1} = -47 \quad (ج)$$

$$X^2 - 3XY - 2Y^2 = (3)^2 - 3(3)(-5) - 2(-5)^2 = 9 + 45 - 50 = 4 \quad (د)$$

$$\begin{aligned} 2(X + 3Y) - 4(3X - 2Y) &= 2[(3) + 3(-5)] - 4[3(3) - 2(-5)] \\ &= 2[3 - 15] - 4[9 + 10] = 2(-12) - 4(19) \\ &= -24 - 76 = -100 \quad (هـ) \end{aligned}$$

طريقة أخرى :

$$2(X + 3Y) - 4(3X - 2Y) = 2X + 6Y - 12X + 8Y = -10X + 14Y = -10(3) + 14(-5) \quad (و)$$

$$= -30 - 70 = -100$$

$$\frac{X^2 - Y^2}{A^2 - B^2 + 1} = \frac{(3)^2 - (-5)^2}{(4)^2 - (-7)^2 + 1} = \frac{9 - 25}{16 - 49 + 1} = \frac{-16}{-32} = \frac{1}{2} = 0.5 \quad (ز)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2X^2 - Y^2 - 3A^2 + 4B^2 + 3} &= \sqrt{2(3)^2 - (-5)^2 - 3(4)^2 + 4(-7)^2 + 3} \\ &= \sqrt{18 - 25 - 48 + 196 + 3} = \sqrt{144} = 12 \quad (ح) \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{6A^2}{X} + \frac{2B^2}{Y}} = \sqrt{\frac{6(4)^2}{3} + \frac{2(-7)^2}{-5}} = \sqrt{\frac{96}{3} + \frac{98}{-5}} = \sqrt{12.4} = 3.52, \text{ approx}$$

الدوال :

السنة	عدد الأطنان من الجنذور (مقربة لأقرب ٥ أطنان)	عدد الأطنان من البنجر (مقربة لأقرب ٥ أطنان)
1950	200	75
1951	185	90
1952	225	100
1953	250	85
1954	240	80
1955	195	100
1956	210	110
1957	225	105
1958	250	95
1959	230	110
1960	235	100

١ - ١٤ الجدول ١ - ١ يظهر عدد الأطنان

من الجنذور والبنجر التي أنتجتها مزرعة

PQR وذلك خلال الأعوام من

من 1950 إلى 1960

بالرجوع إلى هذا الجدول حدد

السنة أو السنوات التي خلالها :

(أ) أنتج أقل عدد من أطنان

الجنذور

(ب) أنتج أكبر عدد من أطنان البنجر

(ج) حدث أكبر تدهور في إنتاج

الجنذور

شكل ١-١

(د) انخفض إنتاج البنجر بينما ارتفع إنتاج الجنذور عما كان عليه في العام السابق

(هـ) أنتج نفس كمية الأطنان من الجنذور والبنجر

(و) مجموع إنتاج الجنذور ، والبنجر وصل إلى نهاية العظمى

الحل : (أ) 1951 (ب) 1959 ، 1956 (ج) 1955 (د) 1953, 1957, 1958, 1960

(هـ) 1952, 1957; 1953, 1958 (و) 1958

١٥ - ١ إذا كانت W تعبر عن عدد الأطنان المنتجة من الجنذور و C تعبر عن عدد الأطنان المنتجة من البنجر في العام t في

مزرعة PQR المذكورة في المسألة ١٤ - ١ . من الواضح أن W ، C دالتان في t وهذا يعبر عنه $W = F(t)$

و $C = G(t)$

(أ) أوجد W عند $t = 1956$ الحل : 210

(ب) أوجد C عند $t = 1959$ ، $t = 1953$ الحل : 110 ، 85 على التوالي

(ج) أوجد t عند $W = 225$ الحل : 1957 ، 1952 على التوالي

(د) أوجد $F(1959)$ الحل : 240

(هـ) أوجد $G(1958)$ الحل : 95

(و) أوجد C عندما $W = 210$ الحل : 110

(ز) ما هو مجال المتغير t ؟ الحل : السنوات 1950, 1951, ..., 1960

(ح) هل W دالة وحيدة القيمة في t ؟

نعم ، حيث أنه لكل قيمة من قيم t (في مجال t) تقابلها قيمة وحيدة للمتغير W

(ط) هل t دالة في W ؟ إذا كانت كذلك فهل هي دالة وحيدة القيمة ؟ نعم ، t دالة في W حيث أنه لكل قيمة يمكن أن تأخذها W تقابلها قيمة أو أكثر من قيم t يمكن الحصول عليها من الجدول .

بما أنه من الممكن أن يكون هناك أكثر من قيمة للمتغير t مقابل قيمة من قيم W (مثال : عندما $W=225$ فإن $t = 1952$ أو $t = 1957$) فإن الدالة متعددة القيم . هذا الاعتماد الدالي لـ t على W يمكن كتابته على صورة $t = H(W)$

(ى) هل C دالة في W ؟

نعم ، حيث أنه لكل قيمة ممكنة من قيم W يقابلها قيم أو أكثر من قيم C كما هو محدد بالجدول ١-١ .
كذلك فإن W دالة في C .

(ك) ما هو المتغير المستقل ، t أو W ؟

من الناحية المادية فإنه من المعتاد أن نفكر في أن W تتحدد من t وليس أن t تتحدد من W . وبهذا فإنه من الناحية المادية نعتبر t المتغير المستقل و W المتغير التابع . من الناحية الرياضية فإن أيًا من المتغيرين يمكن اعتباره متغيراً مستقلاً والآخر متغيراً تابعاً . فالمتغير الذى يعطى "بما مختلفة" هو المتغير المستقل أما المتغير الذى يتحدد كنتيجة لذلك فهو المتغير التابع .

١-١٩ تتحدد قيمة المتغير Y من المتغير X طبقاً للمعادلة $Y = 2X - 3$ (حيث الرقمان 2,3 أرقام صحيحة) .

(أ) أوجد قيمة Y إذا أخذت X القيم 1.5 ، 2 ، 3 .

$$\begin{array}{ll} \text{عندما} & X = 3, Y = 2X - 3 = 2(3) - 3 = 6 - 3 = 3. \\ \text{عندما} & X = 2, Y = 2X - 3 = 2(2) - 3 = 4 - 3 = 1. \\ \text{عندما} & X = 1.5, Y = 2X - 3 = 2(1.5) - 3 = 3 - 3 = 0. \end{array}$$

(ب) كون جدولاً لقيم Y المقابلة لقيم X 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4

يظهر الجدول المقابل قيم Y ، محسوبة كما في الجزء

(أ) من المسألة :

X	2	1	0	1	2	3	4
Y	1	7	5	3	1	3	5

لاحظ أنه باستخدام قيم أخرى لـ X فإنه من الممكن

تكوين عديد من الجداول . العلاقة $Y = 2X - 3$ مكافئة

لمجموعة من كل الجداول المحتملة .

(ج) إذا كان اعتماد Y على X يعبر عنه بالصورة $Y = F(X)$ حدد قيمة $F(2.4)$ ، $F(0.8)$

$$F(2.4) = 2(2.4) - 3 = 4.8 - 3 = 1.8, F(0.8) = 2(0.8) - 3 = 1.6 - 3 = -1.4$$

(د) ماهي قيمة X إذا كانت $Y = 15$ ؟

بالتعويض عن Y بالقيمة 15 في $Y = 2X - 3$ فإن $15 = 2X - 3$ $18 = 2X$ $9 = X$

(هـ) هل من الممكن التعبير عن X كدالة في Y ؟

نعم حيث أن $Y = 2X - 3$ ، $Y + 3 = 2X$ أو $X = \frac{1}{2}(Y + 3)$ وهذا يعبر عن X كدالة صريحة في Y .

(و) هل Y دالة وحيدة القيمة في X ؟

نعم ، حيث أنه لكل قيمة يمكن أن تأخذها X (وهناك عدد لا نهائى من هذه القيم) تأخذ Y قيمة وحيدة فقط .

(ز) هل X دالة وحيدة القيمة في Y ؟

نعم ، حيث أنه من الجزء (ج) فإن $X = \frac{1}{2}(Y + 3)$ بحيث أنه لكل قيمة يمكن أن تأخذها Y قيمة وحيدة فقط تأخذها X .

١٧-١ إذا كانت $Z = 16 + 4X - 3Y$ أوجد قيم Z المقابلة لما يلي :

$$(أ) \quad X = 2, Y = 5 \quad (ب) \quad X = 3, Y = 7 \quad (ج) \quad X = -4, Y = 2$$

الحل :

$$Z = 16 + 4(2) - 3(5) = 16 + 8 - 15 = 9 \quad (أ)$$

$$Z = 16 + 4(-3) - 3(-7) = 16 - 12 + 21 = 25 \quad (ب)$$

$$Z = 16 + 4(-4) - 3(2) = 16 - 16 - 6 = -6 \quad (ج)$$

بمعلومية قيم Y ، X يقابلها قيمة Z . ومن الممكن التعبير عن اعتماد Z على Y ، X بأن نكتب

$Z = F(X, Y)$ ونقرأ Z دالة في Y ، X . $F(2, 5)$ تعبر عن قيمة Z عندما $Y = 5$ ، $X = 2$

وهي 9 ، من الجزء (أ) . بصورة ماثلة $F(-3, -7) = 25$ ، $F(-4, 2) = -6$ من (ب)

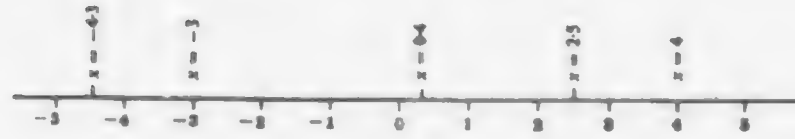
(ج) وتسمى المتغيرات X, Y بالمتغيرات المستقلة و Z بالتغير التابع .

الاشكال البيانية :

١ - ١٨ عين على المحور x في نظام للإحداثيات النقط المقابلة لما يلي :

- (أ) $x = 4$ (ب) $x = -3$ (ج) $x = 2.5$
(د) $x = -4.3$ (هـ) $x = 0.4$ ، مفترضاً أن كل هذه القيم قيم صحيحة .

الحل :



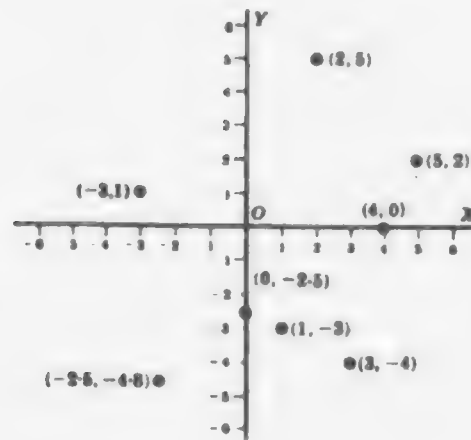
لكل قيمة من قيم x الصحيحة نقطة وحيدة فقط على المحور . وبالعكس فإنه من الثابت في الرياضيات المتقدمة أن كل نقطة على الأحداثى تقابلها قيمة وحيدة من قيم x .

من الناحية النظرية فإن هناك نقطة تقابل $x = \pi = 3.141\ 592653\ 58 \dots$
أو $x = 7/22 = 3.142857142875 \dots$

ومن الناحية العملية فإننا لن نأمل أن نحدد موضع نقطة بالدقة حيث أن كثافة القلم الذي نستخدمه له سمك ينطلي على عدد لانهاى من النقط ، كذلك فإن المحور x نفسه له سمك . وهذا فإن الشكل أعلاه هو تمثيل مادي للوضع الرياضى الفعلى .

١ - ١٩ إذا كان x يعبر عن قطر حامل كرة بالمليمتر . إذا كانت $x = 4.58$ إلى ثلاثة أرقام معنوية . كيف يمكن تمثيل هذا على المحور x ؟

الحل :



الشكل ١ - ٢

القياس المعطى 4.58 mm.

يظهر أن القياس الحقيقى يقع بين

4.575 mm و 4.585 mm . وهذا

فإن القياس يجب أن يمثل بالجزء

الثقيل من الخط .

١ - ٢٠ عين في نظام للإحداثيات المتعامدة

النقطة إلى إحداثياتها :

- (أ) (5, 2) (ب) (2, 5)
(ج) (-3, 1) (د) (1, -3)
(هـ) (-2.5, -4.8)
(و) (0, -2.5)
(ز) (3, -4) (ح) (4, 0)

افترض أن الأرقام المطاة هي أرقام صحيحة . أنظر الشكل (١ - ٢) لتوضيح الحسل .

$$y = 2x - 3 \quad \text{١ - ٢ عبر بيانياً عن المعادلة}$$

الحسل :

$$x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \quad \text{ضع}$$

فإننا نجد

$$y = -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5$$

على التوالي [أنظر المسألة ١ - ١٦

(ب) . وهذا تكون النقطة على الرسم

في (٨٨) .

وقد رسمت باستخدام نظام

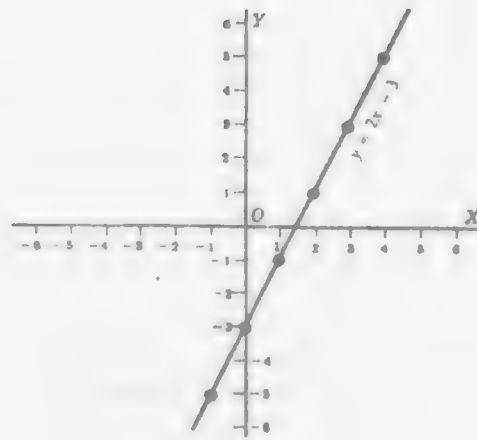
الاصنافيات المتعامدة كما هو موضح

بالشكل ١ - ٣ جميع هذه النقاط

وكذلك غيرها من النقاط التي يمكن

الحصول عليها باستخدام قيم أخرى

لـ x تقع على خط مستقيم وهو الشكل المطلوب .



الشكل ١ - ٣

وبما أن الشكل البياني للمعادلة $y = 2x - 3$ هو خط مستقيم فإننا نسمي أحياناً $F(x) = 2x - 3$

دالة خطية

وبشكل عام فإن $F(x) = ax + b$ حيث a, b ثوابت دالة خطية وشكلها البياني هو خط مستقيم .

لاحظ أن نقطتين فقط لازمتين لرسم الدالة الخطية لأن نقطتين كافيتان لتحديد خط

$$y = x^2 - 2x - 8 \quad \text{١ - ٢٢ عبر بيانياً عن المعادلة}$$

الحسل :

يظهر الجدول قيم y المقابلة للقيم المختلفة لـ x وعلى سبيل

المثال فعندما $x = 2$

$$y = (-2)^2 - 2(-2) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0$$

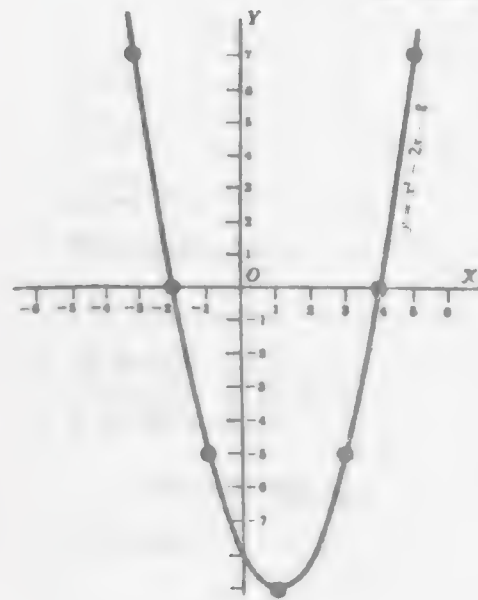
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7

من الجدول فإن النقاط الموضحة بالشكل هي $(-3, 7)$

$(-2, 0), (-1, -5), (0, -8), (1, -9), (2, -8)$

$(3, -5), (4, 0), (5, 7)$

هذه النقاط وغيرها من النقاط التي يمكن الحصول عليها باستخدام



الشكل ١ - ٤

قيم مختلفة لـ x ، تقع على المنحنى الموضح بالشكل ١ - ٤ . هذا المنحنى يسمى قطع مكافئ .

$$F(x) = x^2 - 2x - 8$$

تسمى دالة من الدرجة الثانية . وبشكل عام فإن الرسم البياني للمعادلة $y = a + bx + cx^2$ حيث a, b, c ثوابت و $c \neq 0$ يعبر عن قطع مكافئ . أما إذا كانت $c = 0$ فإن الشكل يعبر عن خط مستقيم كما في المسألة ١ - ٢١ .

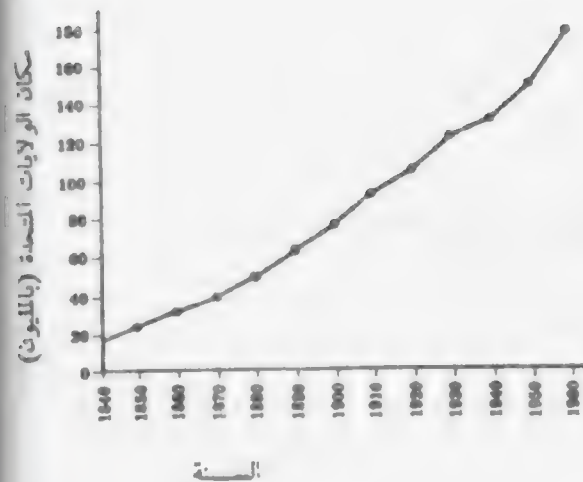
١ - ٢٢ الجدول ٢ - ١ يعطي عدد سكان الولايات المتحدة (بالمليون) لسنوات 1840, 1850, ..., 1960 . ارسم هذه البيانات .

جدول ١ - ٢ سكان الولايات المتحدة (بالمليون) ، 1840 — 1960

السنة	1840	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960
السكان (بالمليون)	17.1	23.2	31.4	39.8	50.2	62.9	76.0	92.0	105.7	122.8	131.7	151.1	179.3

المصدر : مكتب التعداد

الطريقة الأولى :



(المصدر : مكتب التعداد)

شكل ١ - ٥

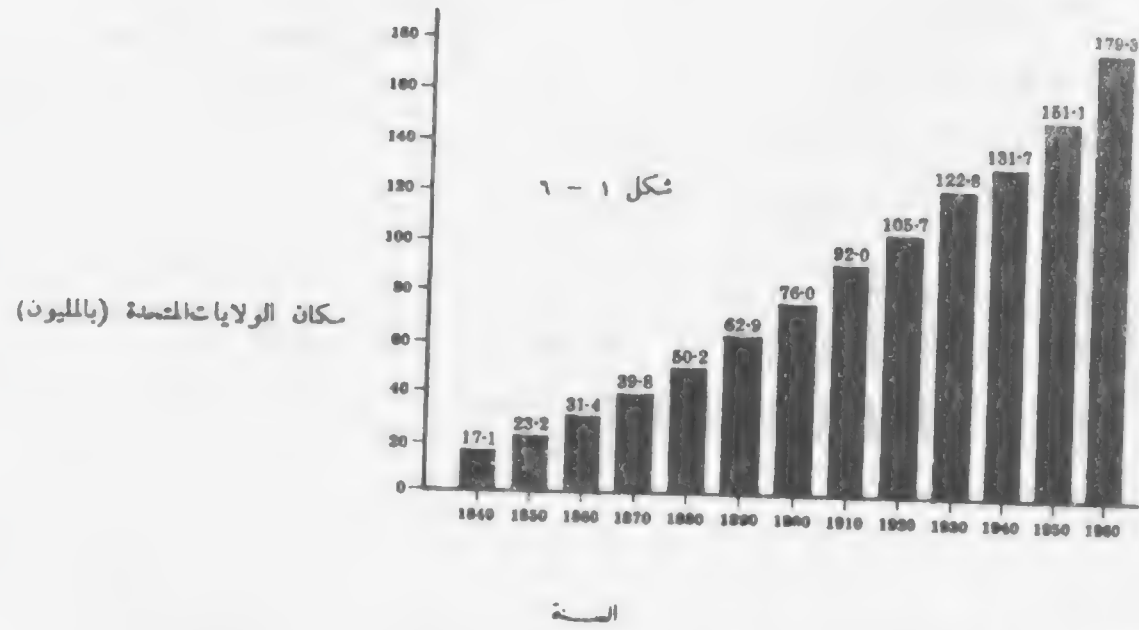
بالرجوع إلى الشكل ١ - ٥ فإننا في الرسم اعتبرنا أن السكان ، يعبر عنها بالرمز P هو المتغير التابع بينما الزمن ، يرمز له بالرمز t هو المتغير المستقل . ونحدد مواضع النقاط كالتعداد بالاحداثيات المقروءة من الجدول فمثل سبيل المثال (1880, 50.2) وتوصل النقاط المتتالية بعد ذلك بخط مستقيم حيث أنه لا توجد لدينا معلومات عن عدد السكان في خلال السنوات المتوسطة . ولهذا السبب يسمى هذا الشكل بالخط البياني لاحظ أن الوحدات على الاحداثيات غير متساوية كما هو الحال عند رسم المعادلة $y = 2x - 3$.

وهذا بالطبع يمكن تبريره حيث أن المتغيران يمثلان كميات مختلفة .

لاحظ أيضاً أن الصفر قد وضع على المحور الرأسى وليس (لأسباب واضحة) على المحور الأفقى . وبشكل عام يجب أن يوضع الصفر وبخاصة على المحور الرأسى .

فإذا كان من المستحيل وضع الصفر لى سبب وإذا كان حلفه قد يؤدي إلى استنتاجات خاطئة بواسطة القارئ فإنه من الممكن لفت النظر إلى هذا الحلف بإحدى الوسائل كما هو موضح فى المسألة ١ - ٢٦ . الجدول أو الرسم البيانى الذى يوضح توزيع متغير كدالة فى الزمن يسمى سلسلة زمنية

الطريقة الثانية :

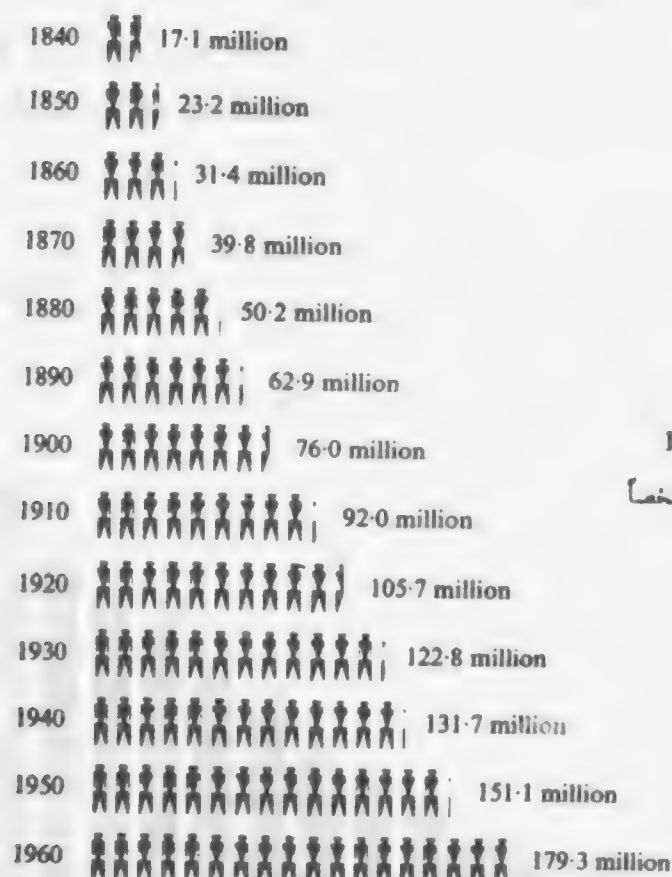


المصدر : مكتب التعداد

الشكل ١ - ١ يسمى بالسلسلة الزمنية ، خرائط الأعمدة أو مخططات الأعمدة . عرض الأعمدة ليس له أى دلالة فى هذه الحالة ويمكن أن يأخذ أى حجم مادامت الأعمدة لاتتراكب فوق بعضها .

الأرقام الموضحة على الأعمدة من الممكن تركها أو حذفها . فإذا أبقينا عليها فإن التدرج الرأسى يصبح غير ضرورى ومن الممكن حذفه .

الطريقة الثالثة :



سكان الولايات المتحدة
خلال الأعوام 1840 to 1960
يمثل كل شكل 10 000 000 شخصاً
شكل ١ - ٧

المصدر : مكتب التعداد

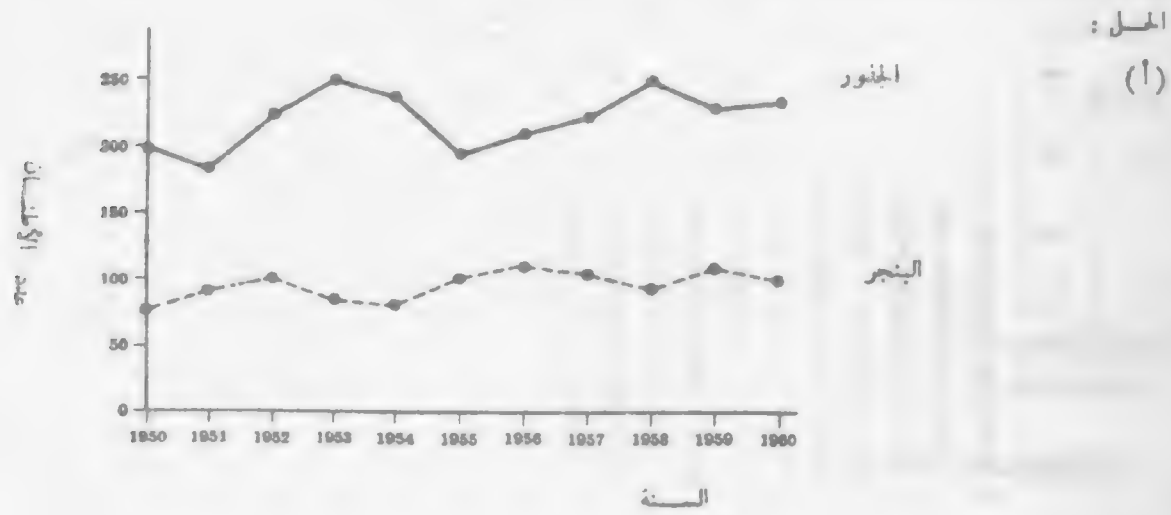
الخرائط أو المخططات كالتى فى الشكل ١ - ٧ تسمى بالرسوم التصويرية أو الخرائط المصورة . وعادة تستخدم لتوضيح البيانات الإحصائية بطريقة مشوقة للعامة . وكثير من هذه الرسوم التصويرية تظهر مقدرة كبيرة على الابتكار والابداع فى فن توضيح البيانات .

الأرقام على يمين الرسوم فى الرسم التصويرى السابق يمكن إدراجها أو عدم إدراجها وعند حذفها فإنه يظل من الممكن للقارى تقدير عدد السكان إلى أقرب خمسة ملايين شخص .

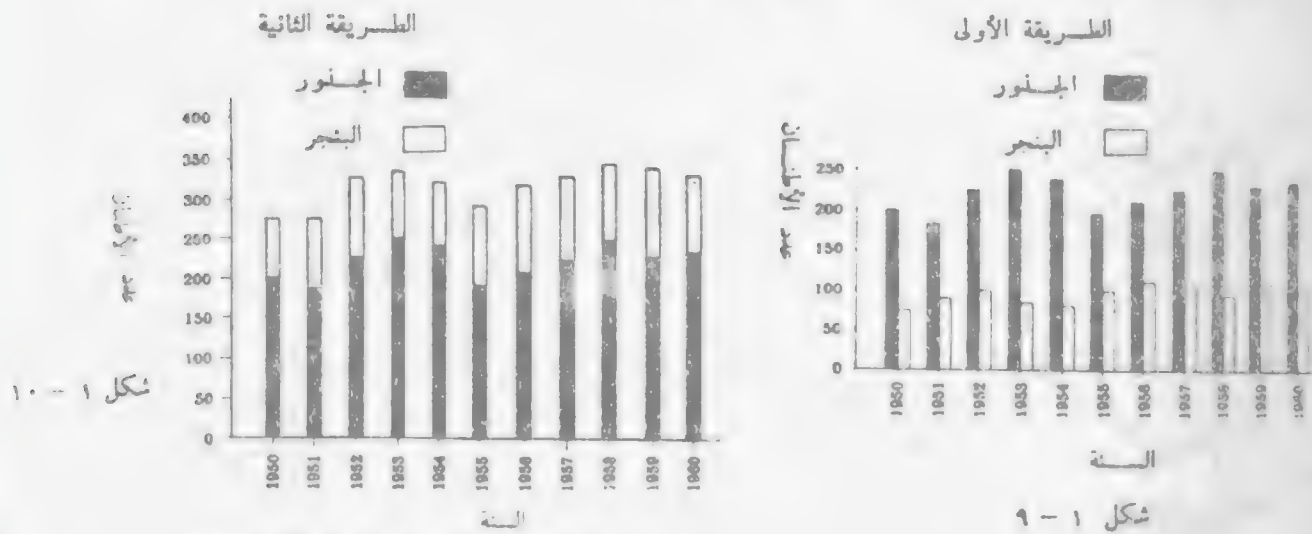
١ - ٧ عبر بيانياً عن بيانات المسألة ١ - ١٤ باستخدام

(ب) الأعمدة البيانية

(أ) المخطوط البيانية



شكل ١ - أ (ب)



شكل ١ - ب

يسمى هذا الشكل بخريطة الأعمدة البيانية المخرأة

٢٥ - ١ (أ) عر عن عدد الطائتان السنوية من الجنور والبنجر في المسألة ١ - ١ كنسبة من مجموع الإنتاج السنوى .

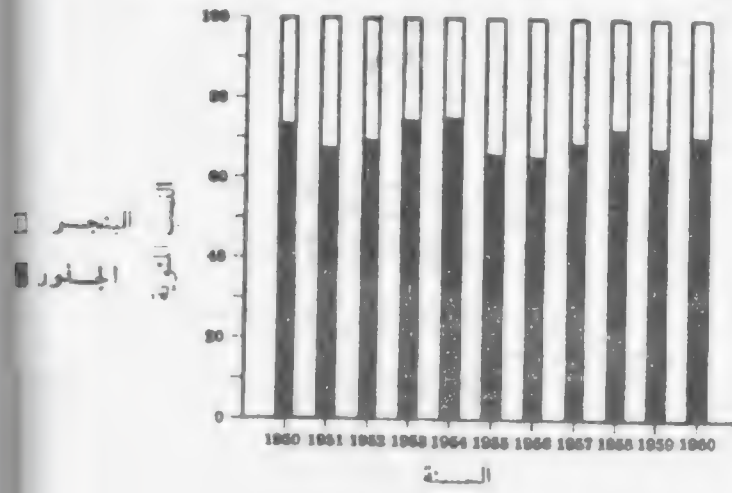
(ب) ارمم النسب التي حصلت عليها في (أ)

الحل :

(أ) في 1950 نسبة الجنور = $\frac{200}{200 + 75} = 72.7\%$ ونسبة البنجر = $100\% - 72.7\% = 27.3\%$

جدول ١ - ٣

السنة	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960
نسبة الجنور	72.7	67.3	69.2	74.6	75.0	66.1	65.6	68.2	72.5	67.6	70.1
نسبة البنجر	27.3	32.7	30.8	25.4	25.0	33.9	34.4	31.8	27.5	32.4	29.9



(ب) الرسم البياني لنسب في (أ) والموضح بالشكل ١١-١ يسمى الشكل البياني لنسب المتوية المجهزة . من الممكن أيضاً استخدام شكل بياني مثل الذي استخدم في الطريقة الأولى لحل المسألة ٢٤ - ١ (ب) .

١ - ٢٦ باستخدام الخط البياني مثل بيانات إنتاج الجوز الموضح في الجدول ١ - ١ بالمسألة (١٤) .

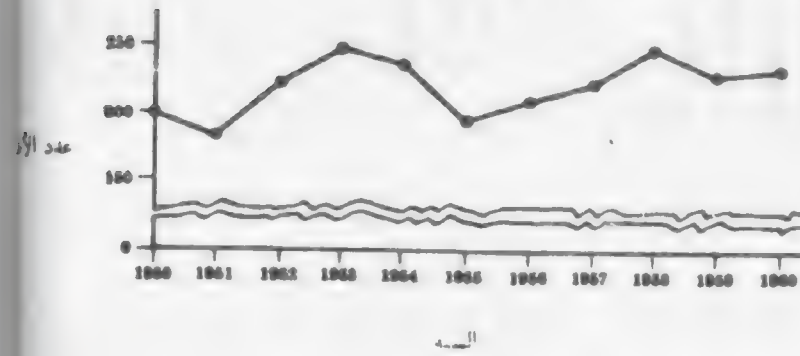
الحل :

الخط البياني المطلوب يمكن الحصول عليه من

حل (المسألة ١ - ٢٤) (أ) وذلك بحذف

الخط البياني الأدنى . وهذا يؤدي إلى ظهور

مساحة مضاعفة بين الخط البياني الأعلى والمحور الرأسى . ولتجنب ذلك يمكن أن نبدأ المقياس الأفقى عند 150 بدلا من 0 . وهذا قد يؤدي إلى استنتاجات خاطئة من جانب القارئ الذي لا يلاحظ حذف الصفر . وحتى نوجه النظر لهذا الحذف فن الممكن أن يكون الرسم كما في (الشكل ١٢ - ١) أدناه .



شكل ١٣ - ١



شكل ١٢ - ١

أسلوب آخر يمكن استخدامه حتى نوجه النظر إلى حذف الصفر نستخدم خطاً متعرجاً على أحد الإحداثيات كما هو موضح (بالشكل ١٣ - ١) أعلاه .

١ - ٢٧ الجدول ١ - ٤ يظهر مساحات القارات المختلفة في العالم مبرراً عنها بـ ١٠٠ مليون كيلومتر المربعة ، عبر بياناً عن هذه البيانات .

جداول ١ - ٤

مساحات قارات العالم

المساحة بمليون كيلومتر (مربع)	القارة
30.3	أفريقيا
26.9	آسيا
4.9	أوروبا
24.3	أمريكا الشمالية
8.5	أستراليا و نيوزيلندا
17.9	أمريكا الجنوبية
20.5	الاتحاد السوفيتي

المجموع

133.3

المصدر الأمم المتحدة

ملحوظة ١ - مساحة أوروبا لا تتضمن مساحة الاتحاد السوفيتي والبلاد الخاضعة لسيطرته حيث ظهر في خانة الـ *U.S.S.R* (الاتحاد السوفيتي)
ملحوظة ٢ - لا تتضمن مساحة أوروبا تركيا حيث ظهرت ضمن آسيا .

الطريقة الاولى :

الشكل ١ - ١٤

مساحات قارات العالم

(من واقع بيانات الأمم المتحدة)



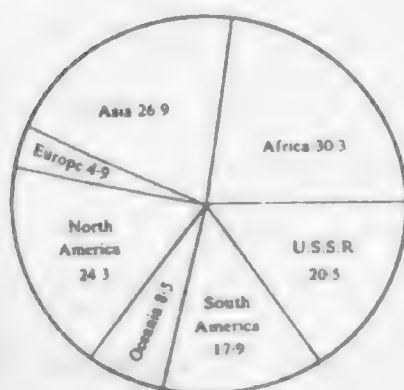
الشكل أعلاه هو شكل الأعمدة البيانية حيث الأعمدة أفقية بدلا بدلا من رأسية . لاحظ أن القارات قد رتب حسب الترتيب الأبجدي لأسمائها (باللغة الإنجليزية) . وكان من الممكن ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً حسب مساحتها .

الطريقة الثانية :

(الشكل ١ - ١٥) يسمى بالرسم الدائري أو الخريطة التوضيحية الدائرية . لرسم هذا الشكل تستخدم النتيجة بأن المساحة الكلية 133.3 مليون كيلومتر مربع وهذه تقابل مجموع درجات قوس الدائرة أي 360° .

وهذا فإن كل مليون كيلومتر مربع يقابله $360^\circ/133.3$ ومن هنا فإن أفريقيا ومساحتها 30.3 مليون كيلومتر مربع يقابلها قوس المقدار $82^\circ = (360^\circ/133.3) \times 30.3$ بينما آسيا ، أوروبا ، أمريكا الشمالية وأستراليا ونيوزيلندا ، أمريكا الجنوبية والاتحاد السوفيتي يقابلها قوس المقدار 55° , 48° , 23° , 66° , 13° , 73° على التوالي . وباستخدام المنقلة فإن خطوط التقسيم المطلوبة يمكن رسمها .

مساحة قارات العالم
(بمليون كيلومتر مربع)



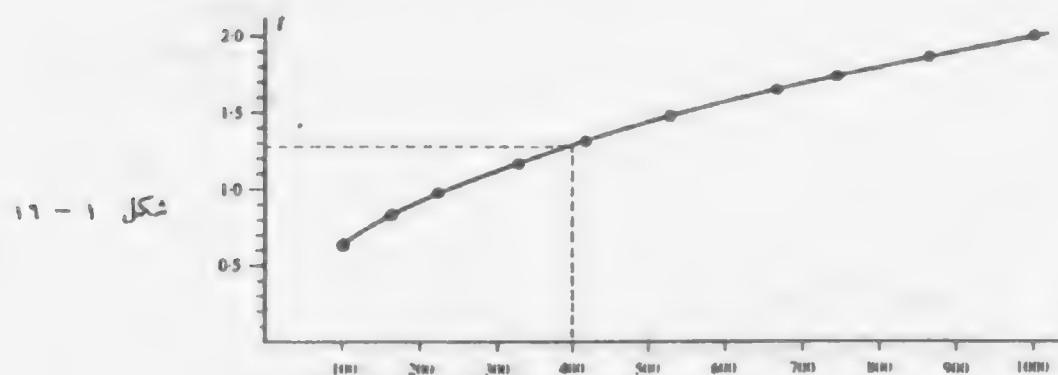
شكل ١ - ١٥

٧٨ - ٩ الملاحظات التالية سجلت في معمل الطبيعة للزمن t (بالثواني) اللازم لكي يكمل بتبول طوله l (بالمليمترات) اهتزازة واحدة (أ) أعرض بيانياً l كدالة في t (ب) من الرسم قدر l لبتبول طوله 400 ملليمتر

l	101	162	222	338	420	534	667	745	866	1000
t	0.64	0.81	0.95	1.17	1.30	1.47	1.65	1.74	1.87	2.01

الحل :

(أ) الخط البياني الموضح بالشكل ١ - ١٦ حصلنا عليها بتوصيل نقط الملاحظات بخط ممد .



(ب) القيمة المقدرة لـ t هي 1.27 ثانية .

المعادلات :

٧٩ - ١ حل المعادلات التالية :

$$(أ) \quad 4a - 20 = 8$$

$$\text{أضف } 20 \text{ إلى طرفي المعادلة} \quad 4a - 20 + 20 = 8 + 20 \quad \text{أو} \quad 4a = 28$$

$$\text{اقسم الطرفين على } 4 : \quad 4a/4 = 28/4 \quad \text{و} \quad a = 7$$

$$\text{تحقق :} \quad 4(7) - 20 = 8, 28 - 20 = 8, 8 = 8$$

$$(ب) \quad 3X + 4 = 24 - 2X$$

$$\text{اطرح } 4 \text{ من طرفي المعادلة} \quad 3X + 4 = 24 - 2X - 4 \quad \text{أو} \quad 3X = 20 - 2X$$

$$\text{أضف } 2X \text{ إلى الطرفين} \quad 3X + 2X = 20 - 2X + 2X \quad \text{أو} \quad 5X = 20$$

$$\text{اقسم الطرفين على } 5 : \quad 5X/5 = 20/5 \quad \text{و} \quad X = 4$$

$$\text{تحقق :} \quad 3(4) + 4 = 24 - 2(4), 12 + 4 = 24 - 8, 16 = 16$$

من الممكن الحصول على الحل بطريقة أسرع بمعلومية أنه من الممكن نقل أو تحريك أى حد من أحد طرفى المعادلة إلى الطرف الآخر بعد تغيير إشاراته . وبهذا يمكن أن نكتب

$$3X + 4 = 24 - 2X, \quad 3X + 2X = 24 - 4, \quad 5X = 20, \quad X = 4$$

$$18 - 5b = 3(b + 8) + 10 \quad (ج)$$

$$18 - 5b = 3b + 24 + 10, \quad 18 - 5b = 3b + 34$$

$$\text{للتحويل } 18 - 5b = 3b + 34 \quad \text{أو} \quad -8b = 16$$

$$\text{بالقسمة على } -8, \quad \frac{-8b}{-8} = \frac{16}{-8}, \quad b = -2$$

$$\text{تحقيق : } 18 - 5(-2) = 3(-2 + 8) + 10, \quad 18 + 10 = 3(6) + 10, \quad 28 = 28$$

$$\frac{Y+2}{3} + 1 = \frac{Y}{5} \quad (د)$$

اضرب أو لا الطرفين في 6 ، العامل المشترك الأصغر المقام

$$6 \left(\frac{Y+2}{3} + 1 \right) = 6 \left(\frac{Y}{5} \right), \quad 6 \left(\frac{Y+2}{3} \right) + 6(1) = \frac{6Y}{5}, \quad 2(Y+2) + 6 = 3Y$$

$$2Y + 4 + 6 = 3Y, \quad 2Y + 10 = 3Y, \quad 10 = 3Y - 2Y, \quad Y = 10$$

$$\text{تحقيق : } \frac{10+2}{3} + 1 = \frac{10}{5}, \quad \frac{12}{3} + 1 = \frac{10}{5}, \quad 4 + 1 = 5, \quad 5 = 5$$

٣٠ - ١ حل كل من مجموعات المعادلات الآتية التالية :

$$\begin{cases} 3a - 2b = 11 \\ 5a + 7b = 39 \end{cases} \quad (أ)$$

$$(١) \quad \text{اضرب المعادلة الأولى في } 7 \quad 21a - 14b = 77$$

$$(٢) \quad \text{اضرب المعادلة الثانية في } 2 \quad 10a + 14b = 78$$

$$\begin{array}{r} 21a - 14b = 77 \\ 10a + 14b = 78 \\ \hline 31a = 155 \end{array} \quad \text{أجمع}$$

$$a = 5 \quad \text{اقسم على } 31$$

لاحظ أنه بضرب المعادلات المعطاة في الأرقام المناسبة فإنه يمكننا كتابة معادلتين مكافئتين وهما (١) ، (٢) .

حيث تتساوى القيمة العددية لمعاملات المجهول . وبجمع المعادلتين فإنه يمكن حذف المجهول b وبهذا نحصل على قيمة a .

$$\text{وبالتعويض عن } a \text{ في المعادلة الأولى : } 3(5) - 2b = 11, \quad -2b = -4, \quad b = 2$$

وبهذا نحصل على $a = 5$ ، $b = 2$

$$\begin{aligned} 3(5) - 2(2) &= 11, 15 - 4 = 11, 11 = 11. \\ 5(5) + 7(2) &= 39, 25 + 14 = 39, 39 = 39 \end{aligned} \quad \text{تحقق}$$

$$\begin{cases} 9X + 14Y = 78 \\ 7X + 3Y = -7 \end{cases} \quad (ب)$$

$$(١) \quad 15X + 42Y = 234 \quad \text{ضرب المعادلة الأولى في 3}$$

$$(٢) \quad 98X - 42Y = 98 - 14 \quad \text{اضرب المعادلة الثانية في 14}$$

$$-83X = 332 \quad \text{اجمع}$$

$$X = -4 \quad : -83 \quad \text{اقسم على}$$

بالتعويض عن $X = -4$ في المعادلة الأولى $5(-4) + 14Y = 78, 14Y = 98, Y = 7$

$$\text{أي } X = -4, Y = 7$$

$$\begin{aligned} 5(-4) + 14(7) &= 78, -20 + 98 = 78, 78 = 78. \\ 7(-4) + 3(7) &= -7, -28 + 21 = -7, -7 = -7 \end{aligned} \quad \text{تحقق}$$

$$\begin{cases} 3a + 2b + 5c = 15 \\ 7a - 3b + 2c = 52 \\ 5a + b - 4c = 2 \end{cases} \quad (ج)$$

$$(١) \quad \begin{aligned} 6a + 4b + 10c &= 30 \\ -35a + 15b + 10c &= 260 \\ -29a + 19b &= 230 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{اضرب المعادلة الأولى في 2} \\ &\text{اضرب المعادلة الثانية في -5} \end{aligned}$$

اجمع

$$(٢) \quad \begin{aligned} 14a + 6b + 4c &= 104 \\ 5a + b - 4c &= 2 \\ 19a - 5b &= 106 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{اضرب المعادلة الثانية في 2} \\ &\text{ضع المعادلة الثالثة} \end{aligned}$$

وبهذا نكون قد حذفنا c وبقى لدينا المعادلتين (١) ، (٢) والتي يمكن حلها آنياً لنحصل على قيم a, b

$$\begin{aligned} -145a + 95b &= -1150 \\ 361a - 95b &= 2014 \\ 216a &= 864 \\ a &= 4 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{اضرب المعادلة (١) في 5} \\ &\text{اضرب المعادلة (٢) في 19} \end{aligned}$$

اجمع

$$\text{اقسم على 216}$$

بالتعويض عن $a = 4$ في (١) أو (٢) نجد أن $b = -6$

بالتعويض عن $a = 4, b = -6$ في أى من المعادلات المعطاة نحصل على قيمة $c = 3$.

أى أن $a = 4, b = -6, c = 3$

تحقيق : $3(4) + 2(-6) + 5(3) = 15, 15 = 15, 7(4) - 3(-6) + 2(3) = 52, 52 = 52$
 $5(4) + (-6) - 4(3) = 2, 2 = 2.$

المتباينات :

١ - ٣١ عبر بالكلمات عن معنى مايل :

(أ) $N > 30$ أكبر من 30

(ب) $X \leq 12$ أقل من أو تساوى 12

(ج) $0 < p \leq 1$ أكبر من الصفر وأقل من أو تساوى الواحد

(د) $\mu - 2t < X < \mu + 2t$ أكبر من $\mu - 2t$ وأقل من $\mu + 2t$

١ - ٣٢ ترجم مايل إلى رموز

(أ) المتغير X يأخذ فيما بين 5,2 بما فى ذلك 5,2 : $2 \leq X \leq 5$

(ب) الوسط الحسابى \bar{X} أكبر من 28.42 ولكن أقل من 31.56 : $28.42 < X < 31.56$

(ج) مقدار موجب أقل من أو يساوى 10 : $0 < m \leq 10$

(د) P مقدار غير سالب : $P \geq 0$

١ - ٣٣ باستخدام رموز المتباينات رتب الأرقام 3.42, -0.6, -2.1, 1.45, -3

(أ) ترتيباً تصاعدياً حسب قيمها

(ب) ترتيباً تنازلياً حسب قيمها

الحل :

(أ) $-3 < -2.1 < -0.6 < 1.45 < 3.42$

(ب) $3.42 > 1.45 > -0.6 > -2.1 > -3$

لاحظ أنه عند تعيين الأرقام كنتقط على خط (أنظر المسألة ١ - ١٨) فإنها تزايد من اليسار إلى اليمين .

١ - ٣٤ في كل مايلي أوجد المتباينة المقابلة في X . بمعنى حل كل متباينة في X

$$(أ) \quad 2X < 6 \quad \text{اقسم الطرفين على 2 لنحصل على } X < 3$$

$$(ب) \quad 3X - 8 \geq 4 \quad \text{بإضافة 8 على كلا الطرفين } 3X \geq 12 \quad \text{اقسم الطرفين على 3 لنحصل على } X \geq 4$$

$$(ج) \quad 6 - 4X < -2 \quad \text{بإضافة 6 - على كلا الطرفين } -4X < -8 \quad \text{وبقسمة الطرفين على 4 - نحصل على } X > 2$$

لاحظ أنه كما في المعادلات يمكن نقل حد من طرف إلى آخر من أطراف المتباينة مع تغيير إشارة الحد المنقول .

مثال الجزء (ب)

$$(د) \quad 3 < \frac{X-5}{2} < 3 \quad \text{بالضرب في 2 ، } -6 < X-5 < 6$$

$$\text{بإضافة 5 . } -1 < X < 11$$

$$(هـ) \quad -1 < \frac{3-2X}{5} < 7 \quad \text{بالضرب في 5 ، } -5 \leq 3-2X \leq 35$$

$$\text{بإضافة 3 - نحصل على } -8 \leq -2X \leq 32 \quad \text{بالقسمة}$$

$$\text{على } 2 - \text{ نحصل على } -16 \leq X \leq 4 \quad \text{أو } 4 \geq X \geq -16$$

اللوغاريتمات والأعداد المقابلة للوغاريتمات :

١ - ٣٥ حدد العدد البياني للوغاريتمات المعتادة (الأساس 10) لسكل من الأرقام التالية :

(أ) 57	(ب) 57.4	(ج) 5.63	(د) 35.63	(هـ) 982.5	(و) 7824	(ز) 186000	(ط) 0.7314	(ك) 0.0071
(ب) 57.4	(د) 35.63	(و) 7824	(ز) 186000	(ط) 0.7314	(ك) 0.0071	(ل) 0.0003	(ي) 0.0325	(ج) 0.71

الحل :

(أ) 1	(ب) 1	(ج) 0	(د) 1	(هـ) 2	(و) 3	(ز) 5	(ط) 9-10	(ك) 7-10
(ب) 1	(د) 1	(و) 3	(ز) 5	(ط) 9-10	(ك) 7-10	(ل) 6-10	(ي) 8-10	(ج) 9-10

١ - ٣٦ تحقق من اللوغاريتمات التالية :

$$(أ) \quad \log 87.2 = 0.9405 \quad \text{الجزء العشري} = 0.9405 \quad \text{العدد البياني} = 1 \quad \text{وهذا يكون } \log 87.2 = 1.9405$$

$$(ب) \quad \log 37.300 = 4.5717 \quad (د) \quad \log 9.21 = 0.9643$$

$$(ج) \quad \log 753 = 2.8768 \quad (هـ) \quad \log 54.50 = 1.7364$$

(و) $\log 0.382$ الجزء العشري = 0.5821 ، العدد البياني = وهذا يكون 10 - 9.5821 = $\log 0.382$

(ز) $\log 0.00159 = 7.2014 - 10$ (ط) $\log 0.000827 = 6.9175 - 10$

(ح) $\log 0.0753 = 8.8768 - 10$ (ى) $\log 0.0503 = 8.7016 - 10$

(ك) $\log 4.638$ الجزء العشري لـ $\log 4638$ هو 0.8 من المسافة بين الجزء العشري لـ $\log 4630$

والجزء العشري لـ $\log 4640$

الجزء العشري لـ $\log 4640 = 0.6665$

الجزء العشري لـ $\log 4630 = 0.6656$

الفرق الجدول = 0.0009

الجزء العشري $\log 4.638 = 0.6656 + (0.00009)(0.8)$

$0.6663 =$

إلى أربعة أرقام عشرية

وبهذا يكون $\log 4.638 = 0.6663$

وهذه العملية تسمى الاستكمال الخطي

وإذا رغبتنا ، فإن خانة الفروق في الجدول صفحة ٥٣٦ و ٥٣٧ من الممكن استخدامها لإيجاد الجزء العشري مباشرة
(7 + 6656)

(ل) $\log 6.753 = 0.8295 (8293 + 2)$ (ع) $\log 0.2548 = 9.4062 - 10 (4048 + 14)$

(م) $\log 183.2 = 2.2630 (2625 + 5)$ (ف) $\log 0.04372 = 8.6407 - 10 (6405 + 2)$

(ن) $\log 43.15 = 1.6350 (6345 + 5)$ (ص) $\log 0.009848 = 7.9933 - 10 (9930 + 3)$

(س) $\log 876.400 = 5.9427 (9425 + 2)$ (ق) $\log 0.0001788 = 6.2524 - 10 (2504 + 20)$

٣٧ - ١ تحقق من الأعداد المقابلة للوغاريتمات

(أ) $\text{antilog } 1.9058$

من الجدول فإن الجزء العشري 0.9058 يقابل الرقم 805 . وبما أن العدد البياني هو 1 ، فإن العدد به رقمان قبل

العلامة العشرية وهذا يكون العدد المطلوب هو 80.5 أى $\text{antilog } 1.9058 = 80.5$

(ب) $\text{antilog } 3.8531 = 7130$ ، $\text{antilog } 2.1875 = 154$ ، $\text{antilog } 0.4997 = 3.16$

$\text{antilog } 4.9360 = 86300$

(ج) $\text{antilog } 7.8657 = 10$

من الجدول فإن الجزء العشري 0.8657 يقابل الرقم 734 . وحيث أن العدد البياني هو 10 - 7 فإن الرقم

يحتوى على صفرين تالين مباشرة للعلامة العشرية . وهذا يكون الرقم المطلوب هو 0.00734

أى $0.00734 = 10 - 7.8657$

وإذا رغبتنا ، فإن خانة الفروق في الجدول صفحة ٥٣٦ ، ٥٣٧ من الممكن استخدامها لإيجاد الجزء العشري

مباشرة

$$\text{antilog } 2.3927 = 0.0247, \text{ antilog } 9.8267 - 10 = 0.671, (د)$$

$$\text{antilog } 9.3842 - 10 (هـ) \text{ antilog } 7.7443 - 10 = 0.00555$$

وبما أن الجزء العشري غير موجود بالجداول فإننا نلجأ إلى الاستكمال :

$$\begin{array}{lll} 0.3842 = & \text{الجزء العشري المعطى} & \log 2430 = 0.3856 \\ 0.3838 = & \text{الجزء العشري التالي في الصغر} & \log 2420 = 0.3838 \\ 0.0004 = & \text{الفرق} & 0.0018 = \text{الفرق الجدول} \end{array}$$

$$\text{وهذا } 2422 = 2420 + (4/18)(2430 - 2420) \text{ إلى أربعة أرقام ويكون الرقم المطلوب هو } 2422$$

$$\begin{array}{lll} \text{antilog } 2.6715 = 469.3 & (3/9 \times 10 = 3 \text{ approx.}) & \\ \text{antilog } 4.1853 = 15.320 & (6/28 \times 10 = 2 \text{ approx.}) & (و) \\ \text{antilog } 0.9245 = 8.404 & (2/5 \times 10 = 4) & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{antilog } 1.6089 = 0.4064 & (4/11 \times 10 = 4 \text{ approx.}) & \\ \text{antilog } 8.8907 - 10 = 0.07775 & (3/6 \times 10 = 5) & (ز) \\ \text{antilog } 1.2000 = 15.85 & (13/27 \times 10 = 5 \text{ approx.}) & \end{array}$$

الحسابات باستخدام اللوغاريتمات :

أحسب كلا مما يلي باستخدام اللوغاريتمات :

$$P = (3.81)(43.4) \log P = \log 3.81 + \log 43.4 \quad ٢٨ - ١$$

$$\log 3.81 = 0.5809$$

$$(+)\log 43.4 = 1.6375$$

$$\log P = 2.2184$$

$$P = \text{antilog } 2.2184 = 165.3 \text{ إذن}$$

أو 165 إلى ثلاثة أرقام معنوية لاحظ الدلالة الآسية للحساب حيث

$$(3.81)(43.4) = (10^{0.5809} \times 10^{1.6375}) = 10^{0.5809 + 1.6375} = 10^{2.2184} = 165.3$$

$$\log P = \log 73.42 + \log 0.004620 + \log 0.5143 \quad P = (73.42)(0.004620)(0.5143) \quad ٢٩ - ١$$

$$\begin{array}{lll} \log 73.42 & = & 1.8658 \\ (+)\log 0.004620 & = & 7.6646 - 10 \\ (+)\log 0.5143 & = & 9.7112 - 10 \\ \log P & = & 19.2416 - 20 = 9.2416 - 10 \end{array}$$

$$P = 1744 \text{ إذن}$$

$$P = \sqrt{\frac{(874.3)(0.03816)(28.53)^3}{(1.754)^4 (0.007352)}}$$

٤٥ - ١

$$\begin{array}{rcl} \log 874.3 & = & 2.9417 \\ \log 0.03816 & = & 8.5816 - 10 \\ 3 \log 28.53 & = & 3(1.4553) = 4.3659 \\ \text{Add:} & & \underline{15.8892 - 10} \\ & & (-) \quad \underline{8.8424 - 10} \\ & & \hline & & 7.0468 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 4 \log 1.754 & = & 4(0.2440) = 0.9760 \\ \log 0.007352 & = & 7.8664 - 10 \\ \text{Add:} & & \underline{8.8424 - 10} \end{array}$$

Then $\log P = \frac{1}{2}(7.0468) = 3.5234$, and $P = 3338$.

مسائل اضافية

المتغيرات :

٤٦ - ١ حدد أى من البيانات التالية تمثل بيانات متقطعة وأياً منها تمثل بيانات متصلة :

- (أ) عدد مليمترات الأمطار الساقطة على مدينة ما خلال أشهر السنة المختلفة .
- (ب) سرعة سيارة بالكيلومترات / ساعة .
- (ج) عدد أوراق النقد فئة £ 5 المتداولة بالمملكة المتحدة في فترة ما .
- (د) القيمة الإجمالية للأسهم المباعة يومياً في سوق الأوراق المالية .
- (هـ) عدد الطلبة المسجلين بجامعة على مدار عدد من السنين .

الحل : (أ) متصلة (ب) متصلة (ج) متقطعة (د) متقطعة (هـ) متقطعة .

٤٧ - ١ وضع مجال كل من المتغيرات التالية وحدد أياً من هذه المتغيرات متصل وأى منها متقطع .

- (أ) العدد W من كيلوجرامات القمح التى ينتجها الفدان في مزرعة على مدار عدد من السنين .
- (ب) العدد N للأفراد في عائلة .
- (ج) الحالة الاجتماعية لشخص .
- (د) الزمن t لطيران صاروخ .
- (هـ) العدد P لبتلات في زهرة .

الحل :

- (أ) الصفر وما بعده ، متصل (ب) $2, 3, \dots$ متقطعة .
- (ج) أعزب ، متزوج ، مطلق ، منفصل ، أرمل ، متقطعة .
- (د) الصفر وما بعده ، متصل .
- (هـ) $0, 1, 2, \dots$ متقطعة .

تقريب البيانات ، الرموز العلمية والأرقام المعنوية :

١ - ٨ : قرب الأرقام التالية إلى درجة البتة المشار إليها :

أقرب مئة	3256 (أ)	أقرب مئة	3 502 378 (و)	أقرب مليون
أقرب نسبة من العشرة	5.781 (ب)	أقرب نسبة من العشرة	148.475 (ز)	أقرب وحدة
أقرب نسبة من ألف	0.0045 (ج)	أقرب نسبة من ألف	0.000 098 501 (ح)	أقرب نسبة من المليون
أقرب نسبة من مئة	46.7385 (د)	أقرب نسبة من مئة	2184.73 (ط)	أقرب عشرة
إلى رقمين عشريين	125.9995 (هـ)	إلى رقمين عشريين	43.875 00 (ي)	أقرب نسبة من المئة

الحل :

(أ) 3300 (ب) 5.8 (ج) 0.004 (د) 46.74 (هـ) 126.00 (و) 4000 000 (ز) 148
(ح) 0.000 099 (ط) 2180 (ي) 43.88

٢ - ٩ : عبر عن الأرقام التالية بدون استخدام قوى الرقم 10

(أ) 132.5×10^4 (ب) 418.72×10^{-5} (ج) 280×10^{-7} (د) 7300×10^6 (هـ) 3.487×10^{-4}
(و) 0.0001850×10^5

الحل :

(أ) 1325000 (ب) 0.004 187 2 (ج) 0.000 028 0 (د) 7 300 000 000 (هـ) 0.000 3487
(و) 18.50

١ - ١٠ : ما هو عدد الأرقام المعنوية في الأرقام التالية إذا افترضنا أن الأرقام قد سجلت بدقة :

(أ) 2.54 mm (د) 3.51 million litres (و) 378 people (ح) 4.50×10^{-3} km
(ب) 0.004 500 m (هـ) 10.000 100 m (ز) 378 g (ط) 500.8×10^3 kg
(ج) 3 510 000 litres (ي) 100.00 km

الحل : (أ) 3 (ب) 4 (ج) 7 (د) 3 (هـ) 8 (و) غير محدد (ز) 3 (ح) 3
(ط) 4 (ي) 5

١ - ١١ : ما هو الحد الأقصى للخطأ في القياسات التالية إذا افترضنا أنها مسجلة بدقة ؟ حدد عدد الأرقام المعنوية لكل رقم في كل حالة .

(أ) 7.20 million litres (ج) 5280 metres (هـ) 186 000 metres per second
(ب) 0.000 048 35 millimetres (د) 3.0×10^4 metres (و) 186 thousand metres per second

الحل :

- (أ) 0.005 million or 5000 litres; 3 (ب) 0.5 m; 4 (ج) 0.5 m/s; 6 (د) 0.000 000 005 or 5×10^{-9} mm; 2 (هـ) 0.05 $\times 10^8$ or 5×10^8 m; 2 (و) 0.5 thousand or 500 m/s; 3 (ز) 0.05 $\times 10^8$ or 5×10^8 m; 2

١ - ٥٧ اكتب الأرقام التالية باستخدام الرموز العلمية ، مفترضاً أن جميع الأرقام معنوية إلا إذا ذكر غير ذلك .

- (أ) 0.000317 (ب) 428 000 000 (أربعة أرقام معنوية)
(ج) 21 600.00 (د) 0.000 009810
(هـ) 732 ألف (و) 18.0 عشر ألف

الإجابة :

- (أ) 3.17×10^{-4} (ب) 4.280×10^8 (ج) $2.160 000 \times 10^8$ (د) 9.810×10^{-6}
(هـ) 7.32×10^5 (و) 1.80×10^{-3}

العمليات الحسابية :

١ - ٥٢ وضع أن (أ) حاصل ضرب (ب) حاصل قسمة ، الرقبن 5.16 ، 72.48 مفترضاً أن أرقامها المعنوية هي أربعة وثلاثة على التوالي لا يمكن أن يكون دقيقاً لأكثر من ثلاثة أرقام معنوية ، اكتب ناتج الضرب وناتج القسمة للدرجة الدقة المسجلة .

- الإجابة : (أ) 374 (ب) 14.0

١ - ٥٤ أجر العمليات الموضحة أدناه . مفترضاً أن الأرقام مسجلة بدقة عالم يذكر خلاف ذلك

- (أ) 0.36×781.4 (ب) $5.78 \times 2700 \times 16.00$ (ج) $\sqrt{120 \times 0.5386 \times 0.4614}$ (120 exact)
(د) $\frac{873.00}{4.881}$ (هـ) $\frac{0.00480 \times 2300}{2084}$ (و) $\frac{(316.000)(0.000187)}{\sqrt{73.84}}$

- (ز) $14.8681 + 4.48 - 8.168 + 0.36125$

- (ح) $4173000 - 170264 + 1820470 - 78320$ الأرقام مسجلة بدقة إلى 4, 6, 6, 6 رقماً معنوياً

- (ط) $\sqrt{\frac{7(4386)^2 - 3(647)^2}{6}}$ الأرقام 3, 6, 7 أرقام دقيقة (ي) $4120 \sqrt{\frac{3.1416(9.483)^2 - (5.075)^2}{0.0001980}}$

الإجابة :

(a) 280 (two sig. fig.), or 2.8 hundred, or 2.8×10^2 . (b) 178.9. (c) 250 000 (three sig. fig.), or 250 thousand, or 2.5×10^5 . (d) 53.0. (e) 5.461. (f) 9.05. (g) 11.54 (h) 5 745 000 (four sig. fig.), or 5 745 thousand, or 5.745 million, or 5.745×10^6 . (i) 1.2. (j) 4157

٢٠ - احسب قيمة كل مما يلي إذا كانت $U = -2, V = \frac{1}{2}, W = 3, X = -4, Y = 9, Z = \frac{1}{3}$ حيث يفترض أن جميع الأرقام دقيقة .

$$\begin{array}{llll} \frac{X-3}{\sqrt{(Y-4)^2 + (U-5)^2}} & (ح) & \sqrt{U^2 - 2UV + W} & (أ) \quad 4U + 6V - 2W \quad (أ) \\ X^2 + 5X^2 - 6X - 8 & (ط) & 3X(4Y - 3Z) - 2Y(6X - 5Z) - 25 & (و) \quad \frac{XYZ}{UVW} \quad (ب) \\ \frac{U-V}{\sqrt{U^2 + V^2}} [U^2V(W+X)] & (ى) & \sqrt{\frac{(W-2)^2}{V} + \frac{(Y-5)^2}{Z}} & (ز) \quad \frac{2X-3Y}{UW \cdot XV} \quad (ج) \\ & & & 3(U-X)^2 + 1 \quad (د) \end{array}$$

الإجابة :

$$\begin{array}{llll} -7/\sqrt{34}, \text{ or } -1.20049 \text{ approx.} & (ح) & 3 & (أ) \quad -11 \quad (أ) \\ 32 & (ط) & -16 & (و) \quad 2 \quad (ب) \\ 10/\sqrt{17}, \text{ or } 2.42536 \text{ approx.} & (ى) & \sqrt{98}, \text{ or } 9.89961 \text{ approx.} & (ز) \quad 35/8 \text{ or } 4.375 \quad (ج) \\ & & & 21 \quad (د) \end{array}$$

التمارين : الجداول والأشكال البيانية :

٢١ - ٥٩ : تتحدد قيمة المتغير Y من قيمة المتغير X طبقاً للمعادلة $Y = 10 - 4X$

- (أ) أوجد قيمة Y إذا أخذت X القيم $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ X أظهر هذه النتائج في جدول
- (ب) أوجد قيمة Y إذا أخذت X القيم $-2.4, -1.6, -0.8, 1.8, 2.7, 3.5, 4.6$
- (ج) إذا كان اعتماد Y على X يعبر عنه بالعلاقة $Y = F(X)$ أوجد $F(2.8), F(-5), F(\sqrt{2}), F(-\pi)$
- (د) ماهي قيمة X المقابلة لقيم Y المساوية لـ $Y = -2, 6, -10, 1.6, 16, 0, 10$ ؟
- (هـ) عبر عن X كدالة صريحة في Y .

الإجابة :

$$\begin{array}{ll} -1.2, 30, 10 - 4\sqrt{2} = 4.34 \text{ approx.}, 10 + 4\pi = 22.57 \text{ approx.} & (ج) \quad 22, 18, 14, 10, 6, 2, -2, -6, -10 \quad (أ) \\ X = \frac{1}{4}(10 - Y) & (هـ) \quad 3, 1, 5, 2.1, -1.5, 2.5, 0 \quad (د) \quad 19.6, 16.4, 13.2, 2.8, -0.8, -4, -8.4 \quad (ب) \end{array}$$

٦٠ - ٥٧ : إذا كانت $Z = X^2 - Y^2$ أوجد قيمة Z عندما :

$$\begin{array}{ll} X = 1, Y = 5 & (ب) \quad X = -2, Y = 3 \quad (أ) \\ Z = F(X, Y) & \text{أوجد } F(-3, -1) \quad (ج) \\ & \text{الإجابة :} \quad (أ) \quad -5 \quad (ب) \quad -24 \quad (ج) \quad 8 \end{array}$$

١ - ٥٨ إذا كانت $W = 3XZ - 4Y^2 + 2XY$ أوجد W عندما (أ) $X = 1, Y = -2, Z = 4$

(ب) $X = -5, Y = -2, Z = 0$ إذا استخدمنا الرمز التالي $W = F(X, Y, Z)$ أوجد $F(3, 1, -2)$

الإجابة : (أ) -8 (ب) 4 (ج) -16

١ - ٥٩ عين باستخدام نظام الاحداثيات المتعامدة النقط التي احداثياتها :

(أ) $(3, 2)$ (ب) $(2, 3)$ (ج) $(-4, 4)$ (د) $(4, -4)$

(هـ) $(-3, -2)$ (و) $(-2, -3)$ (ز) $(-4.5, 3)$ (ح) $(-1.2, -2.4)$

(ط) $(0, -3)$ (ي) $(1.8, 0)$

١ - ٦٠ عبر بيانياً عن المعادلات (أ) $y = 10 - 4x$ (أنظر المسألة ١ - ٥٦)

(ب) $y = 2x + 5$ (ج) $y = \frac{1}{3}(x-6)$ (د) $2x + 3y = 12$ (هـ) $3x - 2y = 6$

١ - ٦١ عبر بيانياً عن المعادلات (أ) $y = 2x^2 + x - 10$ (ب) $y = 6 - 3x - x^2$

١ - ٦٢ عبر بيانياً عن المعادلة $y = x^3 - 4x^2 + 12x - 6$

١ - ٦٣ الجدول التالي يوضح عدد العاملين بالزراعة وغير العاملين بها بالولايات المتحدة الأمريكية في الأعوام 1840 - 1950

عبر بيانياً عن هذه البيانات باستخدام (أ) الخطوط البيانية (ب) خرائط الأعمدة البيانية

(ج) خرائط الأعمدة البيانية المخرزة .

السنة	1840	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950
المهال الزراعيين (بالمليون)	3.7	4.9	6.2	6.9	8.6	9.9	10.9	11.6	11.4	10.5	8.8	6.8
المهال غير الزراعيين (بالمليون)	1.7	2.8	4.3	6.1	8.8	13.4	18.2	25.8	31.0	38.4	42.9	52.2

المصدر : مصلحة التجارة ، مكتب التعدادات

١ - ٦٤ رسم تصويرياً ملائماً لإظهار التغيرات في أعداد

(أ) العمال الزراعيين (ب) العمال غير الزراعيين

في بيانات المسألة السابقة . هل يمكنك تصميم رسم تصويري يظهر التغيرات في كل من (أ) ، (ب) معاً ؟ .

١ - ٦٥ باستخدام بيانات المسألة ١ - ٦٢ ارسم شكلاً بيانياً يوضح النسب المئوية للعاملين

(أ) الزراعيين (ب) غير الزراعيين . هل يمكنك تصميم شكل بياني يظهر كلا من (أ) ، (ب) في نفس الوقت ؟

١ - ٦٦ الجدول التالي يظهر معدل المواليد والوفيات لكل 1000 من السكان بالولايات المتحدة في الأعوام 1915 و 1955 عبر بياناً من هذه البيانات باستخدام شكل بياني مناسب .

السنة	1915	1920	1925	1930	1935	1940	1945	1950	1955
معدل المواليد لكل 1000 من السكان	25.0	23.7	21.3	18.9	16.9	17.9	19.5	23.6	24.6
معدل الوفيات لكل 1000 من السكان	13.2	13.0	11.7	11.3	10.9	10.8	10.6	9.6	9.3

المصدر : مصلحة الصحة والتعليم والخدمات

١ - ٦٧ الجدول التالي يبين ارتفاعات أهل سبعة مباني ومنشآت في العالم . ارسم هذه البيانات مستخدماً شكلاً بيانياً مناسباً .

المكان	الارتفاع بالأمتار	المبنى أو المنشأة
نيويورك	381	مبنى « الأمبير ست »
نيويورك	319	مبنى « كريس لر »
باريس	300	برج إيفل
نيويورك	290	مبنى « وول ستريت »
نيويورك	283	بنك مانهاتن
نيويورك	259	مبنى « R.C.A. مركز روكفلر »
نيويورك	241	مبنى « وولورث »

٦٨ - ١ الجدول التالي يظهر السرعة المدارية لكواكب المجموعة الشمسية . ارسم هذه البيانات :

بلوتو	نبتون	أورانوس	زحل	المشتري	المريخ	الأرض	الزهرة	عطارد	الكوكب
4.8	5.5	6.8	9.7	13.0	24.1	29.8	35.1	47.8	السرعة (km/s)

٦٩ - ١ الجدول التالي يبين الحالة الاجتماعية للذكور والإناث (14 سنة فأكثر) بالولايات المتحدة في عام 1958 . عبر عن هذه البيانات بيانياً باستخدام رسمين دائريين لهما نفس القطر

الإنث (نسبة مئوية من المجموع)	الذكور (نسبة مئوية من المجموع)	الحالة الاجتماعية
18.8 66.0 12.8 2.3	24.5 69.8 3.9 1.8	أعزب متزوج أرسل مطلق

المصدر : مكتب التعداد .

٧٠ - ١ الجدول التالي يبين المساحة بـ ١٠٠ مليون كيلومتر المربعة لمحيطات العالم .
ارسم هذه البيانات مستخدماً : (أ) الأعمدة البيانية (ب) الرسوم الدائرية .

المحيط	المهادى	الأطلنطى	الهندي	القطبي الجنوبي	القطبي الشمالي
المساحة مليون km ²	183.4	106.7	73.8	19.7	12.4

المعادلات :

٧١ - ١ حل المعادلات التالية :

$$3(2(X + 1) - 4) = 10 - 5(4 - 2X) \quad (أ) \quad 4(X - 3) - 11 = 15 - 2(X + 4) \quad (ب) \quad 16 - 5c = 36 \quad (أ)$$

$$\frac{3}{4}(12 + Y) = 6 - \frac{1}{4}(9 - Y) \quad (د) \quad 3(2U + 1) = 5(3 - U) + 3(U - 2) \quad (د) \quad 2Y - 6 = 4 - 3Y \quad (ب)$$

$$\text{الحل : } (أ) -4 \quad (ب) 2 \quad (ج) 5 \quad (د) \frac{3}{4} \quad (أ) 1 \quad (د) -7$$

٧٢ - ١ حل كل من مجموعة المعادلات الآتية التالية :

$$\left. \begin{array}{l} 5A - 9B = -10 \\ 3A - 4B = 16 \end{array} \right\} (د) \quad \left. \begin{array}{l} 8X - 3Y = 2 \\ 1X + 7Y = -9 \end{array} \right\} (ج) \quad \left. \begin{array}{l} 3a + 5b = 24 \\ 2a + 3b = 14 \end{array} \right\} (ب) \quad \left. \begin{array}{l} 2a + b = 10 \\ 7a - 3b = 9 \end{array} \right\} (أ)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3U - 5V + 6W = 7 \\ 5U + 3V - 2W = -1 \\ 4U - 8V + 10W = 11 \end{array} \right\} (ز) \quad \left. \begin{array}{l} 5X + 2Y + 3Z = -5 \\ 2X - 3Y - 6Z = 1 \\ X + 5Y - 4Z = 22 \end{array} \right\} (د) \quad \left. \begin{array}{l} 2a + b - c = 2 \\ 3a - 4b + 2c = 4 \\ 4a + 3b - 5c = -8 \end{array} \right\} (أ)$$

الحل :

$$X = -0.2, Y = -1.2 \quad (ج) \quad a = -2, b = 6 \quad (ب) \quad a = 3, b = 4 \quad (أ)$$

$$4 = 184/7 = 26.28571 \text{ approx.}, B = 110/7 = 15.71429 \text{ approx.} \quad (د)$$

$$U = 0.4, V = -0.8, W = 0.3 \quad (ز) \quad X = -1, Y = 3, Z = -2 \quad (د) \quad a = 2, b = 3, c = 5 \quad (أ)$$

٧٣ - ١ (أ) عبر بياناً عن المعادلات $5x + 2y = 4$ and $7x - 4y = 23$ مستخدماً نفس الأحاديث.

(ب) من الرسم أوجد الحل الآتي للمعادلتين .

(ج) استخدم نفس الطريقة للحصول على الحل الآتي للمعادلات (أ) - (د) بالمسألة ٧٢ - ١ .

$$\text{الحل : } (ب) (2, -3), \text{ i.e. } x = 2, y = -3$$

٧٤ - ١ (أ) استخدم الرسم البيانى للمسألة ١١ - ١ (أ) لإيجاد حل المعادلة $2x^2 + x - 10 = 0$ (ملحوظة : أوجد قيمة x من تقاطع القطع المكافئ مع محور x أي عندما $y = 0$).(ب) استخدم الطريقة الموضحة في (أ) لإيجاد حل المعادلة $3x^2 - 4x - 5 = 0$.

$$\text{الحل : } (أ) 2, -2.5 \quad (ب) \text{ (تقريباً) } 2.1, -0.8$$

٧٥ - ١ حل المعادلة من الدرجة الثانية $ax^2 + bx + c = 0$ معطى بصيغة الدرجة الثانية $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

استخدم هذه الصيغة لإيجاد حل

(ب) $2x^2 + x - 10 = 0$

(أ) $3x^2 - 4x - 5 = 0$

(د) $x^2 + 8x + 25 = 0$

(ج) $5x^2 - 10x - 7 = 0$

الحل (أ) $\frac{4 \pm \sqrt{76}}{6}$ or 2.12 and -0.79 approx (ب) $2, -2.5$ (ج) (تقريباً) $0.549, -2.549$

(د) $\frac{-8 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{36} \sqrt{-1}}{2} = \frac{-8 \pm 6\sqrt{-1}}{2} = -4 \pm 3\sqrt{-1} = -4 \pm 3i$

حيث $\sqrt{-1} = i$ هذه الجذور هي أرقام مركبة ولن تظهر إذا استخدمنا الرسوم البيانية .

المتباينات :

٧٦ - ١ باستخدام رموز المتباينات رتب الأعداد $1.5, -1.52, 2.37, 1.52, -4.3, -6.15$ حسب قيمها (أ) ترتيباً تصاعدياً (ب) ترتيباً تنازلياً .

الحل (أ) $2.37 > 1.52 > -1.5 > -4.3 > -6.15$ (ب) $-6.15 < -4.3 < -1.5 < 1.52 < 2.37$

٧٧ - ١ استخدم رموز المتباينات للتعبير عن الجمل التالية

(أ) عدد الأطفال N يقع بين 30 , 50 متضمناً العددين 30 , 50

(ب) المجموع S لعدد النقاط التي تظهر على زهرق طاولة لا يقل عن 7

(ج) X أكبر من أن يساوي 4 - ولكن أقل من 3

(د) أقصى قيمة لـ P هي 5

(هـ) X لا تزيد عن Y بأكثر من 2

الحل : (أ) $30 \leq N \leq 50$ (ب) $S \geq 7$ (ج) $4 \leq X < 3$ (د) $P \leq 5$ (هـ) $X - Y > 2$

٧٨ - ١ حل كل من المتباينات التالية :

(أ) $3x \geq 12$ (ب) $3 + 5(Y - 2) \leq 7 - 3(4 - Y)$ (ج) $3 + \frac{1}{2}(a - 12) < 8$ (د) $-2 \leq 3 + \frac{1}{2}(a - 12) < 8$

(ب) $4x < 5x - 3$ (ج) $-3 \leq \frac{1}{2}(2x - 1) \leq 3$ (د) $-3 \leq \frac{1}{2}(2x - 1) \leq 3$

(ج) $2N - 15 > 10 + 3N$ (د) $0 < 4(15 - 5N) \leq 12$ (هـ) $0 < 4(15 - 5N) \leq 12$

الحل : $a < 22$ (ز) $2 \leq a < 22$ (ح) $1.8 \leq N < 3$ (ط) $1.8 \leq N < 3$ (ي) $8 \leq X \leq 7$ (ك) $1 \leq Y \leq 5$ (ل) $N < 5$ (م) $X > 3$ (ن) $X \geq 4$

اللوغاريتمات :

٧٩ - أوجد اللوغاريتم المتباد لكل من الأعداد التالية :

$$\begin{array}{llllll} (أ) 387 & (ب) 0.387 & (ج) 0.0792 & (د) 14630 & (هـ) 0.6042 & (ز) 476.3 \\ (ك) 0.00098 & (ط) 7.146 & (ي) 71.46 & (ل) 84.620000 & (ح) 1.007 & (و) 0.002795 \end{array}$$

الحل :

$$\begin{array}{llllll} (أ) 2.5877 & (ب) 10 & (ج) 8.8987 - 10 & (د) 4.1653 & (هـ) 9.7817 - 10 & (ز) 2.6779 \\ (ك) 6.9912 - 10 & (ط) 0.8541 & (ي) 1.8541 & (ل) 7.9275 & (ح) 0.0030 & (و) 7.4464 - 10 \end{array}$$

٨٠ - أوجد العدد المقابل للوغاريتم الأعداد التالية :

$$\begin{array}{llllll} (أ) 3.5611 & (ب) 9.8293 - 10 & (ج) 1.7045 & (د) 8.9266 - 10 & (هـ) 2.4700 & (ز) 2.8003 \\ (ط) 0.0800 & (ي) 6.3841 & (ح) 3.7072 & (و) 6.4700 - 10 & (ك) 1.202 & (ل) 2.422000 \end{array}$$

الحل :

$$\begin{array}{llllll} (أ) 3640 & (ب) 0.675 & (ج) 50.64 & (د) 0.08445 & (هـ) 295.1 & (ز) 0.06314 \\ (ك) 1.202 & (ط) 0.01873 & (ي) 3.781 & (ل) 2.422 \times 10^6 \text{ or } 2.422 \times 10^6 & (ح) 5096 & (و) 0.0002951 \end{array}$$

٨١ - احسب قيمة ما يلي باستخدام اللوغاريتمات

$$\begin{array}{llll} (أ) (783.6)(1634) & (ب) \frac{(0.3854)^4 (12.48)^2}{(0.04382)^3} & (ج) \sqrt[3]{(21.63)(33.81)(47.53)(65.28)(87.47)} & (د) \frac{21.7}{378.2} \\ (ب) \frac{21.7}{378.2} & (ج) \frac{(0.04556)(624.1)}{(14.32)(0.003572)} & (د) (1.562)^{15} & (هـ) \frac{3.781}{0.01873} \sqrt{\frac{(43.25)(0.08743)}{(0.002356)(6.824)}} \\ (و) 0.04182 \sqrt{0.6758} & (ز) \sqrt[3]{3728} & (ي) \frac{3.781}{0.01873} \sqrt{\frac{(43.25)(0.08743)}{(0.002356)(6.824)}} & (ل) \frac{3.781}{0.01873} \sqrt{\frac{(43.25)(0.08743)}{(0.002356)(6.824)}} \end{array}$$

الحل :

$$\begin{array}{llll} (أ) 1296000 \text{ أو } 1.296 \times 10^6 & (ب) 0.05739 \text{ أو } 0.0574 & (ج) 556.0 & (د) 804.4 \\ (هـ) 40820 & (و) 0.03438 & (ز) 15.51 & (ح) 45.67 \\ (ط) 4.519 \times 10^{-4} & (ي) 3096 & (ل) 4.52 \times 10^{-4} & (ك) 556.0 \end{array}$$

٨٢ - ارم (أ) $y = \log x$ (ب) $y = 10^x$. ناقش التشابه بين الشكلين .

(أ)

٨٢-١ أكتب المعادلة (أ) $2 \log X - 3 \log Y = 2$ (ب) $\log Y + 2X = \log 3$ بصورة خالية من اللوغاريتمات

الحل : (أ) $X^2 = 100Y^3$ (ب) $Y = 3(10^{-2x})$

٨٤-١ إذا كانت $a^p = N$ ، حيث a ، p أرقام موجبة ، $a \neq 1$ فإننا نسمي p لوغاريتم N للأساس a ونكتب

$p = \log_a N$ احسب :

(أ) $\log_2 8$ (ب) $\log_{25} 125$

(ج) $\log_4 1/16$ (د) $\log_{1/2} 32$

(هـ) $\log_3 1$

الحل :

(أ) 3 (ب) 3/2 (ج) -2 (د) -5 (هـ) 0

٨٥-١ اشرح أن $\log_e N = 2.303 \log_{10} N$ تقريباً ، حيث $e = 2.71828 \dots$ تسمى بالأساس الطبيعي

للوغاريتم حيث $N > 0$.

٨٦-١ اشرح أن $(\log_b a)(\log_a b) = 1$ حيث $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$.

الفصل الثاني

التوزيعات التكرارية

البيانات الخام

البيانات الخام هي بيانات جمعت ولكنها غير منتظمة عددياً . مثال ذلك مجموعة أوزان 100 طالب استخرجت من سجلات جامعة حسب الترتيب الأبجدي لأسمائهم .

المفردات المنظومة

المنظومة هي ترتيب البيانات الرقمية الخام ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً حسب قيمها . الفرق بين الرقم الأكبر والرقم الأصغر يسمى مدى البيانات . على سبيل المثال ، إذا كان أكبر الطلبة وزناً في المائة طالب هو 74 kg وأقلهم وزناً هو 60 kg فإن المدى هو $74 - 60 = 14 \text{ kg}$.

التوزيعات التكرارية

عند تلخيص أعداد كبيرة من البيانات الخام فإنه من المفيد توزيعها على فئات أو طوائف وتحديد عدد الأشخاص الذين ينتمون لكل فئة ويسمى هذا العدد بتكرار الفئة .

الجدول المنظم على صورة فئات يتقابل كل فئة تكرارها يسمى بالتوزيع التكراري أو الجدول التكراري . ويمثل الجدول ١ - ٢ توزيع تكراري لأوزان (مقربة إلى أقرب kg) 100 طالب من طلبة جامعة XYZ .

الفئة أو الطائفة الأولى على سبيل المثال تشمل على الأوزان من 60 kg إلى 62 kg . ويمر بها بالرمز 60 — 62 . وبما أن عدد الطلبة الذين ينتمون إلى هذه الفئة هم 5 طلبة فإن التكرار المقابل لهذه الفئة هو 5 .

جدول ١ - ٢ .

أوزان 100 طالب من طلبة جامعة XYZ

الأوزان (كيلو جرامات)	عدد الطلبة
60-62	5
63-65	18
66-68	42
69-71	27
72-74	8
	100 المجموع

تسمى البيانات المنظمة والمملخصة كما في التوزيع التكراري أعلاه بالبيانات المجمعة وعلى الرغم من أن عملية التجميع تؤدي بشكل عام إلى ضياع كثير من تفصيلات البيانات الأصلية فإن الفائدة الهامة منها هي الصورة العامة التي يمكن الحصول عليها والعلاقات الأساسية التي تظهر بالتالي أكثر وضوحاً .

فترة الفئات وحدود الفئات

الرمز الذي يعبر عن الفئة مثل 62 — 60 في الجدول أعلاه يسمى بفترة الفئة . الرقمان 60 و 62 يسميان حدود الفئة . الرقم الأصغر 60 يسمى الحد للفئة الأدنى والرقم الأكبر 62 يسمى الحد الأعلى للفئة . المصطلح فئة وفترة الفئة يستخدمان في أغلب الأحيان للدلالة على نفس المعنى على الرغم من أن فترة الفئة هي في الحقيقة رمز لفئة . وفترة الفئة التي ، من الناحية النظرية على الأقل ، ليس لها أما حد الفئة الأعلى أو حد الفئة الأدنى تسمى بفترة فئة مفتوحة . على سبيل المثال إذا أخذنا مجموعة أعمار لأشخاص فإن فترة الفئة « 65 سنة فأكثر » هي فترة فئة مفتوحة .

الحدود الحقيقية للفئات

إذا كانت الأوزان سجلت إلى أقرب kg فإن فترة الفئة 62 — 60 تتضمن من الناحية النظرية كل القياسات من 59.5000 ... kg إلى 62.5000 ... kg . هذه الأرقام إذا عبرنا عنها باختصار بالأرقام الصحيحة 59.5 و 62.5 تسمى بالحدود الحقيقية للفئة . الرقم الأصغر 59.5 هو الحد الأدنى الحقيقي للفئة والرقم الأكبر وهو 62.5 هو الحد الأعلى الحقيقي للفئة .

ومن الناحية العملية فإن الحدود الحقيقية للفئة يمكن الحصول عليها بجمع الحد الأعلى لفترة فئة والحد الأدنى لفترة الفئة التالية لها والقسم على 2

في بعض الأحيان تستخدم الحدود الحقيقية للفئات كرمز للفئات . مثال ذلك ، الفئات المختلفة بالعمود الأول في الجدول ١ — ٢ يمكن التعبير عنها بالصورة 62.5 — 65.5 ، 62.5 — 59.5 وهكذا ولتلافى الغموض باستخدام هذه الرموز فإن الحدود الحقيقية للفئات يجب أن لا تتطابق مع أحد القيم الفعلية . فلو كان لدينا القيمة 62.5 فإنه يكون من الصعب تقرير ما إذا كانت تنتمي إلى الفئة 62.5 — 59.5 أو 65.5 — 62.5 .

حجم أول طول فترة الفئة

حجم أول طول فترة الفئة هو الفرق بين الحد الأدنى الحقيقي والحد الأعلى الحقيقي للفئة ويسمى أيضاً طول الفئة ، حجم الفئة أو طول الفئة . إذا كانت جميع الفئات في التوزيع التكراري لها نفس الطول فإن الطول المشترك يرمز له بالرمز c . وفي هذه الحالة فإن c هو الفرق بين الحد الأدنى لفتتين متتاليتين . أو الحد الأعلى لفتتين متتاليتين . مثال ذلك لو أخذنا بيانات الجدول ١ — ٢ فإن طول الفئة هو $62.5 - 65.5 = 59.5 - 62.5 = c$.

مركز الفئة

مركز الفئة هو منتصف فترة الفئة وتحصل عليه بجمع الحد الأدنى والحد الأعلى للفئة وتقسم المجموع على اثنين . فركز الفئة $60-62$ هو $(60 + 62)/2$. ويسمى مركز الفئة أيضا بمنتصف الفئة .

ويهدف مزيد من التحليل الرياضي فإنه يفترض أن جميع القراءات الموجودة داخل فترة فئة تأخذ قيما تتطابق مع مركز الفئة . بهذا فإن جميع الأوزان داخل الفئة $60-62$ kg تعتبر كما لو أنها 61 kg .

قواعد عامة لتكوين التوزيعات التكرارية

- ١ - حدد أكبر قيمة وأقل قيمة في البيانات الخام ومنها أوجد المدى (الفرق بين أكبر رقم وأقل رقم) .
- ٢ - قم المدى إلى عدد مناسب من الفئات المتساوية الطول . إذا لم يكن ذلك ممكنا استخدم فئات ذات أطوال مختلفة أو فئات مفتوحة (أنظر المسألة ٢ - ١٢) . ويأخذ عدد الفئات عادة بين 5, 20 حسب البيانات . وتختار الفئات أيضا بحيث يتفق مركز الفئة مع المشاهدات الفعلية . وهذا يؤدي إلى التقليل من أخطاء التجميع عند إجراء مزيد من المعالجة الرياضية . وعلى أية حال فإن الحدود الحقيقية للفئات يجب ألا تتفق مع بيانات مشاهدة فعلا .
- ٣ - حدد عدد المشاهدات التي تقع في كل فترة فئة . أي حدد تكرار كل فئة . وأحسن طريقة لأداء ذلك هو استخدام كشف الحزم أو النقط (أنظر المسألة ٢ - ٨) .

الدرجات التكرارية والمضلعات التكرارية :

هما طريقتان في الرسم البياني للتعبير عن التوزيعات التكرارية .

١ - المدرج التكرارى أو مدرج التكرارات يتكون من مجموعة من المستطيلات لها :

(أ) قاعدة على المحور الأفقى (محور x) مراكزها عند مركز الفئة وطول القاعدة يساوى طول فترة الفئة .

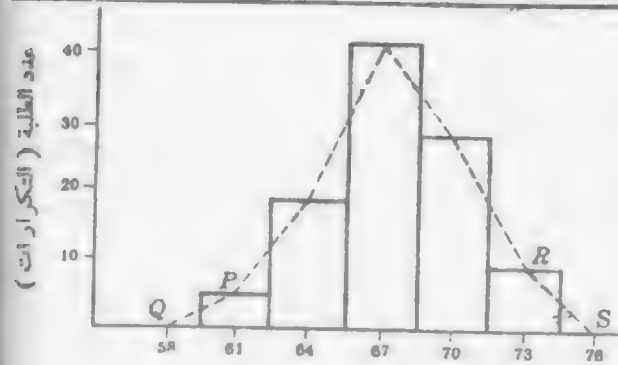
(ب) مساحة متناسبة مع تكرارات الفئات .

وإذا كانت الفئات كلها لها نفس الطول فإنه من المعتاد أن تأخذ الارتفاعات مساوية لتكرارات الفئات .

أما إذا كانت الفئات غير متساوية الطول فإن هذه الأطوال يجب أن تعدل (أنظر المسألة ٢ - ١٣) .

٢ - المضلع التكرارى • هو خط بياني لتكرار الفئة المقابلة لمركز الفئة . ويمكن رسمه بإيصال نقط منتصف

رؤوس المستطيلات المكونة للمدرج التكرارى .



الأوزان (بالكيلوجرامات)

شكل ٢ - ١

المدرج التكرارى والمضلع التكرارى لبيانات التوزيع التكرارى للأوزان موضحان على نفس الاحداثيات في الشكل ٢ - ١ . من المعتاد أن نصيف الوصلتين PQ و RS إلى ما بعد مركز الفئة الدنيا ومركز الفئة العليا ونعتبر أن التكرارات المقابلة لها صفر . وفي هذه الحالة فإن مجموع مساحات المستطيلات في المدرج التكرارى تتساوى مع المساحة الكلية المحصورة بين المضلع التكرارى ومحور السينات .
(أنظر المسألة ٢ - ١١) .

التوزيع التكرارى النسبى

التكرار النسبى لفئة هو تكرار الفئة مقسوما على التكرار الكلى لجميع الفئات وعادة يبر عنه كنسبة مئوية . فعلى سبيل المثال فإن التكرار النسبى للفئة 66—68 في الجدول (٢ - ١) هو $42\% = 42/100$. مجموع التكرارات النسبية لجميع الفئات هو 1 أو 100% .

إذا استبدلنا التكرارات في الجدول التكرارى السابق بما يقابلها من التكرارات النسبية فإن الجدول الناتج يسمى بالتوزيع التكرارى النسبى أو توزيع النسب المئوية أو جداول التكرارات النسبية .

تمثيل البياني للتوزيع التكرارى النسبى يمكن الحصول عليه من المدرج التكرارى أو المضلع التكرارى وذلك بإبدال تدريج المحور الرأسى من التكرارات إلى التكرارات النسبية وهذا لن يغير في الشكل نفسه . ويسمى الشكل الناتج بمدرج التكرارات النسبية أو المدرج التكرارى للنسب المئوية وكذلك المضلع التكرارى النسبى أو المضلع التكرارى للنسب المئوية .

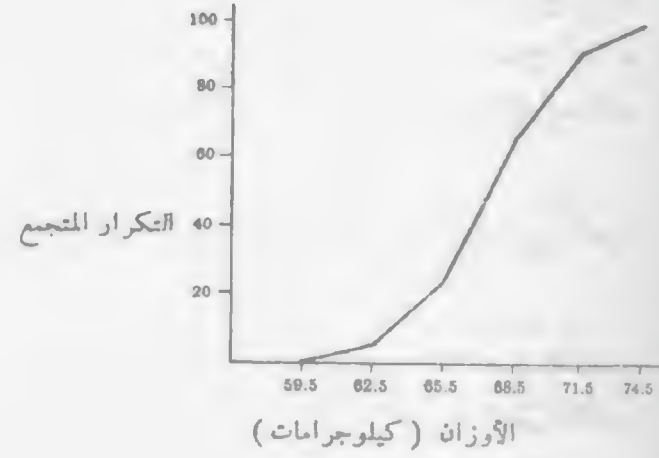
التوزيع التكرارى المتجمع ، والمنحنى التكرارى المتجمع

مجموع التكرارات المقابلة لجميع القيم الأقل من الحد الأعلى الحقيقى لفئة معينة يسمى بالتكرار المتجمع إلى هذه الفئة والمتضمن تكرارها أيضا . وعلى سبيل المثال في الجدول ١ - ٢ فإن التكرار المتجمع إلى الفئة 66 — 68 والمتضمن تكرارها أيضا هو $65 = 5 + 18 + 42$ وهذا يعنى أن 65 طالبا أوزانهم تقل عن 68.5 kg .

والجدول الذى يمثل التكرارات المتجمعة يسمى بالتوزيع المتجمع أو جدول التكرارات المتجمعة أو باختصار التوزيع المتجمع ومثال له الجدول ٢ - ٢ لتوزيع أوزان الطلبة .

جدول ٢ - ٢

عدد الطلبة	الأوزان (كيلوجرامات)
0	أقل من 59.5
5	أقل من 62.5
23	أقل من 65.5
65	أقل من 68.5
92	أقل من 71.5
100	أقل من 74.5



شكل ٢ - ٢

والشكل البياني الذي يظهر التكرارات المتجمعة إلى أقل من الحد الأعلى الحقيقي لأي فئة بالمقابلة للحد الأعلى الحقيقي للفئات يسمى بالمضلع التكراري المتجمع أو المنحنى التكراري كما هو موضح بالشكل ٢ - ٢ والخاص بتوزيع أوزان الطلبة .

وفي بعض الأحيان قد يكون من المرغوب فيه الحصول على التوزيع التكراري المتجمع لجميع القيم الأكبر من أو المساوية للحد الأدنى الحقيقي لكل فئة . وحيث أننا نعتبر في هذه الحالة الأوزان 59.5 kg أو أكثر ، 62.5 kg أو أكثر وهكذا . فإن هذا يسمى أحيانا التوزيع المتجمع على أساس « أو أكثر من » بينما التوزيع الذي ذكرناه سابقا يسمى التوزيع المتجمع على أساس « الأقل من » . ومن السهل الحصول على أحدهما من الآخر (أنظر المائدة ٢ - ١٥) . وشكل التكرار المتجمع يسمى تبعا لذلك المنحنى التكراري الصاعد « أقل من » في الحالة الأولى والمنحنى التكراري النازل « أو أكثر » . ولكن عندما نشير إلى التوزيع التكراري المتجمع أو المنحنى التكراري المتجمع بدون توصيف فإن هذا يتضمن أن الأساس هو « الأقل من » .

التوزيع التكراري المتجمع النسبي . المنحنى المتجمع للنسب المئوية

التوزيع التكراري المتجمع النسبي أو التكرار المتجمع المئوي . هو التكرار المتجمع مقسوما على التكرار الكلي . مثال ذلك فإن التكرار المتجمع النسبي للأوزان الأقل من 68.5 kg هو $65\% = 65/100$ وهذا يعني أن 65% من الطلبة أوزانهم أقل من 68.5 kg .

إذا استخدمنا التكرارات المئوية النسبية في الجدول ٢ - ٢ والشكل ٢ - ٢ بدلا من التكرارات المتجمعة فإن النتيجة تسمى بالتوزيع التكراري المتجمع النسبي أو بالتوزيع المتجمع لنسب المئوية أو المضلع التكراري المتجمع النسبي أو المنحنى التكراري المتجمع للنسب المئوية .

المنحنى التكرارى . تمهيد المنحنى التكرارى المتجمع

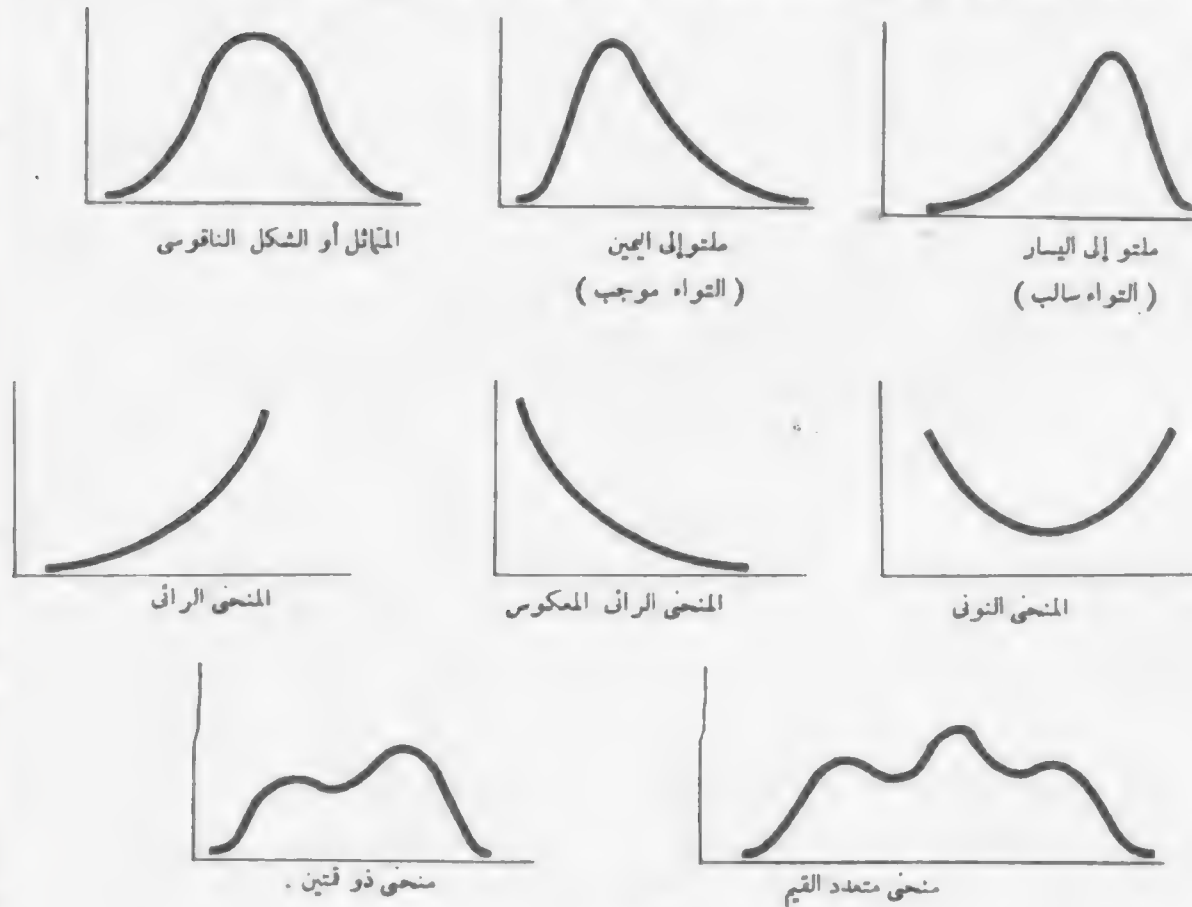
يمكن اعتبار البيانات المجمعة كمية مسحوبة من مجتمع أكبر . وبما أن هناك عددا كبيرا من المشاهدات في المجتمع فإنه من الممكن من الناحية النظرية (البيانات المتصلة) اختيار فترة الفئة صغيرة جدا ويظل لدينا عدد ملموس من المشاهدات تقع في داخل كل فئة . وبهذا فإنه من المتوقع أن يتكون المصطلح التكرارى أو المصطلح النسبى للمجتمعات الكبيرة من عدد كبير من الخطوط الصغيرة المتكررة والتي يمكن تقريبها بمنحنى ، ويسمى هذا المنحنى بالمنحنى التكرارى أو المنحنى التكرارى النسبى على التوالى .

ومن المنطقى أن نتوقع أن مثل هذه المنحنيات النظرية يمكن الحصول على تقريب لها باستخدام المدرج التكرارى أو المدرج التكرارى النسبى لعينة بعد تمهيده .

وتزيد درجة الدقة في التقريب بزيادة حجم العينة . ولهذا السبب فإن المنحنى التكرارى يسمى أحيانا المدرج التكرارى الممهّد . وبنفس الطريقة فإن المنحنى التكرارى المتجمع الممهّد نحصل عليه بتمهيد المدرج التكرارى المتجمع أو المنحنى التكرارى المتجمع . ومن المعتاد أن يكون تمهيد المنحنى المتجمع أكثر سهولة من تمهيد المدرج التكرارى (أنظر المسألة ٢ - ١٨) .

اشكال المنحنيات التكرارية

المنحنيات التكرارية التي تظهر في الناحية العملية تأخذ أشكالا مميزة كما هو موضح بالشكل ٢ - ٣ .



شكل ٢ - ٣

(أ) المنحنى التكرارى المتماثل أو ذو الشكل الناقوسى يتميز بأن المشاهدات المتساوية البعد عن مركز النهاية العظمى لها نفس التكرارات . ومن الأمثلة الهامة له المنحنى المعتدل .

(ب) المنحنيات التكرارية متوسطة عدم المتماثل أو الالتواء تتميز بأن أحد طرفيها يمتد أكثر من الآخر على جانب مركز النهاية العظمى . إذا كان الطرف (الأيمن) أطول فيكون المنحنى فى هذه الحالة ملتوياً إلى اليمين أو ملتوياً التواء موجباً . بينما لو كان المكس صحيحاً فإن المنحنى يكون ملتوياً إلى اليسار أو ملتوياً التواء سالب .

(ج) فى المنحنيات ذات الشكل الرأى أو الشكل الرأى المعكوس فإن نقطة النهاية العظمى للمنحنى تقع عند أحد طرفى المنحنى .

(د) المنحنى النوفى له نهاية عظمى عند كل من طرفيه .

(هـ) المنحنى ذو القمتين له نهايتان عظميتان .

(و) المنحنى متعدد القيم له أكثر من نهايتين عظميتين .

مسائل محلولة

المفردات المنظومة

١ - ٢ (أ) رتب الأرقام 22, 34, 57, 11, 48, 6, 27, 38, 45, 17 فى منظومة ، ثم
(ب) حدد المدى .

الحل :

(أ) بترتيبها تصاعدياً حسب قيمها تكون المنظومة 6, 11, 17, 22, 27, 34, 38, 45, 48, 57
بترتيبها تنازلياً حسب قيمها تكون المنظومة 57, 48, 38, 45, 27, 34, 22, 17, 11, 6
(ب) بما أن الرقم الأصغر هو 6 والرقم الأكبر هو 57 فإن المدى هو $57 - 6 = 51$.

٢ - ٢ درجات 80 طالباً فى مادة الرياضة فى جامعة ولاية مسجلة بالجنول التالى

68	84	75	82	68	90	62	88	76	93
73	79	88	73	60	93	71	59	85	75
61	65	75	87	74	62	95	78	63	72
66	78	82	75	94	77	69	74	68	60
96	78	89	61	75	95	60	79	83	71
79	62	67	97	78	85	76	65	71	75
65	80	73	57	88	78	62	76	53	74
86	67	73	81	72	63	76	75	85	77

بالرجوع إلى هذا الجدول حدد .

(أ) أكبر درجة .

(ب) أقل درجة .

(ج) الوسط

(د) درجات أعلى خمسة طلبة من حيث الترتيب .

(هـ) درجات أقل خمسة طلبة من حيث الترتيب .

(و) درجات الطالب الذي ترتيبه العاشر من أعلى .

(ز) ما هو عدد الطلبة الذين حصلوا على الدرجة 75 فأكثر .

(ح) ما هو عدد الطلبة الذين حصلوا على درجات أقل من 85 .

(ط) ما هي النسبة المئوية للطلبة الحاصلين على درجات أعلى من 65 ولكن ليست أعلى من 85 .

(ي) ما هي الدرجات التي لم تظهر مطلقا .

الحل :

بعض هذه الأسئلة تتطلب تفصيلات بحيث تكون أحسن طريقة للإجابة عليها هي تكوين منظومة . وهذا يمكن عمله بتنظيم البيانات إلى عدد مناسب من الفئات ووضع كل رقم يأخذ من الجدول في الفئة الملائمة ، كما في الجدول ٢ - ٢ أدناه . وهذا يسمى جدول المداخلات . ويتم بعد ذلك ترتيب الأرقام داخل كل فئة في منظومة كما في الجدول ٢ - ٢ . وبهذا نحصل على المنظومة المطلوبة .

جدول ٢ - ٢

50-54	53
55-59	59, 57
60-64	62, 60, 61, 62, 63, 60, 61, 60, 62, 62, 63
65-69	68, 68, 65, 66, 69, 68, 67, 65, 65, 67
70-74	73, 73, 71, 74, 72, 74, 71, 71, 73, 74, 73, 72
75-79	75, 76, 79, 75, 75, 78, 78, 75, 77, 78, 75, 79, 79, 78, 76, 75, 78, 76, 76, 75, 77
80-84	84, 82, 82, 83, 80, 81
85-89	88, 88, 85, 87, 89, 85, 88, 86, 75
90-94	90, 93, 93, 94
95-99	95, 96, 95, 97

جدول ٢ - ٤

50-54	53
55-59	57, 59
60-64	60, 60, 60, 61, 61, 62, 62, 62, 62, 63, 63
65-69	65, 65, 65, 66, 67, 67, 68, 68, 69
70-74	71, 71, 71, 72, 72, 73, 73, 73, 73, 74, 74, 74
75-79	75, 75, 75, 75, 75, 75, 75, 76, 76, 76, 76, 77, 77, 78, 78, 78, 78, 79, 79, 79
80-84	80, 81, 82, 82, 83, 84
85-89	85, 85, 85, 86, 87, 88, 88, 88, 89
90-94	90, 93, 93, 94
95-99	95, 95, 96, 97

من الجدول ٢ - ٤ يكون من الأسهل نسبياً الإجابة على هذه الأسئلة . حيث

(أ) أكبر درجة : 97

(ب) أقل درجة : 53

(ج) المدى $97 - 53 = 44$

(د) درجات أعلى خمسة طلبة من حيث الترتيب : 97, 96, 95, 95, 94

(هـ) درجات أقل خمسة طلبة من حيث الترتيب : 53, 57, 59, 60, 60

(و) درجة الطالب الذي ترتيبه العاشر من أعلى : 88

(ز) عدد الطلبة الذين حصلوا على الدرجة 75 فأكثر : 44

(ح) عدد الطلبة الذين حصلوا على درجات أقل من 85 : 63

(ط) نسبة الطلبة الحاصلين على درجات أعلى من 65 ولكن ليست أعلى من 85 : $49/80 = 61.2\%$

(ي) الأرقام التي لم تظهر هي 0 وكذلك 100, 99, 98, 92, 91, 70, 64, 58, 56, 55, 54, 52 .

التوزيعات التكرارية والمدرجات والمضلعات التكرارية

٢ - ٣ يبين الجدول ٢ - ٥ التوزيع التكراري للأجور الشهرية بالجنهات الاسترلينية لـ 65 عاملاً في شركة P and R .

حدد باستخدام هذا الجدول :

(أ) الحد الأدنى للفئة السادسة ج : £ 100.00

(ب) الحد الأعلى للفئة الرابعة ج : £89.99

(ج) مركز الفئة (أو منتصف الفئة) الثالثة . مركز الفئة الثالثة

$$\frac{1}{2}(\pounds 70.00 + \pounds 79.99) = \pounds 74.9995$$

ولكن من الأغراض العملية يقرب هذا الرقم إلى $\pounds 75.00$.

جدول ٥ - ٢

عدد العاملين	الاجور
8	£50.00-£59.99
10	60.00- 69.99
16	70.00- 79.99
14	80.00- 89.99
10	90.00- 99.99
5	100.00-109.99
2	110.00-119.99
المجموع 65	

(د) الحدود الحقيقية لفئة الخامسة

الحد الأدنى الحقيقي لفئة الخامسة

الحد الأعلى الحقيقي لفئة الخامسة :

$$= \frac{1}{2}(\pounds 90.00 + \pounds 89.99) = \pounds 89.995$$

$$= \frac{1}{2}(\pounds 99.99 + \pounds 100.00) = \pounds 99.995$$

(هـ) طول الفئة الخامسة :

طول الفئة الخامسة = الحد الأعلى الحقيقي لفئة الخامسة - الحد الأدنى الحقيقي لفئة الخامسة

$$= \pounds 99.995 - \pounds 88.995 = \pounds 10.00$$

وفي هذه الحالة فإن جميع الفئات لها نفس الطول $\pounds 10.00$.

(و) تكرار الفئة الثالثة ج : 16

(ز) التكرار النسبي للفئة الثالثة : ج : $16/65 = 0.246 = 24.6\%$

(ح) الفئة ذات التكرار الأكبر ج : $\pounds 70.00 - \pounds 79.99$

وهذه تسمى أحيانا بالفئة المنوالية . ويسمى تكرارها بتكرار الفئة المنوالية .

(ط) نسبة العاملين الذين يحصلون على دخل شهري أقل من $\pounds 80.00$

العدد الكلي للعاملين الذين يحصلون على دخل أقل من $\pounds 80.00$ شهريا $16 + 10 + 8 = 34$

نسبة العاملين يحصلون على دخل أقل من $\pounds 80.00$ شهريا $34/65 = 52.3\%$

(ي) العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من $\pounds 100.00$ ولكن لا يقل دخلهم عن $\pounds 60.00$ شهريا

$$= 10 + 14 + 16 + 10 = 50$$

نسبة العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من $\pounds 100.00$ ولكن لا يقل دخلهم عن $\pounds 60.00$ شهريا

$$= 50/65 = 76.9\%$$

نسبة العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من $\pounds 100.00$ ولكن لا يقل دخلهم عن $\pounds 60.00$ شهريا

$$= 50/65 = 76.9\%$$

٢ - ٤ إذا كانت مراكز الفئات للتوزيع التكراري لأطوال أوراق نبات الغار هي

128, 137, 146, 155, 164, 173, 182 mm أوجد (أ) طول الفئة (ب) الحدود الحقيقية لفئات

(ج) حدود الفئات ، مفترضا أن القياس أخذ إلى أقرب مليمتر .

الحل :

(أ) طول الفقة = الفرق المشترك بين مراكز الفقات المتتالية = $137 - 128 = 146 - 137 = 9 \text{ mm}$.
(ب) بما أن أطوال الفقات كلها متساوية ، فإن الحدود الحقيقية للفقات هي في منتصف المسافة بين مراكز الفقات وبهذا يكون لدينا القيم .

$$\frac{1}{2}(128 + 137), \frac{1}{2}(137 + 146), \dots, \frac{1}{2}(173 + 182) \text{ or } 132.5, 141.5, 150.5, \dots, 177.5 \text{ mm.}$$

وبهذا يكون الحد الحقيقي للفقة الأول هو

$$132.5 - 9 = 123.5 \text{ ولفقة الأخيرة هو } 177.5 + 9 = 186.5$$

وبما أن الطول المشترك للفقات هو 9 mm . فإن الحدود الحقيقية للفقات هي :

$$123.5, 132.5, 141.5, 150.5, 159.5, 168.5, 177.5, 186.5 \text{ mm.}$$

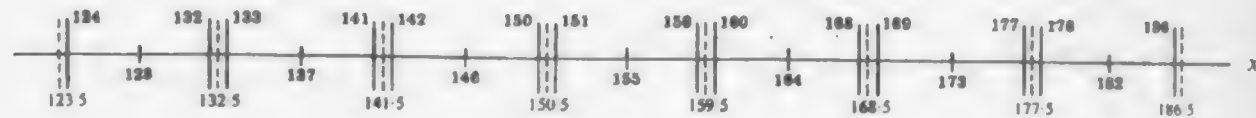
(ج) بما أن حدود الفقات هي قيم صحيحة فلنأخذ نختار حدود الفقات من الأرقام الصحيحة الأقرب إلى الحدود الحقيقية ،
لفقة وعلى سبيل التحديد :

$$123, 124, 132, 133, 141, 142, \dots$$

وبهذا فإن حدود الفقة الأولى هي $124-132$ ولفقة التالية $133-141$ وهكذا .

٧ - ٥ عبر بيانيا عن نتائج المسألة السابقة :

الحل :



مراكز الفقات 128, 137, 146, ..., 182 حدد موضعها على محور x . ويوضح على الرسم الحدود الحقيقية للفقات بالخطوط الرأسية المتقطعة بينما حدد حدود الفقات بالخطوط الرأسية المتصلة .

٧ - ٦ إذا كان أصغر قياس هو 5.18 mm وكان أكبرها هو 7.44 mm . حدد مجموعة ملائمة من :

(أ) حدود الفقات (ب) الحدود الحقيقية للفقات (ج) مراكز الفقات
والتي يمكن استخدامها لتكوين توزيع تكرارى لهذه القياسات .

الحل :

المدى $7.44 - 5.18 = 2.26 \text{ mm}$. وإذا استعملنا 5 فقات كحد أدنى فإن طول الفقة سيكون $2.26/5 = 0.45$ تقريبا أما إذا استعملنا كحد أعلى 20 فقة فإن طول الفقة سيكون $2.26/20 = 0.11$.
تقريبا . وبهذا يكون الاختيار المناسب لطول الفقة يقع بين 0.11, 0.45 وقد يكون 0.20, 0.30 أو 0.40 .

(١) تظهر الأعمدة I, II, III فئات ملامحة أطوالها 0.20, 0.30, 0.40 على الترتيب .

I	II	III
5.10-5.29	5.10-5.39	5.10-5.49
5.30-5.49	5.40-5.69	5.50-5.89
5.50-5.69	5.70-5.99	5.90-6.29
5.70-5.89	6.00-6.29	6.30-6.69
5.90-6.09	6.30-6.59	6.70-7.09
6.10-6.29	6.60-6.89	7.10-7.49
6.30-6.49	6.90-7.19	
6.50-6.69	7.20-7.49	
6.70-6.89		
6.90-7.09		
7.10-7.29		
7.30-7.49		

لاحظ أن الحد الأدنى للفئة الأولى من الممكن أن يكون مختلفا من 5.10 . فعلى سبيل المثال في الممسود I إذا بدأنا بالرقم 5.15 كحد أدنى فإن الفئة الأولى يمكن كتابتها على الشكل 5.15-5.34 .

(ب) الحدود الحقيقية للفئات المقابلة للأعمدة I, II, III أعلاه هي كالاتي .

I	5.095-5.295, 5.295-5.495, 5.495-5.695, ..., 7.295-7.495
II	5.095-5.395, 5.395-5.695, 5.695-5.995, ..., 7.195-7.495
III	5.095-5.495, 5.495-5.895, 5.895-6.295, ..., 7.095-7.495

لاحظ أن هذه الحدود الحقيقية للفئات ملامحة حيث أنها لا تتطابق مع أي من القياسات المشاهدة .

(ج) مراكز الفئات المقابلة للأعمدة I, II, III المغطاة في (١) هي كالاتي :

I	5.195, 5.395, ..., 7.395	II	5.245, 5.545, ..., 7.345	III	5.295, 5.695, ..., 7.295
---	--------------------------	----	--------------------------	-----	--------------------------

هذه القيم لمراكز الفئات يبينها أنها لا تتطابق مع أي من القياسات المشاهدة .

٧ - ٧ في الإجابة على السؤال السابق اختار أحد الطلبة الفئات التالية .

5.10-5.40, 5.40-5.70 ..., 6.90-7.20, 7.20-7.50

هل هناك أي خطأ في هذا الاختيار ؟

الحل :

هذه الفئات تتشابه فيما بينها عند 5.40, 5.70, ..., 7.20 . وهذا فإنه إذا كانت قيمة مسجلة لقياس 5.40 على سبيل المثال ، فإنه يمكن أن توضع في أي من الفئتين الأولى أو الثانية . ويبرر بعض الإحصائيين ذلك بالاتفاق على أن يوضع نصف هذه الحالات غير الواضحة في أحد الفئات والنصف الآخر في الفئة الأخرى .

وعدم الوضوح في هذه الحالة يمكن حذفه بأن نكتب الفئات كالاتي : 5.10 أقل من 5.40 و 5.40 أقل من 5.70 وهكذا . وفي هذه الحالة فإن الحدود تتطابق مع الحدود الحقيقية لفئة ومراكز الفئات تتطابق مع

البيانات المشاهدة . وبشكل عام فن المستحب أن نتجنب مثل هذا التشابك في الفئات كلما كان ذلك ممكنا وكذلك اختيار الحدود الحقيقية للفئات بحيث لا تتطابق مع قيم فعلية مشاهدة . وعلى سبيل المثال فإن الفئات في المسألة السابقة يمكن اختيارها مثل 5.695 — 5.395 ، 5.395 — 5.095 وهكذا . بدون أى غموض . ويعيب هذا الاختيار بالذات أن مراكز الفئات لا تتطابق مع قيم مشاهدة .

٢ - ٨ في الجدول التالي سجلت أطوال 40 من أوراق نبات الغار إلى أقرب مليمتر . كون توزيعا تكراريا .

138	164	150	132	144	125	149	157
146	158	140	147	136	148	152	144
168	126	138	176	163	119	154	165
146	173	142	147	135	153	140	135
161	145	135	142	150	156	145	128

الحل :

أكبر طول هو 176 mm وأصغر طول هو 119 mm وبهذا يكون المدى $176 - 119 = 57 \text{ mm}$

إذا استخدمنا 5 فئات فإن طول الفئة سيكون بالتقريب $57/5 = 11$.

إذا استخدمنا 20 فئة فإن طول الفئة سيكون بالتقريب $57/20 = 3$.

أحد الاختيارات الملائمة لطول الفئة هو 5 mm . وكذلك فإنه من الملائم اختيار مراكز الفئات عند

118 , 120 , 125 , 130 , 135 , ... وبهذا فإن الفئات من الممكن أن تكون 118 — 122 , 123 — 127 , 128 — 132 , ...

وبهذا الاختيار فإن الحدود الحقيقية للفئات هي 117.5 , 122.5 , 127.5 , ... والتي لا تتطابق مع البيانات المشاهدة .

جدول ٢ - ٦

الطول	الحزم	التكرار
118-122	/	1
123-127	//	2
128-132	//	2
133-137	////	4
138-142	//// /	6
143-147	//// ///	8
148-152	////	5
153-157	////	4
158-162	//	2
163-167	///	3
168-172	/	1
173-177	//	2
المجموع		40

التوزيع التكرارى المطلوب موضح بالشكل ٢-٦ .

ويستخدم العمود الأوسط ويسمى كشف الحزم (أو النقط)

في ترتيب البيانات الخام للحصول على التكرارات

ويحذف عادة عند العرض النهائى للتوزيع التكرارى .

وليس ضروريا وضع القيم في منظومة وأن كان من الممكن

في حالة وجودها استخدامها في تبويب التكرارات .

جدول ٧-٢

التكرار	الحزم	الطول
3	///	118-126
5	////	127-135
9	////	136-144
12	////	145-153
5	////	154-162
4	////	163-171
2	//	172-180
40		المجموع

طريقة أخرى

ومن الطبيعي أن يكون من الممكن الحصول على توزيعات تكرارية أخرى .

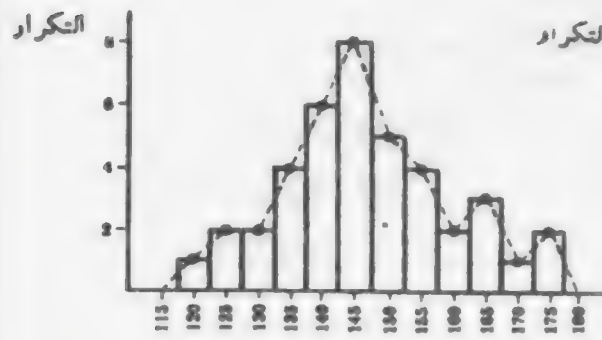
بالجدول ٧-٢ يظهر على سبيل المثال التوزيع التكراري باستخدام 7 فئات حيث طول الفئة هو 9 mm .

٢-٩ كون (أ) مدرج تكراري (ب) مصلع تكراري لتوزيع الأطوال في المسألة ٢-٨

الحل :

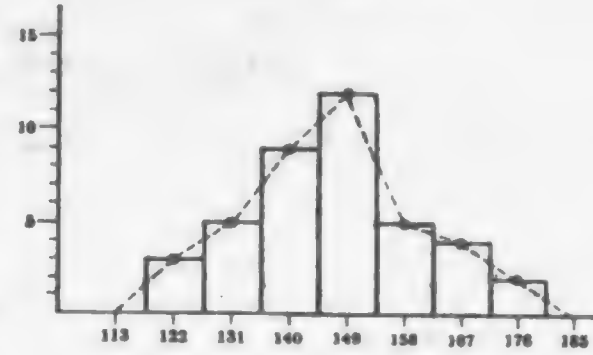
المدرج التكراري والمصلع التكراري لكل من الحالات المذكورة في المسألة ٢-٨ مطبوعة في الأشكال ٢-٤ (أ)

٢-٤ (ب)



الأطوال (بالمليمترات)

شكل ٢-٤ (أ)



الأطوال (بالمليمترات)

شكل ٢-٤ (ب)

لاحظ أن مراكز قواعد المستطيلات قد عرفت عند مراكز الفئات .

٢-١٠ باستخدام بيانات المسألة ٢-٣ كون

(أ) توزيع تكراري نسبي (أو نسب مئوية) .

(ب) مدرج تكراري

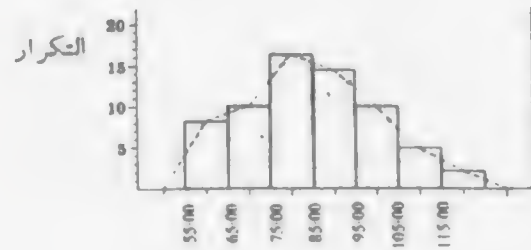
(ج) مدرج تكراري نسبي

(د) مصلع تكراري

(هـ) مصلع تكراري نسبي .

جدول ٢ - ٨

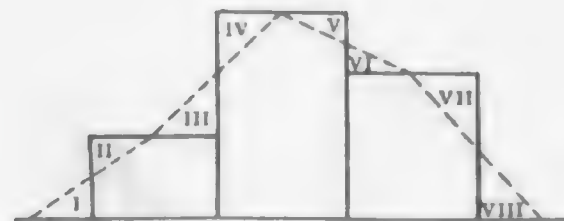
الأجور	التكرار النسبي (كنسب مئوية)
£50.00-£59.99	12.3
60.00- 69.99	15.4
70.00- 79.99	24.6
80.00- 89.99	21.5
90.00- 99.99	15.4
100.00-109.99	7.7
110.00-119.99	3.1
	100.0% المجموع



الأجور (£)

شكل ٢ - ٥

لاحظ أنه إذا كان المطلوب هو المصطلح التكراري النسبي فقط فإن الرسم المقابل لن يحتوي على المدرج التكراري ومحور التكرارات النسبية سوف يظهر على اليسار بدلا من محور التكرارات .



شكل ٢ - ٦

الحل :

(أ) التوزيع التكراري النسبي المبين بالجدول ٢ - ٨
حصلنا عليه من التوزيع التكراري للمألة
٢ - ٣ بقسمة تكرارات كل فئة على المجموع
الكل لتكرارات (65) وعبرنا عن النتيجة كنسبة
مئوية .

(ب) ، (ج) . المدرج التكراري والمدرج التكراري
النسبي موضحان بالشكل ٢ - ٥ . لاحظ أنه
التحويل إلى مدرج تكراري نسبي فإنه من
الضروري فقط إضافة مقياس رأسي يظهر
التكرارات النسبية كما هو موضح على يمين
الشكل .

(د) ، (هـ) المصطلح التكراري والمصطلح التكراري
النسبي موضحان بالخط البياني المتقطع بالشكل
٢ - ٥ .

التحويل إلى مصطلح تكراري نسبي فإنه من
الضروري فقط إضافة مقياس رأسي يظهر
التكرارات النسبية .

١١-٢ أثبت أن المساحة الكلية لمستطيلات في المدرج
التكراري تساوي المساحة الكلية المحصورة بين
المصطلح التكراري ومحور السينات .

الحل :

سنثبت ذلك في حالة مدرج تكراري يتكون من
ثلاثة مستطيلات كما بالرسم ، حيث يظهر المصطلح
التكراري بخطوط متقطعة .

المساحة الكلية للمستطيلات =

المساحة المظلة + مساحة II + مساحة IV + مساحة V + مساحة VII

= المساحة المظلة + مساحة I + مساحة III + مساحة II + مساحة VIII

= المساحة المحصورة بين المضلع التكرارى ومحور السينات .

لأن مساحة I = مساحة II ، مساحة III = مساحة IV ، مساحة V = مساحة VI ، مساحة VII

= مساحة VIII .

١٢-٢ فى شركة P and R (المسألة ٢-٣) عين خمسة عاملين جدد وكانت أجورهم الشهرية £85.34 . كون توزيعاً تكرارياً لأجور 70 عاملاً .

الحل .

التوزيعات التكرارية الممكنة تظهر فى الجداول (أ) ، (ب) ، (ج) ، (د) ، (هـ) ، أدناه . (أ) احتفظ بنفس طول الفئة £10.00 خلال الجدول . و كنتيجة لذلك ظهرت فئات غالية وتفاصيل دقيقة حول الحد الأعلى لميكل الأجور

فى (ب) الفئات الغالية والتفاصيل الدقيقة أمكن تلافيها باستخدام الفئة المنخفضة £120.00 وأكبر . أحد عيوب هذا الأسلوب أن الجدول أصبح لاقية له عند إجراء بعض العمليات الرياضية . وعلى بيل المثال أصبح من المستحيل تحديد الأجور الكلية المدفوعة فى أسبوع حيث £120.00 وأكبر من الممكن أن تتضمن أن الأفراد يمكن أن يحصلوا على أجور قد تصل إلى £1200.00 فى الشهر .

فى (ج) كون الجدول باستخدام طول الفئة £20.00 أحد العيوب فى ذلك أن كثيراً من المعلومات قد فقدت فى الحدود الدنيا لميكل الأجور والتفاصيل مازالت دقيقة فى الحد الأعلى لميكل الأجور .

فى (د) أطوال الفئات غير متساوية . أحد العيوب فى ذلك هو أن عمليات رياضية سوف تتم فيما بعد تفقد السهولة المتاحة فى حالة ما إذا كانت الفئات متساوية . كذلك نكلما زاد طول الفئة زادت أخطاء التجميع .

(ب)

الأجور	التكرار
£50.00 - £59.99	8
60.00 - 69.99	10
70.00 - 79.99	16
80.00 - 89.99	15
90.00 - 99.99	10
100.00 - 109.99	5
110.00 - 119.99	3
120.00 and over	3
المجموع 70	

(أ)

الأجور	التكرار
£50.00 - £59.99	8
60.00 - 69.99	10
70.00 - 79.99	16
80.00 - 89.99	15
90.00 - 99.99	10
100.00 - 109.99	5
110.00 - 119.99	3
120.00 - 129.99	0
130.00 - 139.99	1
140.00 - 149.99	0
150.00 - 159.99	1
160.00 - 169.99	0
170.00 - 179.99	1
المجموع 70	

(د)

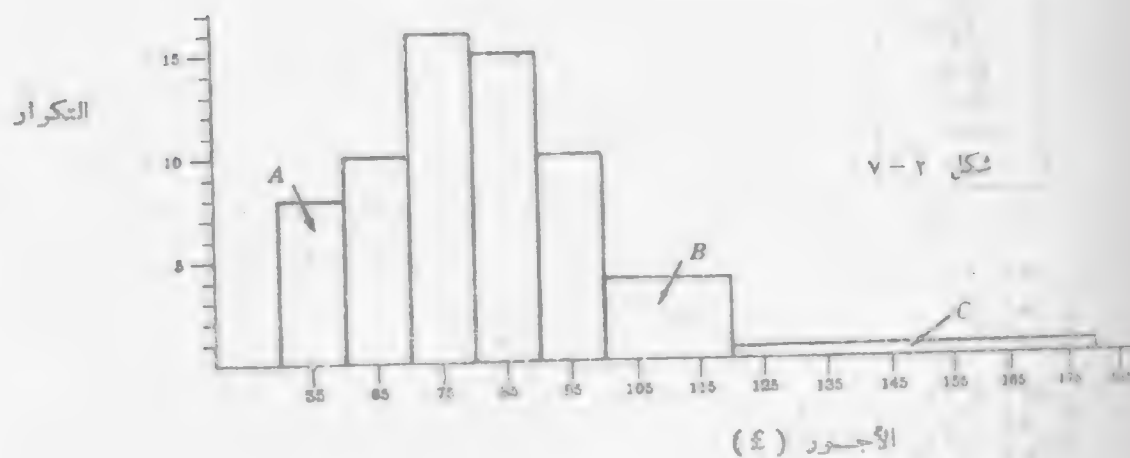
الأجور	التكرار
£50.00 - £59.99	8
60.00 - 69.99	10
70.00 - 79.99	16
80.00 - 89.99	15
90.00 - 99.99	10
100.00 - 119.99	8
120.00 - 179.99	3
المجموع 70	

(ج)

الأجور	التكرار
£50.00 - £69.99	18
70.00 - 89.99	31
90.00 - 109.99	15
110.00 - 129.99	3
130.00 - 149.99	1
150.00 - 169.99	1
170.00 - 189.99	1
المجموع 70	

١٢ - ٢ كون مديجاً تكرارياً للتوزيع التكراري الموضح في الجدول (د) بالمسألة ١٢ - ٢

الحل :



المدرج التكراري المطلوب يظهر بالشكل ١٢ - ٢ . لتكوين هذا المدرج نستخدم القاعدة أن المساحة تتناسب مع التكرار . إذا افترضنا أن المستطيل A يقابل الفئة الأولى (أنظر الجدول (د) في المسألة ١٢ - ٢) بتكرار قدره 8 . وبما أن الفئة السادسة بالجدول (د) لها نفس التكرار 8 ، فإن المستطيل B والذي يمثل هذه الفئة يجب أن تكون مساحته هي نفسها مساحة المستطيل A . بما أن طول B ضعف طول A فإن ارتفاعه يجب أن يكون نصف ارتفاع A كما هو موضح .

وكذلك فإن المستطيل C الممثل لفئة الأخيرة في الجدول (د) له ارتفاع نصف وحدة على المحور الرأسي .

التوزيع التكرارى المتجمع والمنحنى التكرارى المتجمع

٢ - ١٤ كون : (أ) التوزيع التكرارى المتجمع .

(ب) التوزيع التكرارى المتجمع النسبى .

(ج) المنحنى التكرارى المتجمع .

(د) المنحنى التكرارى المتجمع النسبى .

وذلك من التوزيع التكرارى بالمسألة ٢ - ٢ .

الحل :

(أ) ، (ب) التوزيع التكرارى المتجمع

والتوزيع التكرارى المتجمع للنسب المئوية

(أو التوزيع التكرارى المتجمع النسبى)

موضحان بالجدول ٢ - ٩ . لاحظ

أن كل قيمة فى العمود الثانى حصلنا عليها

بالجمع المتتالى فى جدول المسألة ٢ - ٢ .

مثلا

$$34 = 8 + 10 + 16 , 18 = 8 + 10$$

وهكذا ، كل قيمة فى العمود الثالث

حصلنا عليها بقسمة القيم المقابلة فى العمود

الثانى على التكرار الكلى 65 وعبرنا عن

النتائج كنسبة مئوية مثلا

$$34/65 = 52.3\%$$

القيم فى هذا العمود يمكن الحصول عليها

أيضاً من الجمع المتتالى للقيم فى العمود الثانى

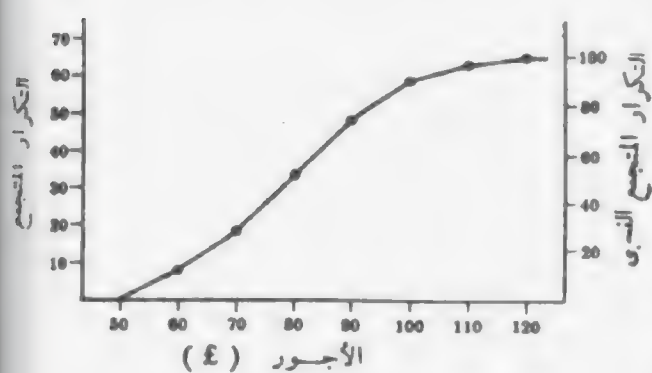
من جدول المسألة ٢ - ١٠ (أ) . مثلا

$$52.3 = 12.3 + 15.4 + 24.6$$

$$27.7 = 12.3 + 15.4$$

جدول ٢ - ٩

الأجور	التكرار المتجمع	التكرار المتجمع النسبى
أقل من £50.00	0	0.0
أقل من 60.00	8	12.3
أقل من 70.00	18	27.7
أقل من 80.00	34	52.3
أقل من 90.00	48	73.8
أقل من 100.00	58	89.2
أقل من 110.00	63	96.9
أقل من 120.00	65	100.0



شكل ٢ - ٨

(ج) ، (د) المنحنى التكرارى المتجمع (أو المضلع التكرارى المتجمع) والمنحنى التكرارى المتجمع النسبى

(أو المضلع التكرارى المتجمع النسبى) مرسومان معاً بالشكل ٨ - ٢ المقياس الرأسى إلى اليسار يبين عليه التكرار

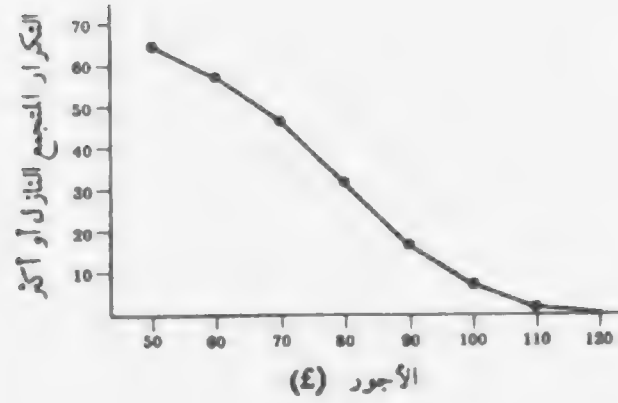
المتجمع بينما المقياس الرأسى إلى اليمين يبين عليه التكرار المتجمع النسبى . وتسمى هذه الحالة . بالمنحنى

التكرارى المتجمع الصاعد أو المنحنى التكرارى النسبى الصاعد أو للاساس « أقل من » وذلك نظراً للطريقة التى

تتجمع بها التكرارات .

- ٢-١٥ كون (أ) التوزيع التكرارى المتجمع النازل « أو أكثر »
 (ب) المنحنى التكرارى المتجمع النسبى النازل « أو أكثر »
 وذلك من بيانات التوزيع التكرارى للمسألة ٢-٢

الحل :



شكل ٢-٩

(أ) لاحظ أن القيم الموجودة بالممود الثانى
 بالجدول ٢-١٠ قد حصلنا عليها
 بالإضافة المتتالية للقيم الموجودة بالممود
 التالى بالجدول ٢-٥ بالمسألة ٢-٢
 بادئين بأسفل هذا الجدول . مثلا
 $7 = 2 + 5$ ، $17 = 2 + 5 + 10$
 وهكذا .

ويمكن الحصول على هذه القيم أيضاً
 بطرح كل قيمة بالممود الشافى من جدول
 المسألة ٢-١٤ من التكرار الكلى 65. مثلا
 $57 = 65 - 8$ ، $47 = 65 - 18$
 وهكذا .

جدول ٢-١٠

الأجور التكرار المتجمع النازل
 « أو أكثر »

65	أو أكثر	£50-00
57	أو أكثر	60-00
47	أو أكثر	70-00
31	أو أكثر	80-00
17	أو أكثر	90-00
7	أو أكثر	100-00
2	أو أكثر	110-00
0	أو أكثر	120-00

٢-١٦ من المنحنى التكرارى المتجمع بالمسألة ٢-١٤ أو ٢-١٥ قدر عدد العاملين الذين يحصلون على دخل .

(أ) أقل من £88.00 شهرياً .

(ب) £96.00 أو أكثر شهرياً .

(ج) على الأقل £63.00 ولكن لا يقل عن £75.00 شهرياً .

الحل :

(أ) بالرجوع إلى المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد « أقل من » المسألة ٢-١٤ ، ارسم خطاً رأسياً يتقاطع مع محور الأجر عند £88.00 . هذا الخط يقابل المنحنى المتجمع الصاعد عند النقطة التى أحداثياتها (45, 88) وهذا فإن عدد العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من £ 88.00 شهرياً هو 45 .

(ب) فى المنحنى التكرارى المتجمع النازل أو أكثر بالمسألة ٢ - ١٥ ارسم خطاً رأسياً عند £96.00 . هذا الخط يقابل المنحنى عند النقطة التى أحداثياتها (11, 96) وهذا فإن هناك 11 عاملاً يحصلون على دخل £96.00 أو أكثر . ومن الممكن الحصول على نفس النتيجة باستخدام المنحنى المتجمع الصاعد « أقل من » برسم خط رأسى عند £ 96.00 حيث نجد أن هناك 54 عاملاً يحصلون على دخل أقل من £96.00 وهذا فإن $11 = 54 - 65$ عاملاً يحصلون على دخل £96.00 أو أكثر .

(ج) باستخدام المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد « أقل من » بالمسألة ٢ - ١٤ نجد أن :

عدد العاملين المطلوب = عدد العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من £75.00

= عدد العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من £63.00 : $15 = 11 - 26$

لاحظ أن النتيجة السابقة يمكن الحصول عليها بالاستكمال فى جدول التكرارات المتجمعة ، على سبيل المثال فإن النتيجة التى حصلنا عليها فى (أ) يمكن الحصول عليها كالتالى : بما أن £88.00 هى $8/10$ أو $4/5$ المسألة بين £80 و £90 فإن رقم العاملين المطلوب يجب أن يكون $4/5$ المسافة بين القيم المقابلة وهى 34 و 48 (أنظر جدول المسألة ٢ - ١٤) . ولكن $4/5$ الطريق بين 34, 48 هو $11 = 48 - 34$ فإن رقم العاملين المطلوب هو $45 = 34 + 11$.

جدول ٢-١١

عدد الصور	عدد الرميات (التكرار)
0	38
1	144
2	342
3	287
4	164
5	25
	المجموع 1000

٢ - ١٧ خمسة بنسات رميت 1000 مرة وفى كل مرة سجل عدد

البنسات التى تظهر الصورة . سجل عدد الرميات التى ظهر

فيها 0, 1, 2, 3, 4, 5 صورة بالجدول ٢ - ١١ .

(أ) ارسم هذه البيانات .

(ب) كون جدولاً تظهر فيه النسبة المئوية للمراتب التى

تظهر بها الصورة أقل من 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

(ج) ارسم بيانات الجدول الذى حصلت عليه فى (ب) .

الحل :

(أ) يمكن التعبير بيانياً عن هذه البيانات كما فى الشكل

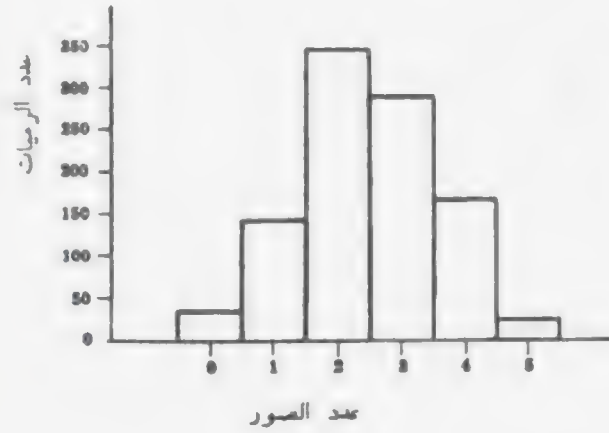
٢ - ١٠ أو ٢ - ١١ .

الشكل ٢ - ١٠ يبدو أنه أكثر ملاءمة لتمثيل هذه البيانات حيث ان عدد الصور لا يمكن ان يكون 1.5

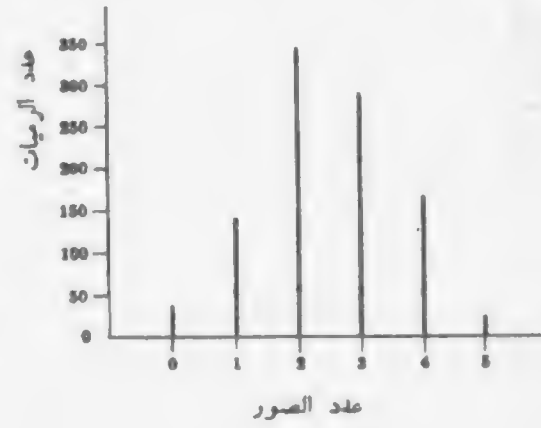
أو 3.2 مثلاً . وهذا الشكل هو صورة من صور الأعمدة البيانية حيث عرض العمود هو الصفر . ويسمى أحياناً

بالشكل القضيى . ويستخدم على وجه الخصوص عندما تكون البيانات متقطعة .

الشكل ٢ - ١١ يمثل المدرج التكرارى للبيانات . لاحظ أن المساحة الكلية للمدرج التكرارى هو التكرارات الكلية 1000 كما يجب أن تكون . عند التمثيل البياني باستخدام المدرج التكرارى أو المضلع التكرارى فإنه من الضروري معالجة البيانات كما لو كانت متصلة . وسوف يتضح فيما بعد أن هذه الطريقة مفيدة . لاحظ أننا قد سبق أن استغلنا المدرج التكرارى والمضلع التكرارى لبيانات متقطعة في بيانات المسألة ٢ - ١٠ .



شكل ٢ - ١١



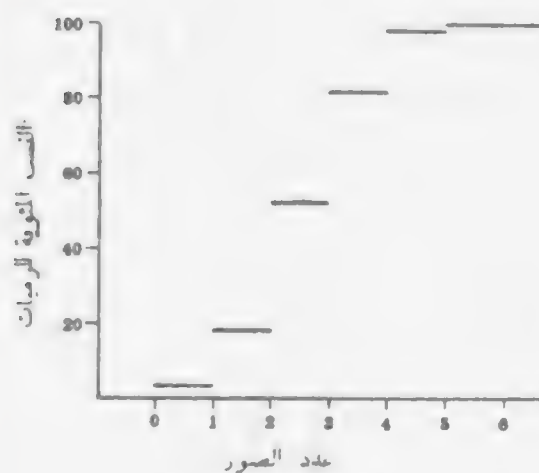
شكل ٢ - ١٠

(ب) بالرجوع إلى بيانات الجدول ٢ - ١٢ نجد أنه يوضح التوزيع التكرارى المتجمع والتوزيع التكرارى المتجمع النسبي (نسب مئوية) لعدد الصور .

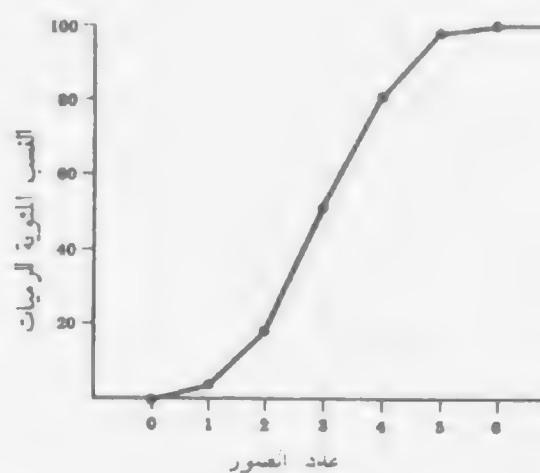
يجب أن نلاحظ أن البيانات « أقل من 1 » ، « أقل من 2 » وهكذا من الممكن أن تكتب « أقل من أو يساوى 0 » « أقل من أو يساوى 1 » وهكذا .

جدول ٢ - ١٢

عدد الصور	عدد الرميّات (تكرار متجمع)	النسبة المئوية لعدد الرميّات والتكرار المتجمع النسب المئوية
0	0	0.0
أقل من 1	38	3.8
أقل من 2	182	18.2
أقل من 3	524	52.4
أقل من 4	811	81.1
أقل من 5	975	97.5
أقل من 6	1000	100.0



الشكل ٢ - ١٢



الشكل ٢ - ١٣

(ج) الشكل المطلوب يمكن تمثيله إما بالشكل ١٢ - ٢ أو الشكل ١٣ - ٢ .

الشكل ١٢ - ٢ أكثر ملاءمة لتمثيل البيانات المتقطعة ، حيث أن النسب المئوية للرميات حيث عدد الصور أقل من 2 يساوى النسب المئوية للرميات حيث عدد الصور أقل من 1.75 أو 1.56 أو 1.23 . بحيث أن النسبة 18.2% يجب أن تظهر كتمثيل لهذه القيم . (موضحة بالخط الأفق) .

الشكل ١٣ - ٢ يظهر المضلع التكرارى المتجمع أو المنحنى التكرارى المتجمع لهذه البيانات وبه تعالج البيانات كما لو كانت بيانات متصلة

لاحظ أن الأشكال ١٢ - ٢ و ١٣ - ٢ يقابلان على الترتيب الأشكال ١٠ - ٢ ، ١١ - ٢ في الجزء (أ)

المنحنيات التكرارية والمنحنيات التكرارية المتجمعة الممهدة

١٨ - ٢ بيانات الـ 100 طالب في جامعة XYZ (أنظر صفحة ٤٥) تمثل في الواقع عينة مأخوذة من 1546 طالب من طلبة هذه الجامعة . من البيانات المعطاة من العينة .

(أ) كون مضلعاً تكرارياً ممهداً للنسب المئوية (منحنى تكرارى) ، ثم

(ب) كون منحنى تكرارياً متجمعاً صاعداً « أقل من » للنسب المئوية بحيث يكون ممهداً

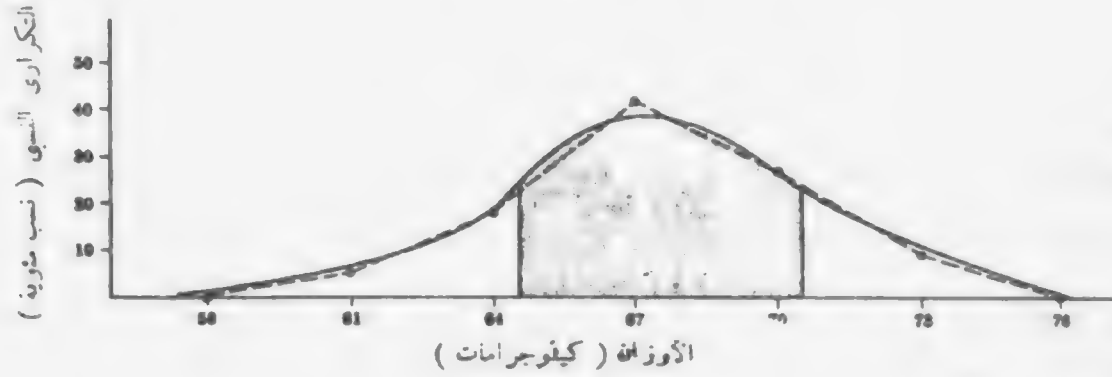
(ج) من بيانات (أ) ، (ب) قدر عدد الطلبة في الجامعة الذين تقع أوزانهم بين 65 و 70 kg . ماهى الفروض التى يجب أن تضعها .

(د) هل من الممكن استخدام هذه النتائج لتقدير نسبة الذكور في الولايات المتحدة الذين تقع أوزانهم بين 65 و 70 kg ؟

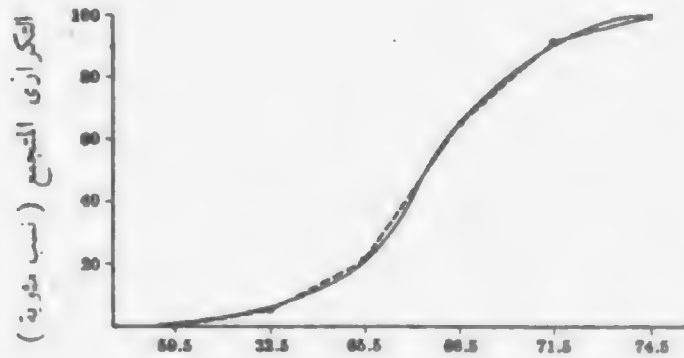
الحل :

(أ) ، (ب) في الشكلين ١٤ - ٢ ، ١٤ - ٢ نجد أن الخطوط المتقطعة تمثل المصنع التكرارى والمنحنى التكرارى المتجمع وقد حصلنا عليهما من المخطى في صفحتى (٤٩ ، ٤٨) .

والمنحنى الممهد المطلوب يظهر في الشكل بالخطوط الثقيلة وقد حصلنا عليه بتقريب الخطوط المتقطعة بخط ممهد .
من الناحية العملية فن الأسهل تمهيد المنحنى التكرارى المتجمع بحيث نحصل عليه أولا ثم نحصل على المدرج التكرارى الممهد بقراءة القيم من المنحنى التكرارى المتجمع الممهد .



شكل ١٤ - ٢



الأوزان (كيلوجرامات)

شكل ١٥ - ٢

(ج) إذا كانت العينة المكونة من 100 طالب مثله للمجتمع المكون من 1546 طالب ، فإن المنحنيات الممهدة في الأجزاء (أ) ، (ب) من الممكن اعتبارها المنحنى التكرارى النسبى والمنحنى المتجمع النسبى للمجتمع . هذا الفرض صحيح فقط في حالة ما إذا كانت العينة عشوائية ، بمعنى أن فرصة كل طالب في اختياره ضمن العينة مساوية لفرصة أى طالب آخر .

وبما أن الأوزان بين 65 و 70 kg مسجلة إلى أقرب كيلوجرام فإنها تمثل مثلاً الأوزان بين 64.5 و 70.5 kg ، ونسبة الطلبة في المجتمع الذين لهم هذه الأوزان من الممكن الحصول عليها بقسمة المساحة المظلة في الشكل ٢ - ١٤ على المساحة الكلية المحصورة بين الخط الممهد ومحور السينات .

ومن السهل استخدام الشكل ٢ - ١٤ . ومنه نجد أن

$$\text{نسبة الطلبة الذين تقل أوزانهم عن } 70.5 \text{ kg} = 82\%$$

$$\text{نسبة الطلبة الذين تقل أوزانهم عن } 64.5 \text{ kg} = 18\%$$

$$\text{ولهذا فإن أوزان الطلبة بين 65 و } 70 \text{ kg وهي } 64\% = 18\% - 82\%$$

وبهذا فإن عدد الطلبة في الجامعة الذين تقع أوزانهم بين 65 و 70 kg إلى أقرب كيلوجرام

$$989 = 1546 \times 64\%$$

ويمكن التعبير بصورة أخرى عما سبق بالقول بأن احتمال أو فرصة شخص في أن يختار بصورة عشوائية من 1546 طالب ويكون وزنه بين 65 و 70 kg هو 64% ، 0.64 أو 64 من 100 وهذه الصلة بالاحتمال (سندر بها في الفصل السادس) فإن المنحنى التكراري النسبي يسمى في أغلب الأحيان بالمنحنى الاحتمالية أو التوزيعات الاحتمالية .

(د) من الممكن اعتبار النسبة المطلوبة هي 64% (بدرجة أكبر من عدم التأكد عما سبق) في حالة ما إذا كنا مقتنعين بأن العينة المكونة من 100 طالب المسحوبة من المجتمع الكلي للذكور بالولايات المتحدة هي عينة عشوائية وعلى أية حال فإن هذا يبدو غير محتمل لعدة أسباب منها (١) من الممكن أن يكون بعض طلبة الكليات لم يصلوا إلى أقصى وزن لهم (٢) الأجيال الجديدة قد تميل لأن تكون أثقل وزناً من آبائهم

مسائل إضافية

٢ - ١٩ (أ) رتب الأرقام 12, 56, 42, 21, 5, 18, 10, 3, 61, 34, 65, 24 في - نظومة ،

(ب) حدد المدى

ج : (ب) 62

٢ - ٢٠ الجدول ٢ - ١٣ يبين التوزيع التكراري للعمر الانتاجي ل 400 من لمبات الراديو التي أختبرت في شركة L&M

للمبات . بالرجوع لهذا الجدول . عين

(أ) الحد الأعلى للفئة الخامسة

(ب) الحد الأدنى للفئة الثامنة

جدول ٢ - ١٣

عدد المببات	العمر الإنتاجي (بالساعات)
14	300 - 399
46	400 - 499
58	500 - 599
76	600 - 699
68	700 - 799
62	800 - 899
48	900 - 999
22	1000 - 1099
6	1100 - 1199
الإجمالي 400	

(ج) مركز الفئة السابعة

(د) الحدود الحقيقية للفئة الأخيرة

(هـ) طول الفئة

(و) تكرار الفئة الرابعة

(ز) التكرار النسبي للفئة السادسة

(ح) النسبة المئوية للمببات التي عمرها الإنتاجي لا يتجاوز 600 ساعة

(ط) النسبة المئوية للمببات التي يزيد عمرها الإنتاجي أو يساوي

900 ساعة

(ي) النسبة المئوية للمببات التي لا يقل عمرها الإنتاجي عن 500

ولكن يقل عن 1000 ساعة

ج : (أ) 799 (ب) 1000 (ج) 949.5 (د) 1099.5, 1199.5 (هـ) 100 ساعة (و) 76

(ز) $62/400 = 0.155$ or 15.5% (ح) 29.5% (ط) 19.0% (ي) 78.0%

٢١-٢ كون (أ) مدرجاً تكرارياً . (ب) مضمناً تكرارياً للتوزيع التكراري للمسألة السابقة .

٢٢-٢ بيانات المسألة ٢٠ - ٢ كون (أ) التوزيع التكراري النسبي (ب) المدرج التكراري النسبي (ج) المفضل التكراري النسبي .

٢٣-٢ بيانات المسألة ٢٠ - ٢ كون

(أ) التوزيع التكراري المتجمع .

(ب) التوزيع التكراري المتجمع النسبي (أو لنسب المئوية) .

(ج) المنحنى التكراري المتجمع .

(د) المنحنى التكراري المتجمع النسبي . (لاحظ أن المقصود عادة بالمنحنى التكراري المتجمع هو المنحنى المستخدم فيه

الأساس * أقل من * أي المنحنى التكراري المتجمع الصاعد هذا ما لم يذكر خلاف ذلك) .

٢٤-٢ حل المسألة السابقة عندما تتجمع التكرارات على الأساس * أو أكثر * .

٢٥-٢ قدر نسبة المببات في المسألة ٢٠ - ٢ التي أعمارها الإنتاجية :

(أ) أقل من 560 ساعة .

(ب) 970 أو أكثر ساعة .

(ج) بين 620 و 890 ساعة .

ج : (أ) 24% (ب) 11% (ت) 46% .

٢ - ٢٦ القطر الداخلي لجلبة مستديرة منتجة بواسطة إحدى الشركات يمكن قياسها إلى أقرب وحدة من مائة من المليمترات . إذا كانت مراكز الفئات للتوزيع التكراري لهذه الأقطار معطاه بالمليمترات هي
3.21, 3.24, 3.27, 3.30, 3.33, 3.36

أوجد :

- (أ) طول الفئة . (ب) الحدود الحقيقية للفئات (ج) حدود الفئة .
ج : (أ) 0.03 mm (ب) 3.195, 3.225, 3.255, ..., 3.375 mm (ج) 3.20 — 3.22, 3.23 — 3.25, 3.26 — 3.28, ..., 3.35 — 3.37

٢ - ٢٧ الجدول التالي يبين الأقطار بالمليمترات لعينه من 60 من رلمان البلي مصنوعة في شركة ما . كون التوزيع التكراري للأقطار مستخدماً طول فئة ملائم .

7.38	7.29	7.43	7.40	7.36	7.41	7.35	7.31	7.26	7.37
7.28	7.37	7.36	7.35	7.24	7.33	7.42	7.36	7.39	7.35
7.45	7.36	7.42	7.40	7.28	7.38	7.25	7.33	7.34	7.32
7.33	7.30	7.32	7.30	7.39	7.34	7.38	7.39	7.27	7.35
7.35	7.32	7.35	7.27	7.34	7.32	7.36	7.41	7.36	7.44
7.32	7.37	7.31	7.46	7.35	7.35	7.29	7.34	7.30	7.40

- ٢٠ - ٢٨ لبيانات المسألة السابقة كون (أ) مدرج تكراري (ب) مضلع تكراري نسبي
(ج) منحنى تكراري نسبي (د) مدرج تكراري نسبي (هـ) مضلع تكراري نسبي
(و) التوزيع التكراري المتجمع (ز) التوزيع التكراري المتجمع النسبي
(ح) المنحنى التكراري المتجمع (ط) المنحنى التكراري المتجمع النسبي .

٢ - ٢٩ من نتائج المسألة ٢ - ٢٨ أوجد نسبة رولمان البلي الذي قطره

- (أ) يزيد عن 0.732 mm (ب) ليس أكبر من 0.736 mm
(ج) بين 0.730 mm و 0.738 mm .

قارن نتائجك بالنتائج التي تحصل عليها مباشرة من البيانات الخام للمسألة ٢ - ٢٧

٢ - ٣٠ حل المسألة ٢ - ٢٨ مستخدماً بيانات المسألة ٢ - ٢٠ .

٢ - ٣١ يظهر الجدول ٢ - ١٤ التوزيع النسبي لإجمالي دخول الذكور الذين أعمارهم 14 سنة فأكثر في الولايات المتحدة في سنة 1956 باستخدام هذا الجدول أجب عن الأسئلة التالية :

- (أ) ماهو طول الفئة الثانية ؟ الفئة السابعة ؟
(ب) ماهو عدد أطوال الفئات المختلفة بالجدول ؟
(ج) ماهو عدد الفئات المفتوحة ؟

النسبة المئوية	الدخل بالدولارات
17.2	Under \$1000
11.7	1000 - 1999
12.1	2000 - 2999
14.8	3000 - 3999
15.9	4000 - 4999
11.9	5000 - 5999
12.7	6000 - 9999
3.6	10000 and over

المصدر : مكتب التعداد

- (د) كيف يمكن كتابة الفئة الأولى بحيث يكون طولها مساوياً لطول الفئة الثانية ؟
 (هـ) ماهو مركز الفئة الثانية ؟ الفئة السابعة ؟
 (و) ماهي الحدود الحقيقية للفئة الرابعة ؟
 (ز) ماهي نسبة الذكور الذين يحصلون على دخل \$4000 أو أكثر ؟ أقل من \$3000 ؟

(ح) ماهي نسبة الذكور الذين يحصلون على دخل على الأقل \$3000 ولكن لا يزيد على \$5000 ؟

(ط) ماهي نسبة الذكور الذين يحصلون على دخل بين \$6300 ، \$3000 . ماهي الفروض المستخدمة في هذا الحساب ؟
 (ي) لماذا لا يساوي مجموع النسب 100% ؟

- ج : (أ) \$4000 ، \$1000 (ب) أربعة (على الرغم من أن من حيث الدقة فإن الفئة الأولى ليس لها طول محدد)
 (ج) واحد (على الرغم من أن الفئة الأولى تظهر كثافة مفتوحة ، ولكنها في الواقع بديل عن كتابة \$999.99-0) (د) \$999-0 (هـ) \$1499.50 ، ولكثير من الأغراض العملية يمكن كتابتها \$8000 ، \$1500 على التوالي . (و) \$3999.50 ، \$2999.50
 (ز) 41.0% ، 44.1% . (ح) 30.7% . (ط) 42.0%
 (ي) نظراً لأخطاء التقريب في حساب النسب المئوية .

٢٢ - ٢ (أ) لماذا يستحيل تكوين مدرج تكراري نسبي أو مصنع تكراري للتوزيع الموضح بالمسألة السابقة

- (ب) كيف يمكن تعديل التوزيع بحيث يمكن تكوين المدرج التكراري النسبي أو المصنع التكراري النسبي ؟
 (ج) نفذ التكوين باستخدام التعديلات الموضحة في (د) .

٢٣ - ٢ (أ) كون المدرج التكراري النسبي المعهد والمنحنى التكراري النسبي المقابلين لبيانات المسألة ٢ - ٢٠ .

- (ب) من النتائج (أ) قدر احتمال أن تحترق لمبة قبل 600 ساعة
 (ج) ناقش المخاطرة أو الفرصة التي يتحملها المصنع إذا ضمن أن اللعبة ستستمر صالحة 425 ساعة ؟ 875 ساعة ؟
 (د) إذا قدم المصنع ضماناً برد ثمن اللعبة إذا تلفت خلال 90 يوماً . ما هو احتمال أنه سيقوم برد الثمن إذا افتراضنا أن اللعبة تستخدم 4 ساعات يومياً ؟ 8 ساعات يومياً ؟

ج : (ب) 0.30 (ج) 0.52 ، 0.008 .

٢٤ - ٢ (أ) ارم أربع عملات خسين مرة وبمجل في جدول عدد الصور في كل رمية (ب) كون توزيعاً تكرارياً يظهر به عدد الرميات التي ظهر بها 0, 1, 2, 3, 4 صورة . (ج) كون توزيعاً نسبياً يقابل (ب) . (د) قارن النسب التي حصلت عليها في (ج) بالتوزيع النظري 6.25% ، 25% ، 37.5% ، 25% ، 6.25% (بالتناسب مع (1, 4, 6, 4, 1) والتي يمكن الحصول عليها باستخدام قواعد الاحتمالات .

الفصل الثالث

الوسط والوسيط والمتوال والمقاييس الأخرى للنزعة المركزية

رمز الدليل أو الرقم الجانبي الأسفل

الرمز X_j (يقرأ " X دليل j ") يمثل أى من القيم $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ التى يأخذها المتغير X وعددها N .
الحرف j فى X_j الذى يمكن أن يكون أى رقم $1, 2, 3, \dots, N$ يسمى الدليل أو الرقم الجانبي الأسفل . ومن الواضح
أن أى حرف آخر غير j مثل i, k, p, q, s يمكن أيضا استخدامه .

رقم التجميع

الرمز $\sum_{j=1}^N X_j$ يستخدم للدلالة على مجموع كل الـ X_j ابتداء من $j = 1$ إلى $j = N$ بالتعريف .

$$\sum_{j=1}^N X_j = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N$$

وإذا لم يكن هناك أى غموض محتمل فإننا نعبّر عن هذا المجموع بشكل أبسط بالرمز $\sum X_j$ or $\sum X$,

الرمز Σ هو حرف التاج اليونانى سيجما ونعنى به هنا المجموع .

$$\sum_{j=1}^N X_j Y_j = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3 + \dots + X_N Y_N \quad \text{مثال ١} -$$

$$\sum_{j=1}^N a X_j = a X_1 + a X_2 + \dots + a X_N \quad \text{مثال ٢} -$$

$$a(X_1 + X_2 + \dots + X_N) = a \sum_{j=1}^N X_j$$

حيث a ثابت - وبشكل أبسط $\Sigma aX = a \Sigma X$.

$$\Sigma(aX + bY - cZ) = a \Sigma X + b \Sigma Y - c \Sigma Z \quad \text{مثال ٣} - \text{ إذا كانت } a, b, c \text{ ثوابت}$$

أنظر المألة ٣ - ٢

المتوسطات ومقاييس النزعة المركزية

المتوسط هو القيمة النموذجية أو المثلة لمجموعة من البيانات - وحيث أن مثل هذه القيمة النموذجية تميل إلى الوقوع في المركز داخل مجموعة بيانات مرتبة حسب قيمها ، فإن المتوسطات تسمى أيضا بمقاييس النزعة المركزية . ويمكن أن نعرف صورا عديدة للمتوسطات وإن كان الأكثر شيوعا الوسط الحسابي أو باختصار الوسط ، الوسيط ، النوال ، الوسط الهندسي والوسط التوافقي - وكل منهما له مميزات وعيوبه وهذا يعتمد على البيانات والهدف من استخدامه .

الوسط الحسابي

الوسط الحسابي أو الوسط للمجموعة N من الأرقام $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ ويرمز له بالرمز \bar{X} (ويقرأ "X bar") ويعرف كالتالي

$$(1) \quad \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N}{N} = \frac{\sum_{j=1}^N X_j}{N} = \frac{\Sigma X}{N}$$

مثال : الوسط الحسابي للأرقام 8, 3, 5, 12, 10 هو

$$\bar{X} = \frac{8 + 3 + 5 + 12 + 10}{5} = \frac{38}{5} = 7.6$$

إذا كانت الأرقام X_1, X_2, \dots, X_K تحدث f_1, f_2, \dots, f_K مرة على الترتيب (بمعنى أنها تحدث بتكرارات (f_1, f_2, \dots, f_K) فإن الوسط الحسابي سيكون

$$(2) \quad \bar{X} = \frac{f_1 X_1 + f_2 X_2 + \dots + f_K X_K}{f_1 + f_2 + \dots + f_K} = \frac{\sum_{j=1}^K f_j X_j}{\sum_{j=1}^K f_j} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fX}{N}$$

حيث $N = \Sigma f$ هو مجموع التكرارات أي مجموع عدد الحالات .

مثال : إذا كانت 5, 8, 6, 2 تحدث بتكرارات 3, 2, 4, 1 على الترتيب فإن الوسط الحسابي سيكون

$$\bar{X} = \frac{(3)(5) + (2)(8) + (4)(6) + (1)(2)}{3 + 2 + 4 + 1} = \frac{15 + 16 + 24 + 2}{10} = 5.7$$

الوسط الحسابي المرجح

في بعض الأحيان نقرن بعض الأرقام X_1, X_2, \dots, X_K بمعاملات ترجيح أو أوزان w_1, w_2, \dots, w_K وهذه تعتمد على الدلالة أو الأهمية المرتبطة بهذا الأرقام . في هذه الحالة

$$(3) \quad \bar{X} = \frac{w_1 X_1 + w_2 X_2 + \dots + w_K X_K}{w_1 + w_2 + \dots + w_K} = \frac{\Sigma wX}{\Sigma w}$$

يسمى بالوسط الحسابي المرجع . لاحظ أوجه الشبه بالمعادلة (٢) التي يمكن اعتبارها وسطا حسابيا مرجحا بأوزان

$$f_1, f_2, \dots, f_K$$

مثال إذا كان الامتحان النهائي في مقرر أعطي وزنا ثلاثة أمثال الامتحانات الشفهية وإذا حصل طالب في الامتحان النهائي على 85 وفي الامتحانات الشفهية على 70, 90 فإن متوسط تقديره هو .

$$\bar{X} = \frac{(1)(70) + (1)(90) + (3)(85)}{1+1+3} = \frac{415}{5} = 83$$

خصائص الوسط الحسابي

(١) المجموع الجبري لانحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوى صفرا .

مثال :

انحرافات الأرقام 8, 3, 5, 12, 10 عن وسطها الحسابي 7.6 هو 7.6 - 5 = 2.6, 7.6 - 3 = 4.6, 7.6 - 8 = -0.6, 7.6 - 12 = -4.4, 7.6 - 10 = -2.4 . ومجموعه الجبري .
 $0.4 = 4.6 - 2.6 + 4.4 + 2.4 = 0$

(ب) مجموع مربعات انحرافات مجموعة من الأرقام X_j عن أي رقم a يكون أصغر ما يمكن في حالة واحدة فقط إذا كانت $a = \bar{X}$. أنظر المسألة ٤ - ٢٧ الفصل الرابع

(ج) إذا كان متوسط f_1 من الأرقام هو f_2, m_1 من الأرقام هو m_2, \dots, f_K من الأرقام متوسطها m_K فإن متوسط جميع الأرقام هو

$$(١) \quad \bar{X} = \frac{f_1 m_1 + f_2 m_2 + \dots + f_K m_K}{f_1 + f_2 + \dots + f_K}$$

أي الوسط الحسابي المرجح لجميع الأوساط . أنظر المسألة ٣-١٢ .

(د) إذا كانت A أي وسط حسابي افتراضي أو تخمين (والذي يمكن أن يكون أي رقم) وإذا كان $d_j = X_j - A$ هو انحرافات X_j عن A فإن المعادلات (١) ، (٢) سيصبحان على الترتيب .

$$(٥) \quad \bar{X} = A + \frac{\sum_{j=1}^N d_j}{N} = A + \frac{\sum d}{N}$$

$$(٦) \quad \bar{X} = A + \frac{\sum_{j=1}^K f_j d_j}{\sum_{j=1}^K f_j} = A + \frac{\sum f d}{N}$$

حيث $N = \sum_{j=1}^K f_j = \sum f$ لاحظ أن (٥) و (٦) يمكن تلخيصهما بالمعادلة $\bar{X} = A + \bar{d}$ (أنظر المسألة ١٨-٢).

الوسط الحسابي محسوباً من بيانات مجمعة

عندما تعرض البيانات في توزيع تكرارى ، فإن جميع القيم التي تقع داخل فئة معينة تعتبر أنها مطابقة لمركز الفئة أو منتصف مدى الفئة . الصيغ (٢) ، (٦) يمكن استخدامها للبيانات المجمعة إذا اعتبرنا X_j مركز الفئة و f_j التكرار المقابل لها ، A أى مركز فئة إفتراضى أو نمحن $d_j = X_j - A$ انحرافات X_j عن A .

الحساب باستخدام الصيغ (٢) ، (٦) يسميان أحياناً بالطريقة المطولة والطريقة المختصرة على الترتيب . (أنظر المسائل ١٥-٣ و ٢٠-٣) . إذا كانت أطوال الفئات متساوية وتساوى C ، والانحرافات $d_j = X_j - A$ يمكن التعبير عنها بالصورة cu_j حيث u_j يمكن أن يكون عدداً صحيحاً موجباً أو سالباً أو صفراً ، أى $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. وهذا فإن الصيغة (٦) تصبح

$$(٧) \quad \bar{X} = A + \left(\frac{\sum_{j=1}^K f_j u_j}{N} \right) C = A + \left(\frac{\sum f u}{N} \right) C$$

والتي تكافئ المعادلة $\bar{X} = A + C\bar{u}$ (أنظر المسألة ٢١-٣) . وهذه تسمى بطريقة الترميز عند حساب الوسط الحسابي . وهذه الطريقة مختصرة جداً ويجب استخدامها دائماً للبيانات المجمعة عندما تكون أطوال الفئات متساوية . (أنظر المسائل ٢٢-٣ و ٢٣-٣) . لاحظ أنه في طريقة الترميز فإن قيم المتغير X تحول إلى قيم المتغير u بالعلاقة $X = A + cu$.

الوسيط

الوسيط لمجموعة من الأرقام مرتبة حسب قيمها (في منظومة) هي القيمة التي في المنتصف أو الوسط الحسابي للقيمتين بالمنتصف .

مثال ١ — مجموعة الأرقام 3, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 8, 10 وسيطها هو 6.

مثال ٢ — مجموعة الأرقام 5, 5, 7, 9, 11, 12, 15, 18 وسيطها هو $\frac{1}{2}(9 + 11) = 10$.

وفي البيانات المجمعة فإن الوسيط نحصل عليه بالاستكمال ويجب كالاتى :

$$(٨) \quad \text{الوسيط} = L_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - (\sum f)_1}{f_{\text{median}}} \right) C$$

حيث

$$L_1 = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطة (أى الفئة التى يقع فيها الوسيط) .}$$

$$N = \text{عدد العناصر فى البيانات (مجموع التكرارات) .}$$

$$(\sum f)_1 = \text{مجموع التكرارات لجميع الفئات قبل الفئة الوسيطة .}$$

$$f_{\text{median}} = \text{تكرار الفئة الوسيطة .}$$

$$c = \text{طول الفئة الوسيطة .}$$

ويمكن التعبير هندسيا عن الوسيط بأنه القيمة X على الاحداثى السينى التى إذا رسم عندها عمود رأسى فإنه يقسم المدرج التكرارى إلى جزئين متساويين . يعبر عن هذه القيمة بـ X أحيانا بـ \hat{X} .

المنوال

المنوال لمجموعة من القيم هى القيمة التى تتكرر أكثر من غيرها أو القيمة الأكثر شيوعا . وقد لا يكون للقيم منوال وقد يوجد للقيم منوال ولكنه غير وحيد .

مثال ١ — المجموعة 2, 2, 5, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 18 لها منوال 9

مثال ٢ — المجموعة 3, 5, 8, 10, 12, 15, 16 ليس لها منوال .

مثال ٣ — المجموعة 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 7, 7, 9 لها منوالان هما 4, 7 وتسمى مجموعة ذات منوالين .

التوزيع الذى له منوال واحد يسمى وحيد المنوال

فى حالة البيانات المجمعة حيث يعبر عن البيانات بمنحنى تكرارى فإن المنوال هو قمة (أو قيم) X المقاسة لنقطة (أو نقط) النهاية العظمى للمنحنى . ويعبر أحيانا عن هذه القيمة بـ X بالرمز \hat{X}

ونحصل على المنوال من التوزيع التكرارى أو المدرج التكرارى بالصيغة :

$$(١) \quad \text{المنوال} = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) c$$

حيث

$$L_1 = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية (أى الفئة التى يقع فيها المنوال) .}$$

Δ_1 = زيادة تكرار الفئة المتوالية عن تكرار الفئة قبل المتوالية .

Δ_2 = زيادة تكرار الفئة المتوالية عن تكرار الفئة بعد المتوالية .

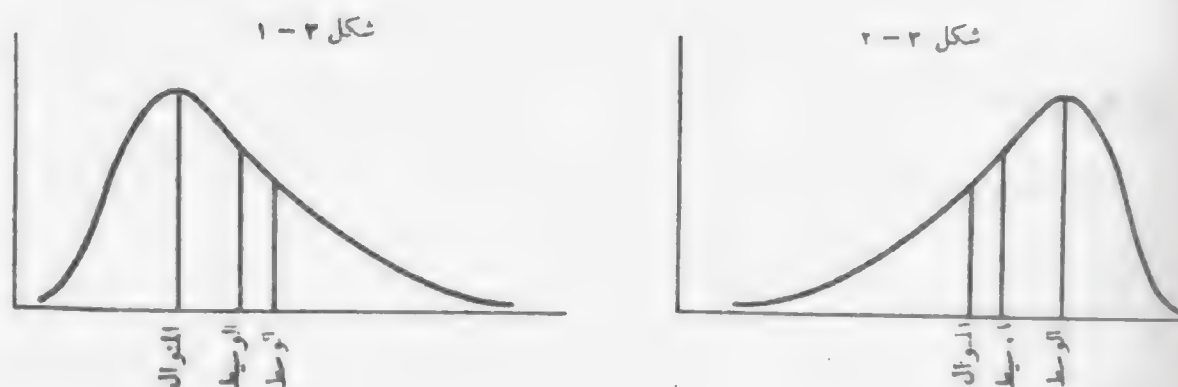
c = طول الفئة المتوالية .

علاقة اعتبارية بين الوسط والوسيط والمتوال

المنحنيات التكرارية وحيدة المتوال والبسيطة الالتواء (غير متائلة) تحقق العلاقة الاعتبارية .

$$(10) \quad \text{المتوسط} - \text{المتوال} = 3 \quad (\text{المتوسط} - \text{الوسيط})$$

في الأشكال ١-٣ و ٢-٣ أدناه يوضح الموضع النسبي للوسط والوسيط والمتوال للمنحنيات التكرارية المتوالية إلى اليمين والمنحنيات المتوالية إلى اليسار على الترتيب . في المنحنيات المتائلة يتطابق الوسط والوسيط والمتوال .



الوسط الهندسي

الوسط الهندسي G لمجموعة من N رقم $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ هو الجذر النوني لحاصل ضرب هذه الأرقام .

$$(11) \quad G = \sqrt[N]{X_1 X_2 X_3 \dots X_N}$$

مثال : الوسط الهندسي للأرقام 2, 4, 8 هو $4 = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{(2 \times 4 \times 8)}$: G

ومن الناحية العملية فإن الوسط الهندسي G يحسب باستخدام اللوغاريتمات (أنظر المسألة ٣-٣٥) . لحساب الوسط الهندسي للبيانات المجمعة أنظر المسائل ٣-٣٦ ، ٣-٣٧ ، ٣-٩١ .

الوسط التوافقي H :

الوسط التوافقي H لمجموعة من N رقم $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ هو مقلوب الوسط الحسابي لمقلوبات هذه القيم .

$$(12) \quad H = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{X_j}} = \frac{N}{\sum \frac{1}{X}}$$

ومن الناحية العملية فقد يكون من الأسهل أن نتذكر أن

$$(13) \quad \frac{1}{H} = \frac{\sum \frac{1}{X}}{N} = \frac{1}{N} \sum \frac{1}{X}$$

$$H = \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 3.43 \quad \text{مثال : الوسط التوافقي للأرقام 2, 4, 8 هو}$$

لحساب الوسط التوافقي للبيانات المجعة ، أنظر المائل ٣-٩٩ ، ٣-١٠٠ .

العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي والوسط التوافقي :

الوسط الهندسي لمجموعة من الأرقام الموجبة X_1, X_2, \dots, X_N أقل من أو يساوي وسطها الحسابي ولكنه أكبر من أو يساوي وسطها التوافقي .

$$(14) \quad H \leq G \leq \bar{X}$$

وتتحقق علامة التساوي إذا كانت الأرقام X_1, X_2, \dots, X_N متساوية

مثال : المجموعة 2, 4, 8 وسطها الحسابي 4.67 ووسطها الهندسي 4 ووسطها التوافقي 3.43

جذر متوسط المربعات (R.M.S) :

جذر متوسطات المربعات (R.M.S) أو الوسط التربيعي لمجموعة من الأرقام X_1, X_2, \dots, X_N يرمز له أحياناً بالرمز $\sqrt{\bar{X^2}}$ ويعرف كالتالي :

$$(15) \quad \text{R.M.S.} = \sqrt{\bar{X^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N X_j^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N}}$$

هذا النوع من المتوسط يستخدم بكثرة في التطبيقات الطبيعية .

مثال : جذر متوسط المربعات للأرقام 1, 3, 4, 5, 7 هو

$$\sqrt{\frac{1^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 7^2}{5}} = \sqrt{20} = 4.47$$

$$f_1X_1^2 + f_2X_2^2 + \dots + f_{20}X_{20}^2 \quad \sum_{j=1}^{20} f_j X_j^2 \quad (ج)$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_nb_n \quad \sum_{j=1}^n a_j b_j \quad (د)$$

$$f_1X_1Y_1 + f_2X_2Y_2 + f_3X_3Y_3 + f_4X_4Y_4 \quad \sum_{j=1}^4 f_j X_j Y_j \quad (هـ)$$

٣-٣ أثبت أن $\sum_{j=1}^N (aX_j + bY_j - cZ_j) = a \sum_{j=1}^N X_j + b \sum_{j=1}^N Y_j - c \sum_{j=1}^N Z_j$ حيث a, b and c أى ثوابت

الحل :

$$\begin{aligned} (aX_1 + bY_1 - cZ_1) &= (aX_1 + bY_1 - cZ_1) + (aX_2 + bY_2 - cZ_2) + \dots + (aX_N + bY_N - cZ_N) \\ &= (aX_1 + aX_2 + \dots + aX_N) + (bY_1 + bY_2 + \dots + bY_N) - (cZ_1 + cZ_2 + \dots + cZ_N) \\ &= a(X_1 + X_2 + \dots + X_N) + b(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N) - c(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N) \\ &= a \sum_{j=1}^N X_j + b \sum_{j=1}^N Y_j - c \sum_{j=1}^N Z_j \end{aligned}$$

$$\Sigma(aX + bY - cZ) = a\Sigma X + b\Sigma Y - c\Sigma Z \quad \text{أو باختصار}$$

٣-٤ المتغيران X ، Y بأخذان القيم

$$X_1 = 2, X_2 = -5, X_3 = 4, X_4 = -8 \text{ and } Y_1 = -3, Y_2 = -8, Y_3 = 10, Y_4 = 6$$

عل الترتيب . أحب

$$\begin{aligned} \Sigma XY^2 (ز) \quad \Sigma X (ا) \quad \Sigma Y (ب) \quad \Sigma XY (ج) \quad \Sigma X^2 (د) \quad \Sigma Y^2 (هـ) \quad \Sigma X (و) \quad \Sigma Y (ز) \quad \Sigma XY^2 (ح) \\ \Sigma(X+Y)(X-Y) \end{aligned}$$

الحل :

لاحظ أنه في كل حالة قد حذف الدليل Y في XY ومن المفهوم أن Σ تعنى $\sum_{j=1}^4$

$$\Sigma X \text{ مثلاً } \sum_{j=1}^4 X_j \text{ اختصار لـ}$$

$$\Sigma X = (2) + (-5) + (4) + (-8) = 2 - 5 + 4 - 8 = -7 \quad (ا)$$

$$\Sigma Y = (-3) + (-8) + (10) + (6) = -3 - 8 + 10 + 6 = 5 \quad (ب)$$

$$\Sigma XY = (2)(-3) + (-5)(-8) + (4)(10) + (-8)(6) = -6 + 40 + 40 - 48 = 26 \quad (ج)$$

$$\Sigma X^2 = (2)^2 + (-5)^2 + (4)^2 + (-8)^2 = 4 + 25 + 16 + 64 = 109 \quad (د)$$

$$\Sigma Y^2 = (-3)^2 + (-8)^2 + 10^2 + (6)^2 = 9 + 64 + 100 + 36 = 209 \quad (أ)$$

$$(\Sigma X)(\Sigma Y) \neq \Sigma XY \quad (ب) \quad \text{بإستخدام (أ) ، لاحظ أن} \quad (\Sigma X)(\Sigma Y) = (-7)(5) = -35 \quad (و)$$

$$\Sigma XY^2 = (2)(-3)^2 + (-5)(-8)^2 + (4)(10)^2 + (-8)(6)^2 = -190 \quad (ز)$$

$$\Sigma(X+Y)(X-Y) = \Sigma(X^2 - Y^2) = \Sigma X^2 - \Sigma Y^2 = 109 - 209 = -100 \quad (أ) ، \quad (ج) \quad \text{بإستخدام (ج) ،}$$

$$\sum_{j=1}^6 X_j(X_j-1) \quad (ب) \quad \sum_{j=1}^6 (2X_j+3) \quad (أ) \quad \text{احسب (أ) ،} \quad \sum_{j=1}^6 X_j^2 = 10 \quad , \quad \sum_{j=1}^6 X_j = -4 \quad \text{إذا كانت}$$

$$\sum_{j=1}^6 (X_j-5)^2 \quad (ج)$$

الحل :

$$\sum_{j=1}^6 (2X_j+3) = \sum_{j=1}^6 2X_j + \sum_{j=1}^6 3 = 2 \sum_{j=1}^6 X_j + (6)(3) = 2(-4) + 18 = 10 \quad (أ)$$

$$\sum_{j=1}^6 X_j(X_j-1) = \sum_{j=1}^6 (X_j^2 - X_j) = \sum_{j=1}^6 X_j^2 - \sum_{j=1}^6 X_j = 10 - (-4) = 14 \quad (ب)$$

$$\sum_{j=1}^6 (X_j-5)^2 = \sum_{j=1}^6 (X_j^2 - 10X_j + 25) = \sum_{j=1}^6 X_j^2 - 10 \sum_{j=1}^6 X_j + 25(6) = 10 - 10(-4) + 25(6) = 200 \quad (ج)$$

ومن الممكن حذف الدليل j إذا رغبتنا في ذلك وإستخدام Σ بدلاً من $\sum_{j=1}^6$ مادام هذا الاختصار مفهوماً .

الوسط الحسابي :

٦-٣ درجات طالب في ستة امتحانات هي 84, 91, 72, 68, 87 and 78 . أوجد الوسط الحسابي لهذه الدرجات

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{84 + 91 + 72 + 68 + 87 + 78}{6} = \frac{480}{6} = 80 \quad \text{الحل :}$$

في كثير من الأحيان يستخدم الاصطلاح المتوسط كمرادف للوسط الحسابي . ومن حيث النقة فهذا الإستخدام غير سليم حيث أن هناك متوسطات أخرى غير الوسط الحسابي .

٧-٣ سجل أحد العلماء العشرة قياسات التالية لأقطار أسطوانة فكانت :

38.8, 40.9, 39.2, 39.7, 40.2, 39.5, 40.3, 39.2, 39.8 and 40.6 millimetres . أوجد الوسط الحسابي

لقياسات .

الحل :

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{38.8 + 40.9 + 39.2 + 39.7 + 40.2 + 39.5 + 40.3 + 39.2 + 39.8 + 40.6}{10} = \frac{398.2}{10} = 39.8 \text{ mm}$$

... لاحظ

٨-٣ الأجر السنوي لأربعة رجال هو \$5000, \$6000, \$6500 and \$30 000. (أ) أوجد الوسط الحسابي للأجور

(ب) هل يمكن القول بأن هذا الوسط يمثل لهذه الأجور ؟

الحل :

$$\bar{X} = \frac{\$5000 + \$6000 + \$6500 + \$30\,000}{4} = \frac{\$45\,500}{4} = \$11\,875 \quad (1)$$

(بافتراض أن جميع الأرقام في الأجور المنطقتا معنوية) .

(ب) المتوسط \$11 875 ليس مثلاً للأجور بالتأكيد واعتبار هذا الرقم كوسط بدون تعليق أكثر عليه يؤدي إلى كثير

من الخطأ . فأحد العيوب الكبيرة في المتوسط هو شدة تأثره بالقيم المتطرفة .

٩-٣ أوجد الوسط الحسابي للأرقام 5, 3, 6, 5, 4, 5, 2, 8, 6, 5, 4, 8, 3, 4, 5, 4, 8, 2, 5, 4

الطريقة ١ :

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{5 + 3 + 6 + 5 + 4 + 5 + 2 + 8 + 6 + 5 + 4 + 8 + 3 + 4 + 5 + 4 + 8 + 2 + 5 + 4}{20} = \frac{96}{20} = 4.8$$

الطريقة ٢ :

هناك ست خمسات وثلاثتان وستتان وخمس أربعيات واثنان وثلاثة ثمانيات . إذن

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{\sum fX}{N} = \frac{(6)(5) + (2)(3) + (2)(6) + (5)(4) + (2)(2) + (3)(8)}{6 + 2 + 2 + 5 + 2 + 3} = \frac{96}{20} = 4.8$$

١٠-٣ من مائة رقم 20 أربعة ، 40 خمسة ، 30 ستة والباقي كانوا سبعات . أوجد الوسط الحسابي لهذه الأرقام .

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{\sum fX}{N} = \frac{(20)(4) + (40)(5) + (30)(6) + (10)(7)}{100} = \frac{530}{100} = 5.30$$

١١-٣ إذا كانت درجات طالب في الرياضة والطبيعة واللغة الانجليزية والصحة العامة هي على الترتيب 82 , 86 , 90 , 70 .

إذا كانت معاملات الترجيح (عدد ساعات المحاضرات الأسبوعية) لهذه المقررات هي 1, 3, 5, 3 أوجد

متوسط الدرجات بالتقريب .

الحل :

نستخدم الوسط الحسابي المرجح والأوزان المستخدمة لكل درجة هي معاملات الترجيح لكل مادة . إذن

$$\bar{X} = \frac{\sum wX}{\sum w} = \frac{(3)(82) + (5)(86) + (3)(90) + (1)(70)}{3 + 5 + 3 + 1} = 85$$

١٢-٣ في شركة بها 80 عاملا ، 60 يحصلون على \$3.0 في الساعة ، 20 يحصلون على \$2.00 في الساعة .
 (أ) أوجد متوسط دخولهم في الساعة (ب) هل الاجابة على (أ) لن تتغير إذا كان الـ 60 عاملا متوسط دخلهم في الساعة هو \$3.00 والـ 20 عاملا متوسط دخلهم في الساعة هو \$2.00 ؟ حقق اجابتك ؟
 (ج) هل تعتقد أن متوسط أجر الساعة ممثل للأجور ؟

الحل :

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{N} = \frac{(60)(\$3.00) + (20)(\$2.00)}{60 + 20} = \frac{\$220.00}{80} = \$2.75 \quad (1)$$

(ب) نعم ، النتيجة واحدة . لإثبات ذلك افرض أن f_1 رقم لها وسط m_1 و f_2 رقم لها وسط m_2 . يجب أن نثبت أن وسط جميع الأرقام هو

$$\bar{X} = \frac{f_1 m_1 + f_2 m_2}{f_1 + f_2}$$

إذا كان مجموع الـ f_1 رقم هو M_1 والـ f_2 رقم هو M_2 . فإنه من تعريف الوسط الحسابي .

$$m_1 = \frac{M_1}{f_1} \quad m_2 = \frac{M_2}{f_2}$$

أو $M_1 = f_1 m_1$ ، $M_2 = f_2 m_2$ وبما أن مجموع الـ $(f_1 + f_2)$ رقم هو $(M_1 + M_2)$ فإن الوسط الحسابي لجميع الأرقام هو

$$\bar{X} = \frac{M_1 + M_2}{f_1 + f_2} = \frac{f_1 m_1 + f_2 m_2}{f_1 + f_2}$$

وهو المطلوب . ومن السهل تعميم النتيجة .

(ج) من الممكن أن نقول أن \$2.75 « مثل » لأجر الساعة بمعنى أن أغلب العاملين يحصلون على \$3.00 في الساعة والذي لا يبعد كثيرا عن \$2.75 ويجب أن نذكر أنه عند تلخيص البيانات الرقمية في رقم واحد (كما هو الحال في الوسط) فإننا معرضين للوقوع في بعض الخطأ ومن المؤكد أن النتيجة ليست مضلة كما في المسألة ٣ - ٨

والواقع وحتى نكون في جانب الحرص فإن بعض التقدير « لتشتت » أو « التغير » في البيانات حول الوسط (أو الأوساط الأخرى) يجب أن يعطى . وهذا يسمى بالتشتت في البيانات . وسوف يعطى في الفصل الرابع مقاييس مختلفة له .

١٣-٣ أربع مجموعات من الطلبة مكونة من 18, 10, 20, 15 شخصا وكان متوسط أطوالهم 1.62, 1.48, 1.53, 1.40 metres على الترتيب أوجد متوسط الطول لكل الطلبة .

الحل :

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{(15)(1.62) + (20)(1.48) + (10)(1.53) + (18)(1.40)}{15 + 20 + 10 + 18} = 1.50 \text{ m}$$

١٤-٣ إذا كان متوسط الدخل السنوي للعامل الزراعي والعامل غير الزراعي في الولايات المتحدة هو \$3500, \$4500 على الترتيب ، فهل متوسط الدخل السنوي للمجموعتين معا يمكن أن يكون \$4000 ؟

الحل :

من الممكن أن يكون \$4000 في حالة ما إذا كان عدد العمال الزراعيين والعمال غير الزراعيين متساويا . لتحديد متوسط الدخل السنوي الحقيقي فيجب أن نعرف عدد العمال في كل مجموعة . فإذا كان ، على سبيل المثال مقابل كل عامل زراعي ١١ عاملا غير زراعي فإن المتوسط يصبح :

$$\bar{X} = \frac{(1)(\$3500) + (11)(\$4500)}{1 + 11} = \$4400$$

إلى أقرب \$100 . وهذا هو الوسط الحسابي المرجح .

١٥-٣ استخدم التوزيع التكراري للأوزان الموضح بالجدول في صفحة ٤٥ لإيجاد متوسط أوزان الـ 100 طالب في جامعة XYZ

الحل :

الحل موضح بالجدول ١-٣ . لاحظ أن كل الطلبة الذين أوزانهم 60—62 kg, 63—65 kg, etc. اعتبروا أن أوزانهم 61 و 64 kg, etc. وبهذا فإن المشكلة اختصرت لتصبح الحصول على متوسط وزن 100 طالب إذا كان 5 طلبة أوزانهم 61 kg ، 18 أوزانهم 64 kg وهكذا .

جدول ١-٣

الأوزان (kg)	مراكز الفئات (X)	التكرار (f)	(fX)
60 - 62	61	5	305
63 - 65	64	18	1152
66 - 68	67	42	2814
69 - 71	70	27	1890
72 - 74	73	8	584
		$N = \sum f = 100$	$\sum fX = 6745$

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{\sum fX}{N} = \frac{6745}{100} = 67.45 \text{ kg}$$

والعمليات الحسابية المطلوبة لحل قد تصبح مملة وخاصة إذا كانت الأرقام كبيرة والفئات كثيرة . وتوجد أساليب لتقليل من العمل المطلوب في مثل هذه الحالات . أنظر المسائل ٢٠-٣ و ٢١-٣ كأمثلة .

خصائص الوسط الحسابي :

١٩-٢ أثبت أن مجموع انحرافات X_1, X_2, \dots, X_N عن وسطها \bar{X} يساوى صفراً .

الحل :

إذا كان $d_1 = X_1 - \bar{X}, d_2 = X_2 - \bar{X}, \dots, d_N = X_N - \bar{X}$ انحرافات X_1, X_2, \dots, X_N عن وسطها \bar{X} فإن

$$\begin{aligned} \sum d_j &= \sum (X_j - \bar{X}) = \sum X_j - N\bar{X} \\ &= \sum X_j - N \left(\frac{\sum X_j}{N} \right) = \sum X_j - \sum X_j = 0 \end{aligned}$$

حيث استخدمنا \sum بدلا من $\sum_{j=1}^N$ ومن الممكن إذا أردنا حذف الدليل j في X_j على شرط أن يكون ذلك مفهوما .

١٧-٢ إذا كان $Z_1 = X_1 + Y_1, Z_2 = X_2 + Y_2, \dots, Z_N = X_N + Y_N$ أثبت أن $Z = \bar{X} + \bar{Y}$

الحل :

$$\text{بالتعريف} \quad \bar{X} = \frac{\sum X}{N}, \bar{Y} = \frac{\sum Y}{N}, \bar{Z} = \frac{\sum Z}{N} \quad \text{إذن}$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum Z}{N} = \frac{\sum (X + Y)}{N} = \frac{\sum X + \sum Y}{N} = \frac{\sum X}{N} + \frac{\sum Y}{N} = \bar{X} + \bar{Y}$$

حيث خففنا الدليل j في X, Y, Z و \sum تعني $\sum_{j=1}^N$

١٨-٢ (١) إذا كان N من الأعداد X_1, X_2, \dots, X_N لها انحرافات عن أى رقم A معطاة على الترتيب كالاتي :

$$d_1 = X_1 - A, d_2 = X_2 - A, \dots, d_N = X_N - A$$

أثبت أن

$$\bar{X} = A + \frac{\sum d_j}{N} = A + \frac{\sum d}{N}$$

(ب) إذا كانت تكرارات X_1, X_2, \dots, X_K هي على الترتيب f_1, f_2, \dots, f_K وكانت

$d_1 = X_1 - A, \dots, d_K = X_K - A$ أثبت أن النتيجة في (١) يحل بدلا منها

$$\bar{X} = A + \frac{\sum f_j d_j}{\sum f_j} = A + \frac{\sum f d}{N} \quad \text{حيث} \quad \sum_{j=1}^K f_j = \sum f = N$$

الطريقة ١ :

$$\text{بما أن } X_j = A + d_j, \quad d_j = X_j - A$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_j}{N} = \frac{\sum (A + d_j)}{N} = \frac{\sum A + \sum d_j}{N} = \frac{NA + \sum d_j}{N} = A + \frac{\sum d_j}{N}$$

حيث استخدمنا \sum بدلا من $\sum_{j=1}^N$ للاختصار

الطريقة ٢ :

بما أن $d = X - A$ أو $X = A + d$ ، حيث حفظنا الدليل في d و X ، وبهذا ، باستخدام المسألة

١٧-٣ .

$$\bar{X} = \bar{A} + \bar{d} = A + \frac{\sum d}{N}$$

حيث أن متوسط عدد من الثوابت كلها تساوى A هو A .

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\sum_{j=1}^K f_j X_j}{\sum_{j=1}^K f_j} = \frac{\sum f_j X_j}{N} = \frac{\sum f_j (A + d_j)}{N} = \frac{\sum A f_j + \sum f_j d_j}{N} = \frac{A \sum f_j + \sum f_j d_j}{N} \quad (\text{ب}) \\ &= \frac{AN + \sum f_j d_j}{N} = A + \frac{\sum f_j d_j}{N} = A + \frac{\sum f d}{N} \end{aligned}$$

لاحظ أن النتيجة حصلنا عليها أساسا من (١) باحلال $f_j d_j$ بدلا من d_j والتجميع من $j = 1$ إلى K بدلا من

$j = 1$ إلى N . النتيجة مكافئة لـ $\bar{X} = A + \bar{d}$ حيث $\bar{d} = (\sum f d)/N$

حساب الوسط الحسابي من بيانات مجمعة :

١٩-٣ استخدم طريقة المسألة ١٨-٣ (١) لإيجاد الوسط الحسابي للأرقام 5, 8, 11, 9, 12, 6, 14, 10 مستخدما «وسط» تخميني A قيمته (١) 9 (ب) 20 .

الحل :

(١) انحرافات الأرقام المعطاة عن 9 هي 1 و 5 و -3 و 3 و 0 و 2 و -1 و -4 ومجموع الانحرافات

هو $\sum d = 1 + 5 + 3 + 3 + 0 + 2 + 1 + 4 = 19$ إذن

$$\bar{X} = A + \frac{\sum d}{N} = 9 + \frac{19}{8} = 9.375$$

(ب) انحرافات الأرقام المعطاة عن 20 هي 10 و -6 و -14 و -8 و -11 و -9 و -12 و -15 و

و $\sum d = -85$ إذن .

$$\bar{X} = A + \frac{\sum d}{N} = 20 + \frac{(-85)}{8} = 9.375$$

٢-٢٠ استخدم طريقة المسألة ٢-١٨ (أ) لإيجاد الوسط الحسابي لأوزان الـ 100 طالب في جامعة XYZ (أنظر المسألة ٢-١٥).

الحل :

جدول ٢-٣

مركز الفئة X	انحرافات $d = X - A$	تكرارات f	fd
61	-6	5	-30
64	-3	18	-54
$A \rightarrow 67$	0	42	0
70	3	27	81
73	6	8	48
		$N = \sum f = 100$	$\sum fd = 45$

يمكن أن ينظم الحل كما في الجدول ٢-٢٠. أخذنا كوسط تخميني A مركز الفئة 67 (المقابل لأكبر تكرار)، عل الرغم من أن أي مركز فئة يمكن استخدامه كوسط تخميني. لاحظ أن الحسابات أسهل مما في المسألة ٢-١٥. ولاختصار العمل فمن الممكن أن نسير كما في المسألة ٢-١٢ حيث استفدنا من أن الانحرافات (العمود الثاني في الجدول) هي أرقام صحيحة مضاعفة لطول الفئة

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{N} = 67 + \frac{45}{100} = 67.45 \text{ kg}$$

٢-٢١ إذا كانت $d_j = X_j - A$ هي انحرافات مركز أي فئة X_j في توزيع تكراري من مركز فئة ما A . أثبت أنه إذا كانت كل الفئات لها نفس الطول c فإن (أ) الانحرافات مضاعفات لـ c بمعنى $d_j = cu_j$ حيث $u_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (ب) الوسط الحسابي يمكن حسابه من الصيغة

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\sum fu}{N} \right) c$$

الحل :

يمكن تمثيل النتيجة بجدول المسألة ٢-٢٠ حيث نلاحظ أن الانحرافات في العمود الثاني كلها مضاعفات لطول الفئة $c = 3 \text{ kg}$.

ولنثبت أن النتيجة صحيحة على وجه العموم، لاحظ أنه إذا كانت X_1, X_2, X_3, \dots مراكز فئات متتالية فإن الفرق المشترك في هذه الحالة يساوي c . بحيث $X_2 = X_1 + c$, $X_3 = X_1 + 2c$ وبشكل عام $X_j - X_1 = (j - 1)c$. وبهذا فالفرق بين مركزي فئتين X_p و X_q على سبيل المثال هو

$$X_p - X_q = [X_1 + (p - 1)c] - [X_1 + (q - 1)c] = (p - q)c$$

وهو مضاعف الرقم c .

(ب) باستخدام النتيجة في (أ) فإن انحرافات كل مراكز الفئات عن مركز فئة ما هي مضاعفات c بمعنى $d_j = cu_j$ وباستخدام المسألة ١٨-٣ (أ) فإن

$$\bar{X} = A + \frac{\sum f d_j}{N} = A + \frac{\sum f (cu_j)}{N} = A + c \frac{\sum f u_j}{N} = A + \left(\frac{\sum f u}{N} \right) c$$

لاحظ أن هذا يكافئ النتيجة $\bar{X} = A + c\bar{u}$ والتي يمكن الحصول عليها من $\bar{X} = A + \bar{d}$ بوضع $d = cu$ وملاحظة أن $\bar{d} = c\bar{u}$ (أنظر المسألة ١٨-٣).

جدول ٣-٣

X	u	f	fu
61	2	5	10
64	1	13	13
4 → 67	0	42	0
70	1	27	27
73	2	8	16
		$N = 100$	$\sum fu = 15$

٣-٣-٢ استخدم نتائج المسألة ٢١-٣ (ب) لإيجاد متوسط أوزان الـ 100 طالب في جامعة XYZ (أنظر المسألة ٣-٢٠).

الحل :

يمكن ترتيب الحل كما في الجدول ٣-٣ هذه الطريقة تسمى « طريقة الترميز » ويجب استخدامها كلما كان ذلك ممكناً

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\sum fu}{N} \right) c = 67 + \left(\frac{15}{100} \right) (3) = 67.45 \text{ kg}$$

٣-٣-٢ احسب متوسط الأجر الشهري للخمسة وستين عاملاً في شركة P and R من التوزيع التكراري في صفحة ٥٤ باستخدام (أ) الطريقة المطولة : (ب) طريقة الترميز.

الحل :

جدول ٣-٥

(ب)

X	u	f	fu
£55.00	-2	8	16
65.00	-1	10	10
A → 75.00	0	16	0
85.00	1	14	14
95.00	2	10	20
105.00	3	5	15
115.00	4	2	8
		$N = 65$	$\sum fu = 31$

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\sum fu}{N} \right) c = £75.00 + \left(\frac{31}{65} \right) (£10.00) = £79.77$$

جدول ٣-٤

(أ)

X	f	fX
£55.00	8	£440.00
65.00	10	650.00
75.00	16	1200.00
85.00	14	1190.00
95.00	10	950.00
105.00	5	525.00
115.00	2	230.00
	$N = 65$	$\sum fX = £5185.00$

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{N} = \frac{£5185.00}{65} = £79.77$$

قد يكون من الممكن افتراض أن هناك خطأ أدخل في الجدول السابقة حيث أن مراكز الفئات الفعلية هي £64.995, £54.995 بدلا من £65.00, £55.00 وإذا استخدمنا في الجدول ٣ - ٤ مراكز الفئات الحقيقية فإن \bar{X} سيصبح £79.76 بدلا من £79.77 والفرق يمكن إهماله .

الجدول ٣ - ٦

X	f	fX
£55.00	8	£440.00
65.00	10	650.00
75.00	16	1200.00
85.00	15	1275.00
95.00	10	950.00
110.00	8	880.00
150.00	3	450.00
$N = 70$		$\Sigma fX = £5845.00$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{£5845.00}{70} = £83.50$$

٢٤ - ٢ أوجد متوسط أجور الـ 70 عاملا في شركة P and R

باستخدام الجدول (ث) في صفحة ٦١ .

الحل :

في هذه الحالة أطوال الفئات غير متساوية وعليه

يجب أن نستخدم الطريقة المطولة كما هو موضح

بالجدول ٣ - ٦

الوسيط :

٢٥ - ٢ درجات طالب في ستة امتحانات كانت 84, 91, 72, 68, 87, 78 . أوجد وسيط هذه الدرجات .

الحل :

بترتيب الدرجات في منظومة تصبح 68, 72, 78, 84, 87, 91 .

وبما أن عدد الدرجات زوجي فإن هناك قيمتين في المنتصف 84, 78 وسطهما الحسابي $\frac{1}{2}(78 + 84) = 81$

هو الوسيط المطلوب . قارن بالمسألة ٣ - ٦ حيث الوسط الحسابي = 80

٢٦ - ٢ الأجر بالساعة لخمسة عاملين في مكتب هو \$2.52, \$3.96, \$3.28, \$9.20, \$3.75 . أوجد .

(ب) متوسط أجر الساعة .

(أ) وسيط أجر الساعة

الحل :

(أ) بترتيب الأجر في منظومة تصبح \$2.52, \$3.28, \$3.75, \$3.96, \$9.20 . وبما أن هناك عدداً فردياً من

القيم فإن هناك قيمة واحدة في المنتصف وهي \$3.75 وهي الوسيط المطلوب .

$$(ب) \text{ الوسط الحسابي هو } \frac{2.52 + 3.96 + 3.28 + 9.20 + 3.75}{5} = \$4.54$$

لاحظ أن الوسيط لم يتأثر بالقيمة المتطرفة \$9.20 بينما تأثر الوسط بها . وفي هذه الحالة فإن الوسيط يعطي دلالة

أفضل على معدل أجر الساعة عن الوسط .

٢٧ - ٢ إذا رتب (أ) 85 ، (ب) 150 رقماً في منظومة ، كيف يمكن الحصول على وسيط هذه الأرقام ؟

الحل :

(أ) بما أن هناك 85 عنصراً ، وهو رقم فردى ، فإن هناك قيمة وسطى وحيدة حيث يوجد قبلها 42 رقم وبعدها 42 رقم . وبهذا فإن الوسيط هو الرقم الذى ترتيبه الثالث والأربعين فى المنظومة .

(ب) بما أن هناك 150 عنصراً ، وهو رقم زوجى ، فإن هناك قيمتين فى الوسط حيث يوجد قبلهما 74 رقم وبعدهما 74 رقماً . وهاتان القيمتان ترتيبهما الخامس والسبعون والسادس والسبعون فى المنظومة ووسطها الحسابى هو الوسيط المطلوب .

٢٨ - ٣ أوجد وسيط أطوال 40 من أوراق نبات الفار (أنظر المسألة ٢ - ٨ ، صفحة ٥٧) باستخدام (أ) التوزيع الثانى للمسألة ٢ - ٨ والذى أعدنا كتابته هنا (ب) البيانات الأصلية

الحل :

جدول ٣ - ٧

الطول (mm)	التكرار
118-126	3
127-135	5
136-144	9
145-153	12
154-162	5
163-171	4
172-180	2
	المجموع 40

(أ) الطريقة الأولى ، باستخدام الاستكمال :

الأطوال فى الجدول التكرارى المبين على اليمين يفترض فيها أنها تتوزع توزيعاً متصلًا . فى هذه الحالة فإن الوسيط هو هذا الطول الذى يقع نصف التكرار الكلى أعلاه $(40/2 = 20)$ والنصف الآخر بعده .

وحيث أن مجموع تكرارات الفئات الثلاث الأولى هو $17 = 3 + 5 + 9$ وحتى نحصل على الرقم المطلوب 20 فإننا نريد 3 أرقام من الفئة 12 حالة الموجودة فى الفئة الرابعة .

وبما أن الفئة الرابعة 153 — 145 هى فى الحقيقة تقابل الأطوال 153.5 to 144.5 فإن الوسيط يقع على $3/12$ المسافة بين 153.5, 144.5 أى أن الوسيط هو

$$144.5 + \frac{3}{12} (153.5 - 144.5) = 144.5 + \frac{3}{12} (9) = 146.8 \text{ mm}$$

الطريقة ٢ ، باستخدام القانون :

بما أن مجموع التكرارات المقابلة للفئات الثلاث الأولى والفئات الأربع الأولى هى على الترتيب $17 = 3 + 5 + 9$ ، $29 = 3 + 5 + 9 + 12$ فإن الوسيط يقع فى الفئة الرابعة والى هى بالتالى الفئة الوسيطة . وبهذا :

$$144.5 =$$

$$40 =$$

$$L_1 = \text{الحد الأدنى الحقيقى لفئة الوسيطة}$$

$$N = \text{عدد العناصر فى البيانات}$$

$$3 + 5 + 9 = 17 = (\Sigma f)_1 = \text{مجموع التكرارات لجميع الفئات قبل الفئة الوسيطة}$$

$$12 = f_{\text{median}} = \text{تكرار الفئة الوسيطة}$$

$$9 = c = \text{طول الفئة الوسيطة}$$

وبهذا فإن

$$\text{الوسيط} = L_1 - \left(\frac{N/2 - (\Sigma f)_1}{f_{\text{median}}} \right) c = 144.5 + \left(\frac{40/2 - 17}{12} \right) (9) = 146.8 \text{ mm}$$

(ب) بترتيب الأطوال الأصلية في منظومة تصبح

119, 125, 126, 128, 132, 135, 135, 135, 136, 138, 138, 140, 140, 142, 142, 144, 144, 145, 145, 146, 146, 147, 147, 148, 149, 150, 150, 152, 153, 154, 156, 157, 158, 161, 163, 164, 165, 168, 173, 176

الوسيط هو الوسط الحسابي للطول العشرين والواحد والعشرين في المنظومة ويساوي 146 mm.

٢٩-٣ وضع كيف يمكن الحصول على وسيط الطول في المسألة السابقة باستخدام

(أ) المدرج التكرارى (ب) المنحنى التكرارى المتجمع النسبى .

الحل :

(أ) في الشكل ٣-٣ (أ) يوضع المدرج التكرارى المقابل للأطوال في المسألة السابقة . والوسيط هو الأحداثى

السنى لخط LM الذى يقسم المدرج التكرارى إلى مساحتين متساويتين وحيث أن المساحة تقابل التكرار في

المدرج التكرارى ، فإن الخط LM يقسم المساحة الكلية بحيث يكون التكرارات على يمينه والتكرارات على

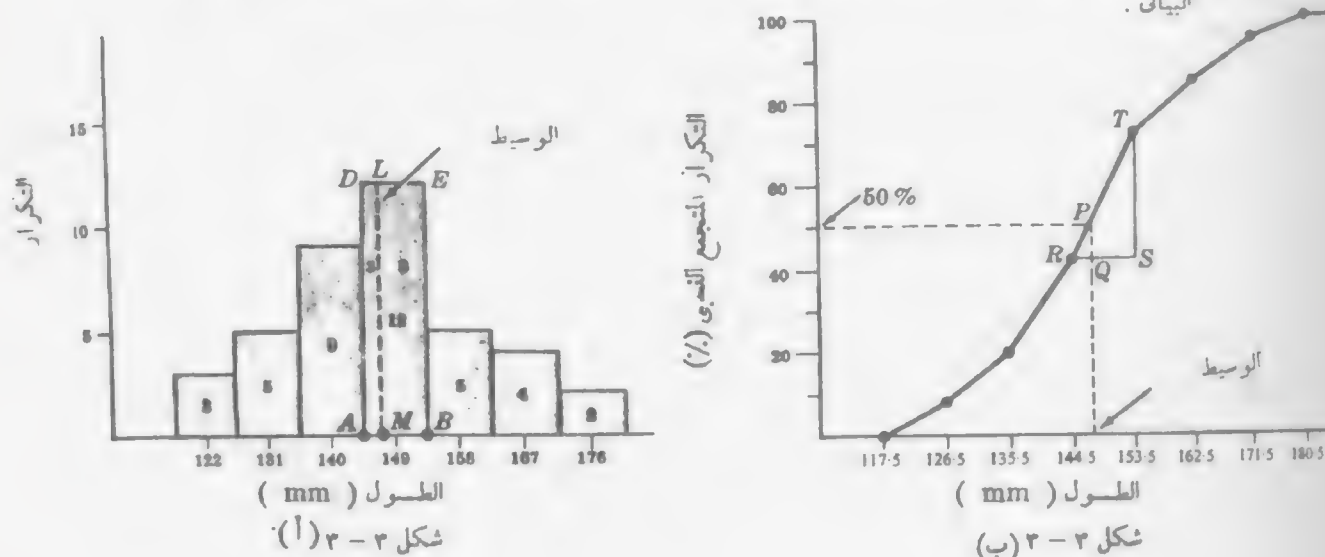
يساره مساوية لنصف التكرار الكلى أو 20 . مثلا المساحة $AMLD$ تناظر التكرار 3 والمساحة $MBEL$

تناظر التكرار 9 .

وبهذا فإن $AM = \frac{1}{3} AB = \frac{1}{3} (9) = 2.25$. وقيمة الوسيط هي $144.5 + 2.25 = 146.75$

أو 146.8 mm إلى أقرب نسبة من عشرين المليمتر . ويمكن قراءة القيمة بشكل تقريبي مباشرة من الرسم

البيانى .



(ب) الشكل ٣ - ٣ (ب) يوضح المصطلح التكرارى المتجمع النسبى المقابل للأوزان فى المسألة السابقة . والوسيط الأحداثى السينى للنقطة P على المنحنى التكرارى المتجمع والنسبى أحداثها الصادى 50% . ولحصول قيمتها فإننا نلاحظ من المثلثات المتماثلة PQR و RST أن

$$\frac{RQ}{RS} = \frac{PQ}{ST} \text{ or } \frac{RQ}{9} = \frac{50\% - 42.5\%}{72.5\% - 42.5\%} = \frac{1}{4} \text{ so that } RQ = \frac{9}{4} = 2.25$$

وبهذا فإن

$$\text{الوسيط} = 144.5 + RQ = 144.5 + 2.25 = 146.75 \text{ mm}$$

أو 146.8 mm إلى أقرب عشر المليمتر . وهذه القيمة يمكن قراءتها بالتقريب من الرسم البياني .

٣ - ٣٠ أوجد وسيط أجور الـ 65 عاملا فى شركة P and R (أنظر الفصل الثانى والمسألة ٣ - ٣ صفحة ٥٣)

الحل :

هنا $N = 65$, $N/2 = 32.5$. وبما أن مجموع الفئتين الأولى والثانية هما $18 = 10 + 8$ وبما أن الفئات الثلاث الأولى هو $34 = 16 + 10 + 8$ فإن الفئة الوسيطة هى الفئة الثالثة . باستخدام الصيغة .

$$\text{الوسيط} = L_1 + \left(\frac{N/2 - (\Sigma f)_1}{f_{\text{median}}} \right) c = £69.995 + \left(\frac{32.5 - 18}{16} \right) (£10.00) = £79.06$$

المسائل :

٣ - ٣١ أوجد الوسط والوسيط والمتوال لمجموعة الأرقام :

(أ) 3, 5, 2, 6, 5, 9, 5, 2, 8, 6

(ب) 50.3, 49.5, 48.9, 51.6, 48.7

الحل :

(أ) بترتيب الأرقام فى منظومة لتصير 2, 2, 3, 5, 5, 5, 6, 6, 8, 9

$$\text{الوسط} = \frac{(2 + 2 + 3 + 5 + 5 + 5 + 6 + 6 + 8 + 9)}{10} = 5.1$$

$$\text{الوسيط} = \frac{\text{الوسط الحسابى للقيمتين فى المنتصف}}{2} = \frac{(5 + 5)}{2} = 5$$

المتوال = الرقم الأكثر شيوعاً = 5.

(ب) بترتيب الأرقام في منظومة لتصير 48.7, 48.9, 49.5, 50.3, 51.6

$$\text{الوسط} = 49.8 = (48.7 + 48.9 + 49.5 + 50.3 + 51.6) / 5$$

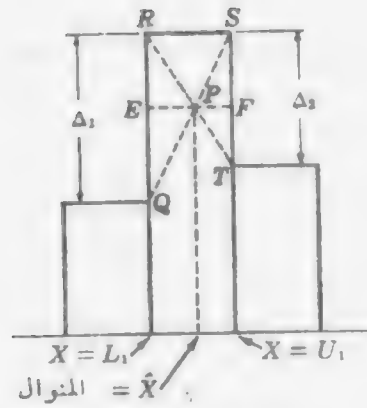
$$\text{الوسيط} = \text{الرقم في الوسط} = 49.5$$

المتوال = الرقم الأكثر شيوعاً ، ولا يوجد في هذه الحالة

٣-٣ أوجد صيغة لتحديد المتوال من بيانات معبر عنها في توزيع تكرارى .

الحل :

افترض أن الشكل ٣-٤ يمثل ثلاثة مستطيلات من المدرج التكرارى لهذا التوزيع التكرارى ويمثل المستطيل الأوسط الفئة المتوالية . افترض أيضاً أن طول الفئات متساو .



شكل ٣-٤

ويعرف المتوال بأنه النقطة \hat{X} على المحور السينى المقابلة للنقطة P وهى نقطة تقاطع الخطين RT, QS إذا كانت $X = U_1$, $X = L_1$ تمثل الحدود الدنيا والعليا للفئة المتوالية Δ_1, Δ_2 يمثلان على الترتيب الفرق بين تكرار الفئة المتوالية وتكرار الفئة التى على يسارها والفئة التى على يمينها فإنه من المثلثات المتشابهة PST

$$\text{و } PQR \text{ نجد } \frac{EP}{RQ} = \frac{PF}{ST}, \quad \frac{\hat{X} - L_1}{\Delta_1} = \frac{U_1 - \hat{X}}{\Delta_2}$$

إذن

$$\Delta_2 (\hat{X} - L_1) = \Delta_1 (U_1 - \hat{X}), \quad \Delta_2 \hat{X} - \Delta_2 L_1 = \Delta_1 U_1 + \Delta_1 \hat{X}, \quad (\Delta_1 + \Delta_2) \hat{X} = \Delta_1 U_1 + \Delta_2 L_1$$

أو

$$\hat{X} = \frac{\Delta_1 U_1 + \Delta_2 L_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

وبما أن $U = L_1 + c$ حيث c هو طول الفئة ، فإننا نجد أن

$$\hat{X} = \frac{\Delta_1 (L_1 + c) + \Delta_2 L_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = \frac{(\Delta_1 + \Delta_2) L_1 + \Delta_1 c}{\Delta_1 + \Delta_2} = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) c$$

وهذه النتيجة لها تفسير ذو أهمية فإذا رسمنا قطعاً مكافئاً بحيث يمر بمنصف قمة المستطيلات في الشكل فإن النقطة على المحور الرأسى المقابلة لنقطة النهاية المظلمى لهذا القطع المكافئ هي المنوال كما حصلنا عليه أعلاه .

٣-٣٣ أوجد منوال أجور الـ 65 عاملاً في شركة P and R (انظر المسألة المسألة ٣-٣٣) باستخدام الصيغة التي حصلنا عليها في المسألة ٣-٣٢ .

الحل :

هنا $L_1 = £69.995$, $\Delta_1 = 16 - 10 = 6$, $\Delta_2 = 16 - 14 = 2$, $c = £10.00$ وهذا فإن

$$\text{المنوال} = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) c = £69.995 + \left(\frac{6}{2+6} \right) (£10.00) = £77.50$$

علاقة اعتبارية بين الوسط والوسيط والنوال :

٣-٣٤ (أ) استخدم العلاقة الاعتبارية : الوسط - المنوال = ٣ (الوسط - الوسيط) لإيجاد منوال أجور الـ 65 عاملاً في شركة P and R .

(ب) قارن نتائجك بالمنوال الذي حصلت عليه في المسألة ٣-٣٣ .

الحل :

(أ) من المسألة ٣-٣٣ نجد أن الوسط = £79.77 والوسيط = £79.06 إذن

المنوال = الوسط - ٣ (الوسط - الوسيط)

$$= £79.77 - 3(£79.77 - £79.06) = £77.64$$

(ب) من المسألة ٣-٣٣ منوال الأجور £77.50 بحيث يتفق بشكل جيد مع العلاقة الاعتبارية في هذه الحالة .

الوسط الهندسى :

٣-٣٥ أوجد (أ) الوسط الهندسى (ب) الوسط الحسابى الأرقام 3, 5, 6, 6, 7, 10, 12 مفترضاً أن هذه الأرقام دقيقة .

(أ) الوسط الهندسى = $G = \sqrt[7]{(3 \times 5 \times 6 \times 6 \times 7 \times 10 \times 12)} = \sqrt[7]{453600}$ باستخدام اللوغاريتمات المعتادة

$$\log G = \frac{1}{7} \log 453600 = \frac{1}{7}(5.6567) = 0.8081 \text{ and } G = 6.43 \quad (\text{إلى أقرب جزء من المائة})$$

$$\begin{aligned} \log G &= \frac{1}{7}(\log 3 + \log 5 + \log 6 + \log 6 + \log 7 + \log 10 + \log 12) \\ &= \frac{1}{7}(0.4771 + 0.6990 + 0.7782 + 0.7782 + 0.8451 + 1.0000 + 1.0792) \\ &= 0.8081, \quad G = 6.43 \end{aligned} \quad \text{طريقة أخرى :}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{4}(3 + 5 + 6 + 6 + 7 + 10 + 12) = 7 \quad \text{(ب) الوسيط الحسابي =}$$

وهذا يوضح الحقيقة أن الوسيط الهندسي لمجموعة من أرقام موجبة غير متساوية أقل من وسطها الحسابي .

٢-٣٩ الأرقام X_1, X_2, \dots, X_K تحدث بتكرارات f_1, f_2, \dots, f_K حيث $f_1 + f_2 + \dots + f_K = N$ هو التكرار الكلي

(أ) أوجد الوسيط الهندسي G للأرقام

(ب) استنتج صيغة لـ $\log G$

(ج) كيف يمكن استخدام النتائج للحصول على الوسيط الهندسي لبيانات مجمعة في توزيع تكراري ؟

الحل

$$G = \sqrt[N]{\underbrace{X_1 X_1 \dots X_1}_{f_1 \text{ times}} \underbrace{X_2 X_2 \dots X_2}_{f_2 \text{ times}} \dots \underbrace{X_K X_K \dots X_K}_{f_K \text{ times}}} = \sqrt[N]{X_1^{f_1} X_2^{f_2} \dots X_K^{f_K}} \quad (1)$$

حيث $N = \sum f$ ، N يسمى حينئذٍ بالوسيط الهندسي المرجح .

$$\begin{aligned} \log G &= \frac{1}{N} \log (X_1^{f_1} X_2^{f_2} \dots X_K^{f_K}) = \frac{1}{N} (f_1 \log X_1 + f_2 \log X_2 + \dots + f_K \log X_K) \quad (ب) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^K f_j \log X_j = \frac{\sum f \log X}{N} \end{aligned}$$

حيث افترضنا أن جميع الأرقام موجبة ، عدا ذلك فإن اللوغاريتم غير معرف

لاحظ أن لوغاريتم الوسيط الهندسي لمجموعة من الأرقام الموجبة هو الوسيط الحسابي للوغاريتمات هذه الأرقام .

(ج) يمكن استخدام النتيجة لإيجاد الوسيط الهندسي للبيانات المجمعة بأخذ X_1, X_2, \dots, X_K كراكز الفئات و f_1, f_2, \dots, f_K كالتكرارات المقابلة لها .

٢-٣٧ في خلال أحد السنين كانت نسبة سعر لتر البن إلى سعر رغيف الخبز هو 3.00 ، بينما خلال العام التالي كانت النسبة 2.00 .

(أ) أوجد الوسيط الحسابي لهذه النسب لفترة العامين .

(ب) أوجد الوسيط الحسابي لنسب أسعار الخبز إلى أسعار البن لفترة العامين .

(ج) ناقش التوصية باستخدام الوسيط الحسابي للحصول على متوسط النسب .

(د) ناقش ملاءمة الوسيط الهندسي للحصول على متوسط النسب .

الحل :

$$(أ) \text{ متوسط نسبة سعر اللبن إلى سعر الحبز } = 2.50 = \frac{1}{2}(3.00 + 2.00)$$

(ب) بما أن نسبة سعر اللبن إلى سعر الحبز في السنة الأولى هي 3.00 فإن نسبة سعر الحبز إلى سعر اللبن هو

$$1/3.00 = 0.333 \text{ كذلك فإن نسبة سعر الحبز إلى سعر اللبن في السنة الثانية هي } 1/2.00 = 0.500$$

وبهذا فإن

$$\text{متوسط نسبة سعر الحبز إلى سعر اللبن} = 0.417 = \frac{1}{2}(0.333 + 0.500)$$

(ج) من الملائم أن نتوقع أن متوسط نسبة سعر اللبن إلى سعر الحبز هو مقلوب متوسط نسبة سعر الحبز إلى سعر اللبن

$$\text{وذلك إذا كان المتوسط متوسطاً ملائماً. ولكن } 2.50 \neq 1/0.417 = 2.40.$$

وهنا يظهر أن الوسط الحسابي يعد متوسطاً غير جيد عند استخدام النسب .

$$(د) \text{ الوسط الهندسي لنسب سعر اللبن إلى سعر الحبز} = \sqrt{(3.00)(2.00)} = \sqrt{6.00}$$

$$\text{الوسط الهندسي لنسب سعر الحبز إلى سعر اللبن} = 1/\sqrt{6.00} = \sqrt{(0.333)(0.500)} = \sqrt{0.1667}$$

وبما أن هذه المتوسطات كل منها مقلوب الآخر ، فإننا نستنتج أن الوسط الهندسي أكثر ملائمة من الوسط الحسابي

للحصول على وسط النسب في مثل هذا النوع من المسائل .

٣ - ٣٨ عدد البكتريا في مزرعة معينة تزايدت من 1000 إلى 4000 خلال ثلاثة أيام . ما هو متوسط الزيادة النسبية في اليوم ؟

الحل :

بما أن الزيادة من 1000 إلى 4000 هي 300% ، فإن هذا قد يؤدي إلى استنتاج أن متوسط نسبة الزيادة اليومية

يجب أن يكون $100\% = 300\%/3$ وهذا يتضمن أنه في خلال اليوم الأول فإن العدد ارتفع من 1000 إلى 2000

وفي خلال اليوم الثاني ارتفع من 2000 إلى 4000 . وفي خلال اليوم الثالث من 4000 إلى 8000 وهذا يناقض

الحقيقة .

ولتحديد متوسط الزيادة النسبية ، ونرمز لها بالرمز r . فإن

$$\text{مجموع عدد البكتريا بعد يوم} = 1000 + 1000r = 1000(1 + r)$$

$$\text{مجموع عدد البكتريا بعد يومين} = 1000(1 + r) + 1000(1 + r)r = 1000(1 + r)^2$$

$$\text{مجموع عدد البكتريا بعد ثلاثة أيام} = 1000(1 + r)^2 + 1000(1 + r)^2r = 1000(1 + r)^3$$

والتعبير الأخير يجب أن يساوي 4000 بحيث

$$1000(1 + r)^3 = 4000, (1 + r)^3 = 4, 1 + r = \sqrt[3]{4} \text{ and } r = \sqrt[3]{4} - 1$$

$$\text{باستخدام اللوغاريتمات نجد أن } \sqrt[3]{4} = 1.587 \text{ بحيث أن } r = 0.587 = 58.7\%$$

وبشكل عام إذا بدأنا بقيمة P وزدناها بمعدل ثابت r لكل وحدة زمن فإننا سوف نحصل بعد n وحدة زمن على القيمة :

$$A = P(1 + r)^n$$

وهذه تسمى بصيغة الفائدة المركبة . أنظر المسائل ٣ - ٩٤ و ٢ - ٩٥

الوسط التوافقي :

٢ - ٣٩ أوجد الوسط التوافقي H للأرقام 3, 5, 6, 6, 7, 10, 12 .

الحل :

$$\begin{aligned} \frac{1}{H} &= \frac{1}{N} \sum \frac{1}{X} = \frac{1}{7} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{7} \left(\frac{140 + 84 + 70 + 70 + 60 + 42 + 35}{420} \right) \\ &= \frac{501}{2940} \text{ and } H = \frac{2940}{501} = 5.87 \end{aligned}$$

وغالباً ما يكون من الأسهل التعبير عن لكسور في الصورة العشرية أولاً

$$\begin{aligned} \frac{1}{H} &= \frac{1}{7} (0.3333 + 0.2000 + 0.1667 + 0.1667 + 0.1429 + 0.1000 + 0.0833) \\ &= \frac{1}{7} (1.1929) \text{ and } H = 7/1.1929 = 5.87 \end{aligned}$$

بالمقارنة بالمسألة ٣ - ٣٥ تتضح حقيقة أن الوسط التوافقي لمجموعة من الأرقام الموجبة والتي لا تتساوى كلها في القيمة أقل من الوسط الهندسي والذي بدوره أقل من الوسط الحسابي .

٢ - ٤٠ في خلال أربع سنوات متتالية اشترى صاحب منزل بترول لتدفئة المنزل بتكلفة 1.6, 1.8, 2.1, 2.5 لتر على الترتيب . فاهو متوسط تكلفة البترول في خلال مدة السنوات الأربع ؟

الحل :

الحالة ١ :

إذا افترضنا أن صاحب المنزل اشترى نفس الكمية في كل عام وليكن 1000 لتر .

إذن .

$$\begin{aligned} \text{التكلفة الكلية} \\ \text{الكمية الكلية المشتراة} &= \frac{\text{متوسط التكلفة}}{\text{الكمية الكلية المشتراة}} = \frac{£16 + £18 + £21 + £25}{4000 \text{ litres}} = 2.00p/l \end{aligned}$$

وهذا يساوي الوسط الحسابي لتكلفة اللتر ، بمعنى ، $\frac{1}{4}(16 + 18 + 18 + 21 + 25) = 2.0 p/l$ ، ولن تختلف النتيجة حتى ولو كان x من اللترات استخدم في كل سنة .

الحالة ٢ :

إذا افترضنا أن صاحب المنزل انفق نفس المبلغ كل سنة ، وليكن £ 200

إذن :

$$\text{المتوسط التوافقي} = \frac{\text{التكلفة الكلية}}{\text{الكمية الكلية المشتراة}} = \frac{£800}{12500 + 11111 + 9524 + 8000 \text{ litres}} = 1.94p/h$$

$$\frac{4}{\frac{1}{12500} + \frac{1}{11111} + \frac{1}{9524} + \frac{1}{8000}} = 1.94p/h$$

وهذا يساوي الوسط التوافقي لتكلفة اللتر ، بمعنى ،

وعملية الحصول على المتوسط في الحالتين سليمة ، وقد حسب كل متوسط تحت شروط من الشائع استخدامها . ويجب ملاحظة أنه في حالة ما إذا اختلف عدد اللترات المستخدمة من سنة إلى أخرى بدلا من بقائها ثابتة ، يستبدل الوسط الحسابي العادي في الحالة ١ بالوسط الحسابي المرجح . كذلك فإنه إذا تغيرت القيمة الكلية المنفقة من سنة إلى أخرى ، يستبدل الوسط التوافقي العادي في الحالة ٢ بالوسط التوافقي المرجح .

٢ - ١ إذا انتقل شخص من A إلى B بمتوسط سرعة 30 km/h وعاد من B إلى A مستخدماً نفس الطريق بمتوسط سرعة 60 km/h أوجد متوسط السرعة للرحلة كلها .

الحل :

افترض أن المسافة من A إلى B هي 60 km (على الرغم من أنه يمكن فرض أى مسافة أخرى) . وبهذا :

$$\text{وقت الذهاب من A إلى B} = \frac{60 \text{ km}}{30 \text{ km/h}} = 2 \text{ h},$$

$$\text{الوقت من B إلى A} = \frac{60 \text{ km}}{60 \text{ km/h}} = 1 \text{ h}$$

$$\text{المتوسط الكلي} = \frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الوقت الكلي}} = \frac{120 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 40 \text{ km/h}.$$

والوسط السابق هو الوسط التوافقي للرقين 30 ، 60 . بمعنى 40 km/h. $\frac{2}{1/30 + 1/60}$ إذا كانت المسافات المقطوعة ليست كلها متساوية . فإنه يمكن استخدام الوسط التوافقي المرجح لتسريع حيث الأوزان هي المسافات .

(أنظر المسألة ٣ - ١٠٢) لاحظ أن استخدام الوسط الحسابي للرقين 30 و 60 km/h وهو 45 km/h خطأ .

الوسط التربيعي أو جذر متوسط المربعات :

٢ - ٤٢ أوجد الوسط التربيعي للأرقام 3, 5, 6, 6, 7, 10, 12 .

الحل :

$$\text{الجزر التربيعي} = \text{R.M.S.} = \sqrt{\frac{3^2 + 5^2 + 6^2 + 6^2 + 7^2 + 10^2 + 12^2}{7}} = \sqrt{57} = 7.55$$

٢ - ٤٣ أثبت أن الوسط التربيعي لرقين موجبين غير متساويين a, b أكبر من وسطهما الهندسي .

الحل :

المطلوب إثبات أن $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} > \sqrt{ab}$. إذا كان ذلك صحيحاً فإنه بتربيع الطرفين $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) > ab$ بحيث أن $(a - b)^2 > 0$, or $a^2 - 2ab + b^2 > 0$, $a^2 + b^2 > 2ab$, ولكن المتباينة الأخيرة سليمة بما أن مربع أى مقدار حقيق لا يساوى الصفر يجب أن يكون موجباً . يتضمن الإثبات إثباتات عكس الخطوات السابقة . نبدأ بـ $(a - b)^2 > 0$ وهذه من المعروف أنها صحيحة ومنها $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) > ab$, $a^2 + b^2 > 2ab$ وفى النهاية $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} > \sqrt{ab}$. وهو المطلوب .

لاحظ أن $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} = \sqrt{ab}$ فى حالة وحيدة إذا كانت $a = b$

الربيعات والعشيرات والمقينات :

٢ - ٤٤ أوجد (أ) الربيعات Q_1, Q_2, Q_3 و (ب) العشيرات D_1, D_2, \dots, D_9 لأجور الـ 65 عاملاً فى شركة Pand R (أنظر المسألة ٢ - ٣ والفصل الثانى) .

الحل :

(أ) الربيع الأول Q_1 هو هذا الأجر الذى يمكن الحصول عليه بعملية حصر $N/4 = 65/4 = 16.25$ من الحالات بادئين بالفئة الأولى (أو الدنيا) بما أن الفئة الأولى تحتوى على 8 حالات فإنه يجب أن نأخذ $8.25 = (16.25 - 8)$ من الـ 10 حالات بالفئة الثانية . باستخدام طريقة الاستكمال الخطى ، نجد :

$$Q_1 = £59.995 + \frac{8.25}{10} (£10.00) = £68.25$$

الربيع الثانى Q_2 نحصل عليه بحصر الـ $2N/4 = N/2 = 65/2 = 32.5$ الأولى من الحالات . بما أن الفئتين الأولى والثانية تحتوى على 18 حالة ، فإننا يجب أن نأخذ $14.5 = 32.5 - 18$ من الـ 16 حالة بالفئة الثالثة إذن :

$$Q_2 = £69.995 + \frac{14.5}{16} (£10.00) = £79.06$$

لاحظ أن Q_2 هو الوسيط

الربيع الثالث Q_3 نحصل عليه بحصر $3N/4 = \frac{3}{4}(65) = 48.75$ الأولى من الحالات . بما أن الفئات الأولى تحتوى على 48 حالة ، فإننا يجب أن نأخذ $0.75 = 48.75 - 48$ من الـ 10 حالات بالفئة الخامسة إذن .

$$Q_3 = £89.995 + \frac{0.75}{10} (£10.00) = £90.75$$

ومن ثم فإن 25% من العاملين يحصلون على دخل £68.25 أو أقل . 50% يحصلون على دخل £79.06 أو أقل و 75% يحصلون على دخل £90.75 أو أقل .

(ب) العشر الأول والثاني . . . والتاسع نحصل عليه بحصر $N/10, 2N/10, \dots, 9N/10$ من الحالات بادئين بالفئة الأولى (الدنيا) . وبهذا فإن

$$D_1 = £49.995 + \frac{6.5}{8} (£10.00) = £58.12$$

$$D_6 = £79.995 + \frac{5}{14} (£10.00) = £83.57$$

$$D_2 = £59.995 + \frac{5}{10} (£10.00) = £65.00$$

$$D_7 = £79.995 + \frac{11.5}{14} (£10.00) = £88.21$$

$$D_3 = £69.995 + \frac{1.5}{16} (£10.00) = £70.94$$

$$D_8 = £89.995 + \frac{4}{10} (£10.00) = £94.00$$

$$D_4 = £69.995 + \frac{8}{16} (£10.00) = £75.00$$

$$D_9 = £99.995 + \frac{0.5}{3} (£10.00) = £101.00$$

$$D_5 = £69.995 + \frac{14.5}{16} (£10.00) = £79.06$$

ومن ثم فإن 10% من العاملين دخلهم £58.12 أو أقل ، 20% دخلهم £65.00 أو أقل ، 30% دخلهم £70.94 أو أقل ، 40% دخلهم £75.00 أو أقل ، 50% دخلهم £79.06 أو أقل ، 60% دخلهم £83.57 أو أقل ، 70% دخلهم £88.21 أو أقل ، 80% دخلهم £94.00 أو أقل ، 90% دخلهم £101.00 أو أقل .

لاحظ أن العشر الخامس هو الوسيط والعشر الثاني والرابع والسادس والثامن والذين يقسمون التوزيع إلى خمسة أجزاء متساوية تسمى بالخميسات والتي تستخدم في بعض الأحيان من الناحية العملية .

٣ - ٤٤ حدد (أ) المئين الـ 35 (ب) المئين الـ 60 . للتوزيع بالمسألة السابقة .

الحل :

(أ) المئين الـ 35 ويرمز له بالرمز P_{35} نحصل عليه بحصر $35(65)/100 = 22.75$ الأولى من الحالات اعتباراً من الفئة الأولى (الدنيا) . إذن ، كما في المسألة ٣ - ٤٤ ،

$P_{35} = £69.995 + \frac{4.75}{16} (£10.00) = £72.97$ وهذا يعنى أن 35% من العاملين يحصلون على دخل £72.97 أو أقل .

(ب) المئين الـ 60 وهو $P_{60} = £79.995 + \frac{5}{14} (£10.00) = £83.57$ لاحظ أنه يساوى العشر السادس الخميس الثالث .

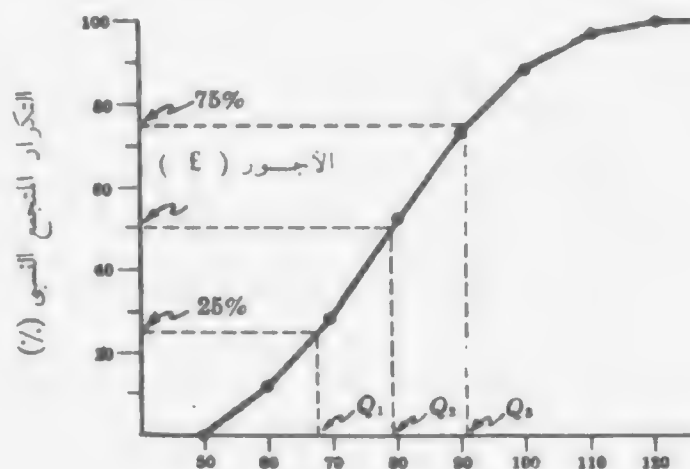
٢ - ٤٦ وضع كيف يمكن الحصول على نتائج المسائل ٣ - ٤٤ ، ٣ - ٤٥ من المنحنى التكرارى المتجمع النسبى .

الحل :

المنحنى التكرارى المتجمع النسبى لبيانات المسائل ٣ - ٤٤ ، ٣ - ٤٥ معطى أدناه .

الربيع الأول هو الاحداثى السينى للنقطة على المنحنى التى أحداثها العصادى هو 25% . كذلك فإن الربيع الثانى والثالث هو الاحداثى السينى للنقط على المنحنى والثى أحداثها العصادى هو 50% و 75% على الترتيب .

المشيرات والمئينات يمكن الحصول عليها بطريقة مماثلة . وعلى سبيل المثال فالمشير السابع والمئين الخامس والثلاثين هما الاحداثى السينى للنقط على المنحنى والثى أحداثها العصادى هو 70% و 35% على الترتيب .



شكل ٣ - ٥

مسائل اضافية

رمز التجميع :

٢ - ٤٧ اكتب الحدود لكل من رموز التجميع التالية

$$\sum_{j=1}^n U_j(U_j+6) \quad (ج)$$

$$\sum_{j=1}^n f_j X_j^2 \quad (ب)$$

$$\sum_{j=1}^n (X_j+2) \quad (أ)$$

$$\sum_{j=1}^n 4X_j Y_j \quad (د)$$

$$\sum_{j=1}^n (Y_j^2-4) \quad (ب)$$

ج :

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 8 \quad (أ)$$

$$U_1(U_1 + 6) + U_2(U_2 + 6) + U_3(U_3 + 6) \quad (ج) \quad f_1X_1^2 + f_2X_2^2 + f_3X_3^2 + f_4X_4^2 + f_5X_5^2 \quad (ب)$$

$$4X_1Y_1 + 4X_2Y_2 + 4X_3Y_3 + 4X_4Y_4 \quad (أ) \quad Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_N^2 - 4N \quad (د)$$

٤٨ - ٣ عبر عمايل باستخدام رموز التجميع :

$$f_1(Y_1 - a)^2 + f_2(Y_2 - a)^2 + \dots + f_{15}(Y_{15} - a)^2 \quad (ب) \quad (X_1 + 3)^2 + (X_2 + 3)^2 + (X_3 + 3)^2 \quad (أ)$$

$$(2X_1 - 3Y_1) + (2X_2 - 3Y_2) + \dots + (2X_N - 3Y_N) \quad (ج)$$

$$\frac{f_1a_1^2 + f_2a_2^2 + \dots + f_{15}a_{15}^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_{15}} \quad (أ) \quad (X_1/Y_1 - 1)^2 + (X_2/Y_2 - 1)^2 + \dots + (X_N/Y_N - 1)^2 \quad (د)$$

ج :

$$\sum_{j=1}^n (2X_j - 3Y_j) \quad (ج) \quad \sum_{j=1}^n f_j(Y_j - a)^2 \quad (ب) \quad \sum_{j=1}^n (X_j + 3)^2 \quad (أ)$$

$$\frac{\sum_{j=1}^n f_j a_j^2}{\sum_{j=1}^n f_j} \quad (أ) \quad \sum_{j=1}^n \left(\frac{X_j}{Y_j} - 1 \right)^2 \quad (د)$$

$$\sum_{j=1}^n (X_j - 1)^2 = \sum_{j=1}^n X_j^2 - 2 \sum_{j=1}^n X_j + N \quad \text{٤٩ - ٣ أثبت أن}$$

٥٥ - ٣ أثبت أن $\Sigma(X + a)(Y + b) = \Sigma XY + a\Sigma Y + b\Sigma X + Nab$ حيث a, b ثوابت . ماهو رمز الدليل المتضمن هنا ؟

٥١ - ٣ متغيران U, V يأخذان القيم $U_1 = 3, U_2 = -2, U_3 = 5, U_4 = -4$ ،

$$\Sigma(U + 3)(V - 4) \quad (ب) \quad \Sigma UV \quad (أ) \quad V_1 = 6, V_2 = -1, \text{ على الترتيب . احسب}$$

$$\Sigma(U_2 - 2V^2 - 2) \quad (و) \quad \Sigma UV^2 \quad (أ) \quad (\Sigma U)(\Sigma V)^2 \quad (د) \quad \Sigma V^2 \quad (ج)$$

$$\Sigma(U/V) \quad (ز)$$

ج :

$$-62 \quad (و) \quad 226 \quad (أ) \quad 6 \quad (د) \quad 53 \quad (ج) \quad -37 \quad (ب) \quad 20 \quad (أ)$$

$$25/12 \quad (ز)$$

٥٢ - ٣ إذا كان $\sum_{j=1}^n X_j = 7, \sum_{j=1}^n Y_j = -3$ and $\sum_{j=1}^n X_j Y_j = 5$ ،

$$\sum_{j=1}^n (X_j - 3)(2Y_j + 1) \quad (ب) \quad \sum_{j=1}^n (2X_j + 5Y_j) \quad (أ)$$

ج :

$$23 \quad (ب) \quad -1 \quad (أ)$$

الوسط الحسابي :

٢ - ٥٣ حصل طالب على الدرجات 96, 82, 93, 76, 85 في خمس مواد أوجد الوسط الحسابي للدرجات .

ج : 86

٢ - ٥٤ زمن رد الفعل لشخص ما لمثير خارجي قيس بواسطة محلل نفسي وكان 0.52, 0.49, 0.50, 0.46, 0.53 . أوجد متوسط زمن رد فعل الشخص للمثير الخارجي .

ج : 0.50 s

٢ - ٥٥ مجموعة من الأرقام مكونة من ست مئات وسبع سبعات وثمانى ثمانيات وتسع تسعات وعشر عشرات . ما هو الوسط الحسابي للأرقام ؟

ج : 8.25

٢ - ٥٦ درجات طالب في المعمل ، المحاضرات والشفوى في مقرر الطبيعة هي 89, 78, 71 على الترتيب .

(أ) إذا كانت الأوزان المقررة لهذه الأجزاء هي 5, 4, 2 على الترتيب ماهو الوسط الملائم للدرجات ؟
(ب) ما هو وسط الدرجات إذا استخدمنا أوزاناً متساوية ؟

ج : (أ) 82 . (ب) 79

٢ - ٥٧ ثلاثة من مدرسي الاقتصاد أعطوا متوسط درجات امتحاناتهم 82, 74, 79 في فصولهم المكونة من 17, 25, 32 طالباً على الترتيب . أوجد متوسط الدرجات في جميع الفصول .

ج : 78

٢ - ٥٨ متوسط الأجر السنوى لجميع العاملين في شركة هو £1500 . وكان متوسط الأجر السنوى الممنوح للذكور والإناث العاملين في الشركة هو £1260 و £1560 على الترتيب . أوجد نسبة الذكور إلى الإناث العاملين بالشركة .

ج : 20%, 80%

٢ - ٥٩ الجدول ٣ - ٨ يبين توزيع الحمل الأعظم بالكيلو المنقول خلال كابلات من إنتاج شركة . أوجد متوسط الحمل الأعظم باستخدام

(أ) الطريقة المطولة

(ب) طريقة الترميز

ج : 110.9 kN

٣-٩٠ أوجد \bar{X} للبيانات بالجدول ٣-٩ باستخدام

جدول ٣-٨

عدد الكابلات	الحمل الأعظم (kN)
2	93 - 97
5	98 - 102
12	103 - 107
17	108 - 112
14	113 - 117
6	118 - 122
3	123 - 127
1	128 - 132
المجموع 60	

(أ) الطريقة المثلثة

(ب) طريقة الترميز .

ج : 501.0

جدول ٣-٩

X	462	480	498	516	534	552	570	588	606	624
f	98	75	56	42	30	21	15	11	6	2

٣-٩١ الجدول ٣-١٠ أدناه يظهر توزيع أقطار رؤوس مسامير برشام منتجة بواسطة شركة . احسب متوسط القطر .

ج : 7.2642 mm

جدول ٣-١١

التكرارات	الفئات
2	7.247 - 7.249
6	7.250 - 7.252
8	7.253 - 7.255
15	7.256 - 7.258
42	7.259 - 7.261
68	7.262 - 7.264
49	7.265 - 7.267
25	7.268 - 7.270
18	7.271 - 7.273
12	7.274 - 7.276
4	7.277 - 7.279
1	7.280 - 7.282
المجموع 250	

جدول ٣-١٠

التكرارات	القطر (mm)
3	10 - under 15
7	15 - under 20
16	20 - under 25
12	25 - under 30
9	30 - under 35
5	35 - under 40
2	40 - under 45
المجموع 54	

٣-٩٢ احسب المتوسط من بيانات الجدول ٣-١١ أعلاه

ج : 26.2

٣-٩٣ احسب متوسط العمر الانتاجي للأنايب المنتجة بواسطة شركة L and M للأنايب بالمسألة ٣-٢٠ الفصل الثاني .

ج : 715 ساعة

٣ - ٦٤ (أ) استخدام التوزيع التكرارى الذى حصلت عليه فى المسألة ٢ - ٢٧ ، الفصل الثانى ، لحساب متوسط قطر رولمان البلى
(ب) احسب المتوسط مباشرة من البيانات الأصلية وقارن بـ (أ) ، فسر أى اختلاف يمكن حدوثه .

ج : 7.349 mm

الوسيط :

٣ - ٦٥ : أوجد الوسط والوسيط لمجموعة الأرقام :

(أ) 5, 4, 8, 3, 7, 2, 9 (ب) 18.3, 20.6, 19.3, 22.4, 20.2, 18.8, 19.7, 20.0

ج : (أ) الوسط = 5.4 ، الوسيط = 5

(ب) الوسط = 19.19 ، الوسيط = 19.85

٣ - ٦٦ : أوجد وسيط الدرجات للمسألة ٣ - ٥٣

ج : 85

٣ - ٦٧ : أوجد وسيط زمن رد الفعل بالمسألة ٣ - ٥٤

ج : 0.51 ثانية

٣ - ٦٨ : أوجد وسيط الأرقام فى المسألة ٣ - ٥٥

ج : 8

٣ - ٦٩ : أوجد وسيط الحمل الأعظم للكابلات فى المسألة ٣ - ٥٩

ج : 110.7 kN

٣ - ٧٠ : أوجد الوسيط \tilde{X} للتوزيع فى المسألة ٣ - ٦٠

ج : 490.6

٣ - ٧١ : أوجد وسيط أقطار مسامير البرشام فى المسألة ٣ - ٦١

ج : 7.2638 mm

٣ - ٧٢ : أوجد وسيط التوزيع فى المسألة ٣ - ٦٢

ج : 25.4

٣ - ٧٣ : الجدول ٣ - ١٢ يمثل توزيع أعمار أرباب العائلات فى الولايات المتحدة خلال السنة 1957

(أ) أوجد وسيط العمر

(ب) لماذا يعد الوسيط أكثر ملاءمة من الوسط كقياس للنزعة المركزية فى هذه الحالة ؟

جدول ٣ - ١٢

المدد (بالمليون)	سن رب المائلة (بالسنين)
2.22	Under 25
4.05	25-29
5.08	30-34
10.45	35-44
9.47	45-54
6.63	55-64
4.16	65-74
1.66	75 and over
المجموع 43.72	

ج : 45.1

٣ - ٧٤ أوجد وسيط الدخل للبيانات بالمسألة ٢ - ٣١ ، الفصل الثاني

ج : \$3608

٣ - ٧٥ أوجد وسيط العمر الانتاجي للأنايب في المسألة ٢ - ٢٠ ،

الفصل الثاني

ج : 708.3 ساعة

المصدر : مكتب التعدادات

الحوال :

٢ - ٧٦ أوجد الوسط والوسيط والحوال لمجموعة الأرقام :

(أ) 7, 4, 10, 9, 15, 12, 7, 9, 7

(ب) 8, 11, 4, 3, 2, 5, 10, 6, 4, 1, 10, 8, 12, 6, 5, 7

ج : (أ) الوسط = 8.9 ، الوسيط = 9 ، والحوال = 7

(ب) الوسط = 6.4 ، الوسيط = 6 ، وبما أن كلا من الأرقام 4, 5, 6, 8, 10

يتكرر مرتين فن الممكن اعتبار أن هناك خمسة حوال . وقد يكون من الأصوب الانتهاء في مثل هذه الحالة إلى القول بعدم وجود حوال .

٣ - ٧٧ أوجد حوال الدرجات في المسألة ٣ - ٥٣

ج : لا يوجد .

٣ - ٧٨ أوجد حوال وقت رد الفعل في المسألة ٣ - ٥٤

ج : 0.53

٣ - ٧٩ أوجد حوال مجموعة الأرقام في المسألة ٣ - ٥٥

ج : 10

٣ - ٨٠ أوجد حوال الحمل الأعظم للكابلات في المسألة ٣ - ٥٩

ج : 110.6 kN

٨١-٣ أوجد المنوال \hat{X} للتوزيع في المسألة ٣-٦٠

ج : 462

٨٢-٣ أوجد منوال أقطار مسامير الرشام في المسألة ٣-٦١

ج : 7.2632 mm

٨٣-٣ أوجد منوال التوزيع بالمسألة ٣-٦٢

ج : 23.5

٨٤-٣ أوجد منوال العمر الانتاجي للأنايب في المسألة ٢-٢٠ ، الفصل الثاني

ج : 668 ساعة

٨٥-٣ هل من الممكن تحديد المنوال للتوزيعات في :

(١) المسألة ٣-٧٣ في هذا الفصل .

(ب) المسألة ٢-٣١ في الفصل الثاني ؟ أذكر الأسباب في إجابتك .

٨٦-٣ استخدم العلاقة الاعتبارية : الوسيط - المنوال = ٣ (الوسيط - الوسيط) لحساب المنوال لتوزيعات (١) المسألة ٣-٥٩

(ب) المسألة ٣-٦٠ . (ج) المسألة ٣-٦١ (د) المسألة ٣-٦٢ (هـ) المسألة ٢-٢٠ في الفصل الثاني .

فارد النتائج بتلك التي تحصل عليها من الصيغة (٩) ، صفحة ٧٦ ، فسر أى اتفاق أو عدم اتفاق .

٨٧-٣ أثبت التعبير الذي أعطى في نهاية المسألة ٣-٣٢ .

الوسيط الهندسي :

٨٨-٣ أوجد الوسيط الهندسي للأرقام (١) 4.2, 16.8 (ب) 6.00 ، 3.00

ج : (١) 8.4 (ب) 4.23

٨٩-٣ أوجد (١) الوسيط الهندسي G (ب) الوسيط الحسابي \bar{X} للأرقام 2, 4, 8, 16, 32

ج : (١) $G = 8$ (ب) $\bar{X} = 12.4$

٩٠-٣ أوجد الوسيط الهندسي للأرقام (١) 3, 5, 8, 3, 7, 2 (ب) 28.5, 73.6, 47.2, 31.5, 64.8

ج : (١) 4.14 (ب) 45.8

٩١-٣ أوجد الوسيط الهندسي للتوزيعات في (١) المسألة ٥٩ و (ب) المسألة ٦٠ . أثبت أن الوسيط الهندسي أقل من أو يساوي

الوسيط الحسابي في هذه الحالات .

ج : (١) 110.7 kN (ب) 499.5

٩٢-٣ إذا كانت أسعار سلعة تتضاعف في فترة 4 سنوات ، ما هو متوسط نسبة الزيادة في السنة .

ج : 18.9 %

٩٣-٣ في سنة 1950, 1960 كان عدد سكان الولايات المتحدة (متضمنة الاسكا وهاواي) 151.3, 179.3 مليون على الترتيب .

(١) ما هو متوسط نسبة الزيادة في السنة ؟

(ب) قدر عدد السكان في 1954

(ج) إذا كان متوسط نسبة الزيادة من سنة 1960 إلى 1970 كما في (١) ماذا يكون عليه عدد السكان 1970 ؟

ج : (١) 1.71% (ب) 161.9 مليون (ج) 212.5 مليون .

٩٤-٣ رأسمال قدره £1000 استثمر بمعدل فائدة 4% سنويا . ما هو المبلغ الإجمالي بعد 6 سنوات إذا لم يسحب رأس المال الأصلي ؟

ج : £1265.30

٩٥-٣ في المسألة السابقة إذا كانت الفائدة تضاف إلى رأس المال كل ربع سنة (بمعنى أن هناك 1% زيادة في المبلغ كل شهر) ، ما هو المبلغ الإجمالي بعد 6 سنوات

ج : £1269.70

٩٦-٣ أوجد رقمين وسطهما الحسابي 9.0 ووسطهما الهندسي 7.2

ج : 3.6, 14.4

الوسط التوافقي :

٩٧-٣ أوجد الوسط التوافقي للأرقام (١) 2, 3, 6 (ب) 2, 5.2, 4.8, 0.1, 4.2

ج : (١) 3.0 (ب) 4.48

٩٨-٣ أوجد (١) الوسط الحسابي (ب) الوسط الهندسي . (ج) الوسط التوافقي للأرقام 4, 6, 0

ج : (١) 3 ، (ب) 0 ، (ج) 0

٩٩-٢ إذا كانت X_1, X_2, X_3, \dots تمثل مراكز الفئات في توزيع تكرارى ويقابلها التكرارات f_1, f_2, f_3, \dots على الترتيب ، أثبت أن الوسط التوافقي H للتوزيع يعطى من العلاقة

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{N} \left(\frac{f_1}{X_1} + \frac{f_2}{X_2} + \frac{f_3}{X_3} + \dots \right) = \frac{1}{N} \sum \frac{f}{X}$$

$$N = f_1 + f_2 + \dots = \sum f \quad \text{حيث}$$

١٠٠-٢ باستخدام المسألة السابقة أوجد الوسط التوافقي للتوزيعات في (١) المسألة ٥٩-٣ (ب) المسألة ٩٠-٣ . قارن بالمسألة ٩١-٣

$$\text{ج (١) } 110.4 \quad \text{(ب) } 498.2$$

١٠١-٢ المدن A, B, C متساوية في بعدها عن بعضها . سافر راكب دراجة من A إلى B بسرعة 30 km/h ومن B إلى C بسرعة 40 km/h ومن C إلى A بسرعة 50 km/h . حدد متوسط سرعته في الرحلة كلها .

$$\text{ج } 38.3 \text{ km/h}$$

١٠٢-٢ (١) طائرة تسافر المسافات $d_1, d_2, d_3 \text{ km}$ بسرعات $v_1, v_2, v_3 \text{ km/h}$ على الترتيب . أثبت أن متوسط السرعة يعطى بـ $V = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{\frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} + \frac{d_3}{v_3}}$. هذا هو الوسط التوافقي المرجع .

(ب) أوجد V إذا كانت $d_1 = 2500, d_2 = 1200, d_3 = 500, v_1 = 500, v_2 = 400, v_3 = 250$

$$\text{ج (ب) } 420 \text{ km/h}$$

١٠٣-٢ ١. أثبت أن الوسط الهندسى لرقين الموجبين a, b هو :

(١) أقل من أو يساوى الوسط الحسابى .

(ب) أكبر من أو يساوى الوسط التوافقي لهذه الأرقام

هل يمكن تعميم الإثبات ليشمل أكثر من رقين ؟

الوسط التربيعى أو وسط جذر المربعات :

١٠٤-٢ أوجد الوسط التربيعى أو وسط جذر المربعات للأرقام .

$$\text{(١) } 11, 23, 35 \quad \text{(ب) } 2.7, 3.8, 3.2, 4.3$$

$$\text{ج (١) } 25 \quad \text{(ب) } 3.55$$

١٠٥-٢ ١. أثبت أن جذر متوسط المربعات لرقين موجبين a, b هو

(١) أكبر من أو يساوى الوسط الحسابى .

(ب) أكبر من أو يساوى الوسط التوافقي .

هل يمكن تعميم الاثبات لأكثر من رقين ؟

١٠٦-٣ أستنتج صيغة يمكن إستخدامها للحصول على الوسط التربيعى للبيانات المجعة . طبق هذه الصيغة على أحد التوزيعات التكرارية التى سبق دراستها .

الربيعات والعشيرات والمئينات :

١٠٧-٣ جدول ١٣-٣ يوضح التوزيع التكرارى للدرجات التى حصل عليها الطلبة فى امتحان الكلية النهائى فى الجبر .

الدرجة	عدد الطلبة
90-100	9
80-89	32
70-79	43
60-69	21
50-59	11
40-49	3
30-39	1
المجموع	120

جدول ١٣-٣

(أ) أوجد ربيعات التوزيع .

(ب) فسر بوضوح دلالة كل منها .

ج : (أ) الربيع الأدنى $Q_1 = 67$

الربيع الأوسط $Q_2 = 75$ الوسيط

الربيع الأعلى $Q_3 = 83$

(ب) 25% سجلوا 67 أو أقل (أو 75% سجلوا 67 أو أكبر)

50% سجلوا 75 أو أقل (أو 50% سجلوا 75 أو أكبر)

75% سجلوا 83 أو أقل (أو 25% سجلوا 83 أو أكبر)

١٠٨-٣ أوجد الربيعات Q_1, Q_2, Q_3 للتوزيعات فى (أ) المسألة ٥٩-٣

(ب) مسألة ٦٠-٣ (ج) المسألة ٣١-٣ فى الفصل الثانى .

فسر بوضوح دلالة كل منها

ج : (أ) $Q_1 = 105.5, Q_2 = 110.7, Q_3 = 115.7 \text{ kN}$

(ب) $Q_1 = 469.3, Q_2 = 490.6, Q_3 = 523.3$

(ج) $Q_1 = \$1667, Q_2 = \$3608, Q_3 = \$5268$

١٠٩-٣ أوجد (أ) العشير الثانى (ب) العشير الرابع (ج) المئين التسمين (د) المئين الثامن والستون ، لبيانات

المسألة ٣٧-٣ ، فسر بوضوح دلالة كل منها .

ج : (أ) 32.4 (ب) 40.9 (ج) 68.5 (د) 53.4

١١٠-٣ أوجد (أ) P_{10} (ب) P_{90} (ج) P_{25} (د) P_{75} لبيانات المسألة ٥٩-٣ .

بوضوح دلالة كل منها .

(أ) 10.15 (ب) 11.78 (ج) 10.55 (د) 11.57 kN

١١١-٣ (١) هل يمكن التعبير عن الربيعات والعشيرات بدلالة المئينات ؟

(ب) هل يمكن التعبير عن جميع قيم التقسيمات الجزئية بدلالة المئينات ؟

وضح .

١١٢-٣ لبيانات المسألة ١٠٧-٣ أوجد (١) أصغر درجة سجلت بواسطة الـ 25% الأول في الفصل (ب) أعلى درجة سجلت بواسطة الـ 20% الأقل درجات في الفصل . فسر إجابتك باستخدام المئينات .

ج : (١) 83 (ب) 64

١١٣-٣ عبر عن نتائج المسألة ١٠٧-٣ بالرسم البياني باستخدام .

(١) المدرج التكرارى النسبى .

(ب) المضلع التكرارى النسبى .

(ج) المنحنى التكرارى المتجمع النسبى .

١١٤-٣ أجب على السؤال ١١٣-٣ باستخدام نتائج المسألة ١٠٨-٣ .

١١٥-٣ (١) أوجد صيغة مشابهة لتلك المعرفة بالمعادلة (٨) صفحة ٧٥ ، لحساب المئينات لأى توزيع تكرارى .

(ب) وضح استخدام الصيغة بتطبيقها للحصول على نتائج المسألة ١١٠-٣ .

الفصل الرابع

الانحراف المعياري والمقاييس الأخرى للتشتت

التشتت أو التغير :

الدرجة التي تتجه بها البيانات الرقمية للانتشار حول قيمة وسطى تسمى تشتت أو تغير البيانات . وهناك العديد من مقاييس التشتت أو التغير يمكن استخدامها وإن كان الأكثر شيوعاً هو المدى ، الانحراف المتوسط ، نصف المدى الربيعي ، مدى المئينات والانحراف المعياري .

المدى :

مدى مجموعة من الأرقام هو الفرق بين أكبر رقم وأقل رقم في المجموعة .

مثال : مدى المجموعة 2, 3, 3, 5, 5, 5, 8, 10, 12 هو $10 - 2 = 12$ في بعض الأحيان يعطى المدى بذكر أقل وأكبر رقم . في المثال السابق على سبيل المثال يمكن تحديد المدى من 2 إلى 12 أو $12 - 2$.

الانحراف المتوسط أو متوسط الانحرافات :

الانحراف المتوسط أو متوسط الانحرافات لمجموعة N من الأرقام X_1, X_2, \dots, X_N يعرف بما يلي

$$(1) \quad \text{الانحراف المتوسط} = M.D. = \frac{\sum_{i=1}^N |X_i - \bar{X}|}{N} = \frac{\sum |X - \bar{X}|}{N} = \overline{|X - \bar{X}|}$$

حيث \bar{X} هو الوسط الحسابي للأرقام و $|X_i - \bar{X}|$ هو القيمة المطلقة لانحراف القيمة X_i عن \bar{X} (القيمة المطلقة لرقم هو الرقم بدون الإشارة المرافقة له ويعبر عن ذلك بخطتين رأسيتين بوضعان حول الرقم) وعلى هذا فإن

$$|-4| = 4, |+3| = 3, |6| = 6, |-0.84| = 0.84.$$

مثال : أوجد متوسط الانحرافات لمجموعة الأرقام 2, 3, 6, 8, 11

$$\text{الوسط الحسابي} = \bar{X} = \frac{2+3+6+8+11}{5} = 6$$

$$\text{الانحراف المتوسط} = M.D. = \frac{|2-6| + |3-6| + |6-6| + |8-6| + |11-6|}{5}$$

$$= \frac{|-4| + |-3| + |0| + |2| + |5|}{5} = \frac{4+3+0+2+5}{5} = 2.8$$

إذا كانت X_1, X_2, \dots, X_K تحدث بتكرارات f_1, f_2, \dots, f_K على الترتيب ، فإن الانحراف المتوسط يمكن كتابته على صورة

$$(٢) \quad \text{الانحراف المتوسط} = \text{M.D.} = \frac{\sum_{j=1}^K f_j |X_j - \bar{X}|}{N} = \frac{\sum f |X - \bar{X}|}{N} = \overline{|X - \bar{X}|}$$

حيث $N = \sum_{j=1}^K f_j = \sum f$ وهذه الصيغة مفيدة للبيانات المجمعة حيث X_j 's تمثل مراكز الفئات و f_j 's يمثل التكرارات المقابلة لها .

في بعض الأحيان يعرف الانحراف المتوسط بدلالة القيمة المطلقة للانحرافات عن الوسيط أو غيره من المتوسطات بدلاً من الوسط . خاصية هامة للمجموع $\sum_{j=1}^N |X_j - a|$ أنه يكون أقل ما يمكن عندما تكون a هي الوسيط ، بمعنى أن متوسط انحرافات القيم عن الوسيط يكون أقل ما يمكن .

لاحظ أنه قد يكون من الأنسب استخدام التعبير ، متوسط القيم المطلقة للانحرافات عن التمييز الانحراف المتوسط .

نصف المدى الربيعي أو الانحراف الربيعي : لمجموعة من البيانات يعرف كالتالي :

$$(٣) \quad \text{نصف المدى الربيعي} = Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

حيث Q_1 هو الربع الأول و Q_3 هو الربع الثالث للبيانات . أنظر المسائل ٤ - ٦ ، ٤ - ٧ . ويستخدم المدى الربيعي $Q_3 - Q_1$ في بعض الأحيان بدلاً من نصف المدى الربيعي كقياس شائع للتشتت .

مدى المئينات 10 — 90 لمجموعة من البيانات يعرف كالتالي :

$$(٤) \quad \text{مدى المئينات } 10 - 90 = P_{90} - P_{10}$$

حيث P_{90} و P_{10} المئين العاشر والمئين التسمين للبيانات (أنظر المسألة ٤ - ٨) . نصف المدى المئيني 10-90 ، $\frac{1}{2}(P_{90} - P_{10})$ يمكن أيضاً استخدامه ولكنه ليس شائع الاستخدام .

الانحراف المعياري : لمجموعة من N رقم X_1, X_2, \dots, X_N ويعبر عنها بالرمز s تعرف بما يلي

$$(٥) \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (X_j - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}} = \sqrt{(X - \bar{X})^2}$$

حيث x تمثل انحرافات كل رقم X_j عن المتوسط \bar{X} .

وعمل هذا فإن s هي جذر متوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها ، ويسمى أحياناً جذر متوسط مربع الانحراف (أنظر صفحة ٧٧)

إذا كانت X_1, X_2, \dots, X_K تحدث بتكرارات f_1, f_2, \dots, f_K على الترتيب فإن الانحراف المعياري يمكن كتابته على صورة :

$$(٦) \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^K f_j (X_j - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum f x^2}{N}} = \sqrt{(\bar{X} - \bar{X})^2}$$

حيث $N = \sum_{j=1}^K f_j = \sum f$ وهذه الصيغة مفيدة في حالة البيانات المجمعة .

في بعض الأحيان يعرف الانحراف المعياري لبيانات من عينة بالقسمة على $(N - 1)$ بدلا من N في الصيغ (٥) ، (٦) لأن هذا يؤدي للحصول على تقدير أحسن للانحراف المعياري للمجتمع الذي سمحت منه العينة . ولقيم N الكبيرة (بالتأكيد $N > 30$) فإنه من الناحية العملية لا يوجد فرق حقيقى بين التعريفين . وكذلك في حالة ما إذا كنا في حاجة إلى التقدير الأحسن فإنه يمكن الحصول عليه بضرب الانحراف المعياري المحسوب بالتعريف الأول في $\sqrt{N/(N-1)}$. وبهذا فإننا سنثبت على استخدام التعريف المعطى أعلاه .

التباين :

تباين مجموعة من البيانات يعرف بأنه مربع الانحراف المعياري . وبهذا يعرف به s^2 في (٥) ، (٦) . وعندما يكون ضرورياً التمييز بين الانحراف المعياري للمجتمع والانحراف المعياري لعينة مسحوبة من هذا المجتمع ، فإننا نستخدم دائماً الرمز s للأخير والرمز σ للأول . وبهذا فإن s^2 ، σ^2 يمثلان تباين العينة وتباين المجتمع على الترتيب .

طريقة مختصرة لحساب الانحراف المعياري :

المعادلات (٥) ، (٦) يمكن كتابتهما على الترتيب في الصيغ المكافئة .

$$(٧) \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N X_j^2}{N} - \left(\frac{\sum_{j=1}^N X_j}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - \left(\frac{\sum X}{N}\right)^2} = \sqrt{\bar{X}^2 - \bar{X}^2}$$

$$(٨) \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^K f_j X_j^2}{N} - \left(\frac{\sum_{j=1}^K f_j X_j}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sum f X^2}{N} - \left(\frac{\sum f X}{N}\right)^2} = \sqrt{\bar{X}^2 - \bar{X}^2}$$

حيث \bar{X}^2 تمثل متوسط مربعات قيم X المختلفة ، بينما \bar{X}^2 يمثل مربع متوسط قيم X المختلفة . أنظر المسائل ٤ - ١٢ إلى ٤ - ١٤ .

إذا كانت $d_j = X_j - A$ هي انحرافات X_j عن ثابت اختياري A ، فالنتائج (٧) ، (٨) تصبح على الترتيب .

$$(٩) \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N d_j^2}{N} - \left(\frac{\sum_{j=1}^N d_j}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N} - \left(\frac{\sum d}{N}\right)^2} = \sqrt{\bar{d}^2 - \bar{d}^2}$$

$$(١٠) \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^K f_j d_j^2}{N} - \left(\frac{\sum_{j=1}^K f_j d_j}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sum f d^2}{N} - \left(\frac{\sum f d}{N}\right)^2} = \sqrt{\bar{d}^2 - \bar{d}^2}$$

أنظر المسائل ٤ - ١٥ ، ٤ - ١٧ .

وعندما تجمع البيانات في توزيع تكرارى طول فئاته متساوية وتساوى c ، فإن $d_j = cu_j$ or $X_j = A + cu_j$ و (١٠) تصبح

$$(11) \quad s = c \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^K f_j u_j^2}{N} - \left(\frac{\sum_{j=1}^K f_j u_j}{N} \right)^2} = c \sqrt{\frac{\sum f u^2}{N} - \left(\frac{\sum f u}{N} \right)^2} = c \sqrt{\bar{u}^2 - \bar{u}^2}$$

والمصفة الأخيرة تعطى طريقة مختصرة جداً لحساب الانحراف المعياري ويجب استخدامها للبيانات المجمعة إذا كانت أطوال الفئات متساوية . وهذه تسمى بطريقة الترميز وهي ماثلة بالضبط للطريقة المستخدمة في حساب الوسط الحسابي من البيانات المجمعة في الفصل الثالث . أنظر المسائل ٤ - ١٦ إلى ٤ - ١٩ .

خصائص الانحراف المعياري :

$$1 - \text{الانحراف المعياري يمكن تعريفه كالتالي} \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (X_j - a)^2}{N}}$$

حيث a أو وسط بالإضافة إلى الوسط الحسابي . ومن كل هذه الانحرافات انميارية ، نجد أن أصغرها يمكن الحصول عليه عندما نأخذ $a = \bar{X}$ هذا نظراً للخاصية (ب) ، الفصل الثالث صفحة ٧٤ . هذه الخاصية تمدنا بالسبب المهم لتعريف الانحراف المعياري كما سبق . لإثبات هذه الخاصية أنظر المسألة ٤ - ٢٧ .

٢ - في التوزيع الطبيعي (أنظر الفصل السابع) نجد أن :

$$(أ) \quad 68.27\% \text{ من الحالات تقع بين } \bar{X} - s , \bar{X} + s$$

(بمعنى ، انحراف معياري واحد على كل جانب من الوسط)

$$(ب) \quad 95.45\% \text{ من الحالات تقع بين } \bar{X} - 2s , \bar{X} + 2s$$

(بمعنى انحرافين معياريين على كل جانب من الوسط) .

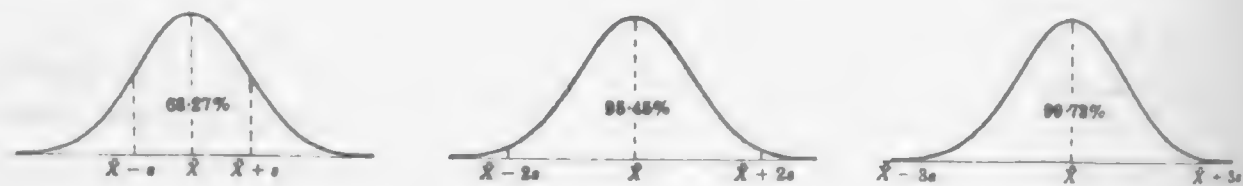
$$(ج) \quad 99.73\% \text{ من الحالات تقع بين } \bar{X} - 3s , \bar{X} + 3s$$

(بمعنى ثلاثة انحرافات معيارية على كل جانب من الوسط) .

كما هو موضح بالشكل ٤ - ١

وللتوزيعات متوسطة الالتواء فالنسب السابقة تتحقق بشكل تقريبي .

(أنظر المسألة ٢ - ٢٤) .



شكل ٤ - ١

٣ - إذا افترضنا أن مجموعتين مكونتان من N_1 ، N_2 رقم (أو توزيعان تكراريان ومجموع تكرارتهما هي N_1 ، N_2) وتباينهما معطى بـ s_1^2 ، s_2^2 على الترتيب ولها نفس الوسط \bar{X} . فإن التباين المشترك أو المجموع المجمعتين (أو للتوزيعين التكرارين) هو

$$s^2 = \frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2} \quad (١٢)$$

لاحظ أن هذا هو الوسط الحسابي المرجح للتباينات . وهذه النتيجة يمكن تعميمها لحالة ثلاثة أو أكثر من التباينات .

طريقة شارلر للمراجعة :

طريقة شارلر لمراجعة حساب الوسط والانحراف المعياري باستخدام طريقة الترميز تستخدم المتطابقات :

$$\begin{aligned} \sum f(u+1) &= \sum fu + \sum f = \sum fu + N \\ \sum f(u+1)^2 &= \sum f(u^2 + 2u + 1) = \sum fu^2 + 2 \sum fu + \sum f = \sum fu^2 + 2 \sum fu + N \end{aligned}$$

أنظر المسألة ٤ - ٢٠ .

معامل شبرد لتصحيح التباين :

عند حساب الانحراف المعياري فإنه يكون معرضاً لبعض الخطأ الناتج عن تجميع البيانات في فئات (أخطاء التجميع) . ولتعديل هذا الخطأ فإننا نستخدم النتيجة .

$$\text{التباين المعدل} = \text{التباين من البيانات المجمعة} - c^2/12 \quad (١٣)$$

حيث c هو طول الفئة ومعامل التصحيح $c^2/12$ المطروح يسمى تصحيح شبرد ويستخدم في توزيعات المتغيرات المتصلة حيث « الأطراف » تقوّل تقريباً إلى الصفر في كلا الاتجاهين . ويختلف الإحصائيون في متى وما إذا كان تصحيح شبرد يجب تطبيقه .

وبالتأكيد فإنه يجب عدم استخدامه إلا بعد فحص دقيق للوضع . وهذا إلى أنه كثيراً ما يؤدي إلى مبالغة في التصحيح وهذا يؤدي إلى استبدال الخطأ القديم بخطأ جديد .

علاقة اعتبارية بين مقاييس التشتت :

للتوزيعات متوسطة الالتواء فإننا نحصل على هذه العلاقة الاعتبارية

$$\begin{aligned} \frac{4}{9} &= \text{الانحراف المتوسط} \quad \left(\frac{\text{الانحراف المعياري}}{3} \right) \\ \frac{2}{3} &= \text{نصف المدى الربيعي} \quad \left(\frac{\text{الانحراف المعياري}}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

وهذا ناتج من الحقيقة أنه بالنسبة للتوزيع الطبيعي فإن الانحراف المتوسط ونصف المدى الربيعي يساويان على الترتيب 0.6745 ، 0.7979 مضروباً في الانحراف المعياري .

التشتت المطلق والنسبي . معامل الاختلاف :

التغير الفعل أو التشتت كما نحصل عليه من الانحراف المعياري أو غيره من مقاييس التشتت يسمى بالتشتت المطلق . ولكن تغير أو تشتت 1 متر عند قياس مسافة 1000 متر يختلف في تأثيره عن نفس تغير 1 متر في مسافة 20 متر . ومقياس لهذا التأثير نحصل عليه بالتشتت النسبي ويعرف بما يلي .

$$\text{التشتت النسبي} = \frac{\text{التشتت المطلق}}{\text{المتوسط}} \quad (١٤)$$

إذا كان التشتت المطلق هو الانحراف المعياري s والمتوسط هو الوسط \bar{X} فإن التشتت النسبي يسمى بمعامل الاختلاف أو معامل التشتت ويعرف كالآتي :

$$(١٥) \quad \text{معامل الاختلاف} = \frac{s}{\bar{X}}$$

وبشكل عام يعبر عنه كنسبة . وهناك طرق ممكنة أخرى (أنظر المسألة ٤ - ٣) لاحظ أن معامل الاختلاف مستقل عن الوحدات المستخدمة . ولهذا السبب فإنه يفيد عند مقارنة توزيعات ذات وحدات مختلفة . أحد عيوب معامل الاختلاف هو أنه يصبح عديم الفائدة عندما تكون \bar{X} قريبة من الصفر .

المتغير المعياري والدرجات المعيارية :

$$(١٦) \quad z = \frac{X - \bar{X}}{s} \quad \text{المتغير}$$

والذي يقيس الانحرافات عن الوسط بوحدات من الانحراف المعياري يسمى بالمتغير المعياري وهو كمية لا حجم لها (بمعنى أنها مستقلة عن الوحدات المستخدمة) .

إذا كانت الانحرافات عن الوسط معطاة بوحدات من الانحراف المعياري ، فإنه يقال أنه معبر عنها بوحدات معنوية أو درجات معيارية . وهذه لها قيمة كبيرة عند المقارنة بين التوزيعات (أنظر المسألة ٤ - ٣١) .

مسائل محلولة

المدى :

٤ - ١ أوجد مدى كل من مجموعات الأرقام :

(أ) 12, 6, 7, 3, 15, 10, 18, 5 (ب) 9, 3, 8, 8, 9, 8, 9, 18

الحل :

في كلتا الحالتين ، المدى = الرقم الأكبر - الرقم الأصغر = 15 - 3 = 18 .

ولكن ، كما هو واضح من منظومة (أ) ، (ب)

(أ) 3, 5, 6, 7, 10, 12, 15, 18 (ب) 3, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 18

أن هناك تغيراً أو تشتتاً أكبر في (أ) عنه في (ب) . وفي الحقيقة (ب) تحتوي أساساً على 9's ، 8's

وبما أن المدى يظهر عدم وجود فروق بين المجموعتين فإنه لا يعد مقياساً جيداً في هذه الحالة . وبشكل عام فإنه في حالة وجود قيم متطرفة فإن المدى يعد مقياساً غير جيد للتشتت . ويمكن الوصول إلى تحسين له بإهمال الحالات المتطرفة 18، 3 ومن (أ) فإن المدى سيكون (10 = 15 - 5) بينما في (ب) فإن المدى سيكون 1 (9 - 8) وهذا يظهر بوضوح أن (أ) أكثر تشتتاً من (ب) ولكن ليست هذه هي الطريقة التي يعرف بها المدى . ويمم نصف المدى الربيعي والمدى المئيني 90 - 10 لتحسين المدى بحذف الحالات المتطرفة .

٤ - ٢ أوجد مدى أوزان الطلبة في جامعة XYZ كما هو موضح بالجدول ٢ - ١ صفحة ٤٥

الحل :

هناك طريقتان لتعريف المدى في البيانات المجمعة .

الطريقة ١ :

المدى = مركز الفئة لأعلى فئة - مركز الفئة لأدنى فئة

$$73 - 61 = 12 \text{ kg}$$

الطريقة ٢ :

المدى = الحد الأعلى الحقيقي لأعلى فئة - الحد الأدنى الحقيقي لأدنى فئة .

$$74.5 - 59.5 = 15 \text{ kg}$$

الانحراف المتوسط :

٤ - ٣ أوجد الانحراف المتوسط لمجموعة الأرقام في المسألة ٤ - ١ .

الحل :

$$\bar{X} = \frac{12 + 6 + 7 + 3 + 15 + 10 + 18 + 5}{8} = \frac{76}{8} = 9.5 \quad (أ)$$

الانحراف المتوسط =

$$M.D. = \frac{\sum |X - \bar{X}|}{N}$$

$$= \frac{|12 - 9.5| + |6 - 9.5| + |7 - 9.5| + |3 - 9.5| + |15 - 9.5| + |10 - 9.5| + |18 - 9.5| + |5 - 9.5|}{8}$$

$$= \frac{2.5 + 3.5 + 2.5 + 6.5 + 5.5 + 0.5 + 8.5 + 4.5}{8} = \frac{34}{8} = 4.25$$

الوسط الحسابي =

$$\bar{X} = \frac{9 + 3 + 8 + 8 + 9 + 8 + 9 + 18}{8} = \frac{72}{8} = 9 \quad (ب)$$

الانحراف المتوسط =

$$M.D. = \frac{\sum |X - \bar{X}|}{N}$$

$$= \frac{|9 - 9| + |3 - 9| + |8 - 9| + |8 - 9| + |9 - 9| + |8 - 9| + |9 - 9| + |18 - 9|}{8}$$

$$= \frac{0 + 6 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 9}{8} = 2.25$$

ويظهر الانحراف المتوسط أن المجموعة (ب) أقل تشتتاً من المجموعة (أ) ، كما هو بالفعل .

٤ - ٤ أوجد الانحراف المتوسط لأوزان الـ 100 طالب في جامعة XYZ (أنظر الجدول ٢ - ٣ صفحة ٨٨) .

الحل :

من المسألة ٣ - ٢٠ الفصل الثالث ، الوسط الحسابي $\bar{X} = 67.45 \text{ kg}$ ويمكن ترتيب الحل كما هو في الجدول

١ - ٤

جدول ٤ - ١

الأوران (kg)	مركز الفئات X	$ X - \bar{X} = X - 67.45 $	التكرار	$f X - \bar{X} $
60-62	61	6.45	5	32.25
63-65	64	3.45	18	62.10
66-68	67	0.45	42	18.90
69-71	70	2.55	27	68.85
72-74	73	5.55	8	44.40
$\Sigma f X - \bar{X} = 226.50$		$N = \Sigma f = 100$		

$$\text{M.D.} = \frac{\Sigma f|X - \bar{X}|}{N} = \frac{226.50}{100} = 2.26 \text{ kg}$$

ومن الممكن الوصول إلى طريقة الترميز لحساب الانحراف المتوسط (أنظر المسألة ٤ - ٤٧) .

٤ - ٥ حدد نسبة الطلبة في المسألة ٤ - ٤ والذي تقع أوزانهم في المدى

$$(أ) \bar{X} \pm \text{M.D.} \quad (ب) \bar{X} \pm 2 \text{ M.D.} \quad (ت) \bar{X} \pm 3 \text{ M.D.}$$

الحل

$$(أ) \bar{X} \pm \text{M.D.} = 67.45 \pm 2.26 \text{ kg} \text{ هو المدى من } 65.19 \text{ kg} \text{ إلى } 69.71 \text{ kg}$$

هذا المدى يتضمن كل الأشخاص في الفئة الثالثة + $\frac{1}{3}(65.5 - 65.19)$ من الطلبة في الفئة الثانية + $\frac{1}{3}(69.71 - 68.5)$ من الطلبة في الفئة الرابعة (نظرا لأن طول الفئة = 3 kg ، الحد الأعلى الحقيقي للفئة الثانية = 65.5 kg ، والحد الأدنى الحقيقي للفئة الرابعة = 68.5 kg) .

عدد الطلبة في المدى $\bar{X} \pm \text{M.D.}$ هو

$$42 - \frac{0.31}{3}(18) + \frac{1.21}{3}(27) = 42 - 1.86 + 10.89 = 54.75, \text{ or } 55$$

ويكون 55% من المجموع

$$(ب) \bar{X} \pm 2 \text{ M.D.} = 67.45 \pm 2(2.26) = 67.45 \pm 4.52 \text{ هو المدى من } 62.93 \text{ kg} \text{ إلى } 71.97 \text{ kg}$$

عدد الطلبة في المدى $\bar{X} \pm 2 \text{ M.D.}$ هو

$$18 - \left(\frac{62.93 - 62.5}{3}\right)(18) + 42 + 27 - \left(\frac{71.97 - 71.5}{3}\right)(8) = 85.67, \text{ or } 86$$

ويكون 86% من المجموع .

(ج) 67.45 ± 6.78 $\bar{X} \pm 3 \text{ M.D.} = 67.45 \pm 3(2.26)$ هو المدى من 60.67 kg إلى 74.23 kg .
عدد الطلبة في المدى $X \pm 3 \text{ M.D.}$ هو

$$5 - \left(\frac{60.67 - 59.5}{3} \right) (5) + 18 + 42 + 27 + \left(\frac{74.5 - 74.23}{3} \right) (8) = 97.33, \text{ or } 97$$

ويكون 97% من المجموع .

نصف المدى الربيعي أو الانحراف الربيعي :

٤ - ٦ أوجد نصف المدى الربيعي لتوزيع أوزان الطلبة في جامعة XYZ (أنظر الجدول ٤ - ١ في المسألة ٤ - ٤) .

الحل :

$$Q_1 = 65.5 + \frac{1}{2}(3) = 65.64 \text{ kg}, Q_3 = 68.5 + \frac{1}{2}(3) = 69.61 \text{ kg}$$

$$Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2}(69.61 - 65.64) = 1.98 \text{ kg}$$

لاحظ أن 50% من الحالات تقع بين Q_1 و Q_3 بمعنى أن 50 طالبا أوزانهم بين 65.64 kg : 69.61 kg .

من الممكن أن نأخذ $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_3) = 67.63 \text{ kg}$ كقياس للنزعة المركزية بمعنى ، متوسط الأوزان .
ومن ذلك نجد أن 50% من الأوزان تقع في المدى $(67.63 \pm 1.98) \text{ kg}$.

٤ - ٧ أوجد نصف المدى الربيعي لأجور الـ 65 عاملا في شركة P and R . أنظر المسألة ٢ - ٣ الفصل الثاني ، صفحة ٥٢

الحل :

$$Q_1 = £68.25 \text{ and } Q_3 = £90.75 \text{ من المسألة ٣ - ٤ ، الفصل الثالث}$$

$$Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2}(£90.75 - £68.25) = £11.25$$

وبما أن $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_3) = £79.50$ فإنه يمكن أن نستنتج أن 50% من العاملين يحصلون على دخل يقع في المدى $£79.50 \pm £11.25$.

المدى المئيني 90 — 10 :

٤ - ٨ أوجد المدى المئيني 90 — 10 لأوزان الطلبة في جامعة XYZ ارجع للجدول ٢ - ١ ، صفحة ٤٥ .

الحل :

$$P_{10} = 62.5 + \frac{1}{8}(3) = 63.33 \text{ kg and } P_{90} = 68.5 + \frac{7}{8}(3) = 71.27 \text{ kg}$$

$$P_{90} - P_{10} = 71.27 - 63.33 = 7.94 \text{ kg} = 10 - 90$$

$$\frac{1}{8}(P_{90} - P_{10}) = 67.30 \text{ kg and } \frac{1}{8}(P_{90} - P_{10}) = 3.97 \text{ kg}$$

فإنه يمكننا أن نستنتج أن 80% من الطلبة تقع أوزانهم في المدى $(67.30 \pm 3.97) \text{ kg}$.

الانحراف المعياري :

٤-٩ أوجد الانحراف المعياري لمجموعات الأرقام في المسألة ٤-١

الحل

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{12 + 6 + 7 + 3 + 15 + 10 + 18}{8} = \frac{76}{8} = 9.5 \quad (١)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{(12 - 9.5)^2 + (6 - 9.5)^2 + (7 - 9.5)^2 + (3 - 9.5)^2 + (15 - 9.5)^2 + (10 - 9.5)^2 + (18 - 9.5)^2 + (5 - 9.5)^2}{8}}$$

$$= \sqrt{23.75} = 4.87.$$

$$\bar{X} = \frac{9 + 3 + 8 + 8 + 9 + 8 + 9 + 18}{8} = \frac{72}{8} = 9 \quad (ب)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{(9 - 9)^2 + (3 - 9)^2 + (8 - 9)^2 + (8 - 9)^2 + (9 - 9)^2 + (8 - 9)^2 + (9 - 9)^2 + (18 - 9)^2}{8}}$$

$$= \sqrt{15} = 3.87.$$

النتائج السابقة يمكن مقارنتها بنتائج المسألة ٤-٣ . فنلاحظ أن الانحراف المعياري يشير إلى أن المجموع (ب) أقل تشتتاً من المجموعة (أ) .

ولكن هذا الواقع غير ظاهر نظراً لأن القيم المتطرفة تؤثر في الانحراف المعياري بدرجة أكبر من الانحراف المتوسط . وهذا متوقع نظراً لأننا نربع الانحرافات عند حساب الانحراف المعياري .

٤-١٠ أوجد تباين مجموعات الأرقام في المسألة ٤-١ .

الحل

التباين $s^2 = 23.75$ (أ) نجد : $s^2 = 15$ (ب)

٤-١١ أوجد الانحراف المعياري لأوزان الـ 100 طالب في جامعة XYZ أنظر الجدول ٢-١ صفحة ٤٥ .

الحل

من المسألة ٣-١٥ ، ٣-٢٠ بالفصل الثالث $\bar{X} = 67.45 \text{ kg}$ ويمكن ترتيب الحل كما في الجدول ٢-٤ أدناه .

الجدول ٢-٤

الوزن (kg)	مراكز الفئات X	$X - \bar{X} = X - 67.45$	$(X - \bar{X})^2$	التكرار f	$f(X - \bar{X})^2$
60-62	61	-6.45	41.6025	5	208.0125
63-65	64	-3.45	11.9025	18	214.2450
66-68	67	-0.45	0.2025	42	8.5050
69-71	70	2.55	6.5025	27	175.5675
72-74	73	5.55	30.8025	8	246.4200
					$\sum f(X - \bar{X})^2 = 852.7500$
					$N = \sum f = 100$

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{852.7500}{100}} = \sqrt{8.5275} = 2.92 \text{ kilogramme}$$

حساب الانحراف المعياري من البيانات المجمعة :

$$s = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - \left(\frac{\sum X}{N}\right)^2} = \sqrt{\overline{X^2} - \bar{X}^2} \quad (1) \text{ ١٢-٤} \quad \text{أثبت أن}$$

(ب) استخدم الصيغة في (١) لإيجاد الانحراف المعياري للأرقام 12, 6, 7, 3, 15, 10, 18, 5 .

الحل

(١) بالتعريف

$$s = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N}}$$

$$s^2 = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N} = \frac{\sum (X^2 - 2\bar{X}X + \bar{X}^2)}{N} = \frac{\sum X^2 - 2\bar{X}\sum X + N\bar{X}^2}{N} \quad \text{إذن}$$

$$= \frac{\sum X^2}{N} - 2\bar{X}\frac{\sum X}{N} + \bar{X}^2 = \frac{\sum X^2}{N} - 2\bar{X}^2 + \bar{X}^2 = \frac{\sum X^2}{N} - \bar{X}^2$$

$$= \bar{X}^2 - \bar{X}^2 = \frac{\sum X^2}{N} - \left(\frac{\sum X}{N}\right)^2$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - \left(\frac{\sum X}{N}\right)^2} = \sqrt{\overline{X^2} - \bar{X}^2} \quad \text{أو}$$

لاحظ أن رموز التجميع المستخدمة أعلاه استخدمت بالصورة المختصرة حيث استخدمنا X بدلا من X_j و \sum

بدلا من $\sum_{j=1}^N$

طريقة أخرى :

$$s^2 = \overline{(X - \bar{X})^2} = \overline{X^2 - 2X\bar{X} + \bar{X}^2} = \overline{X^2} - \overline{2X\bar{X}} + \overline{\bar{X}^2}$$

$$= \bar{X}^2 - 2\bar{X}\bar{X} + \bar{X}^2 = \bar{X}^2 - \bar{X}^2$$

$$\bar{X}^2 = \frac{\sum X^2}{N} = \frac{(12)^2 + (6)^2 + (7)^2 + (3)^2 + (15)^2 + (10)^2 + (18)^2 + (5)^2}{8} = \frac{912}{8} = 114 \quad (ب)$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{12 + 6 + 7 + 3 + 15 + 10 + 18 + 5}{8} = \frac{76}{8} = 9.5$$

$$s = \sqrt{\bar{X}^2 - \bar{X}^2} = \sqrt{114 - 90.25} = \sqrt{23.75} = 4.87 \quad \text{إذن}$$

هذه الطريقة يجب مقارنتها بنتيجة المسألة ٩-٤ (١)

١٣-٤ عدل الصيغة بالمسألة ١٢-٤ (١) ليصبح بال تكرارات المقابلة للقيم المختلفة لـ X .

الحل :

$$s = \sqrt{\frac{\sum fX^2}{N} - \left(\frac{\sum fX}{N}\right)^2} = \sqrt{\overline{X^2} - \bar{X}^2} \quad \text{التعديل الملائم هو}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{N}} \quad \text{وهذا يمكن إثباته كما في المسألة ١٢-٤ (١) حيث نبدأ بتعريف}$$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{N} = \frac{\sum f(X^2 - 2\bar{X}X + \bar{X}^2)}{N} = \frac{\sum fX^2 - 2\bar{X} \sum fX + \bar{X}^2 \sum f}{N} \\ &= \frac{\sum fX^2}{N} - 2\bar{X} \frac{\sum fX}{N} + \bar{X}^2 = \frac{\sum fX^2}{N} - 2\bar{X}^2 + \bar{X}^2 = \frac{\sum fX^2}{N} - \bar{X}^2 \\ &= \frac{\sum fX^2}{N} - \left(\frac{\sum fX}{N} \right)^2 \quad \text{or} \quad s = \sqrt{\frac{\sum fX^2}{N} - \left(\frac{\sum fX}{N} \right)^2} \end{aligned}$$

لاحظ أننا في رموز التجميع المستخدمة أعلاه استخدمنا الصيغة المختصرة حيث X, f استخدمت بدلاً من X_j, f_j ، Σ

$$\sum_{j=1}^K f_j = N \quad \cdot \quad \sum_{j=1}^N \text{استخدمت بدلا من}$$

١٤-٤ باستخدام صحيفة المسألة ١٣-٤ ، أوجد الاحرف المعيارى لبيانات المسألة ١١-٤ .

الحل :

يمكن ترتيب الحل كما في الجدول ٣-٤

جدول ۴-۲

الأوزان (kg)	مراكز الفئات X	X^2	التكرار f	fX^2
60-62	61	3721	5	18 605
63-65	64	4096	18	73 728
66-68	67	4489	42	188 538
69-71	70	4900	27	132 300
72-74	73	5329	8	42 632
$\Sigma fX^2 = 455\ 803$ $N = \Sigma f = 100$				

$$= \sqrt{\frac{\sum fX^2}{N} - \left(\frac{\sum fX}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{455\,803}{100} - (67.45)^2} = \sqrt{8.5275} = 2.92 \text{ kg}$$

حيث $\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = 67.45 \text{ kg}$ مطابق لما حصلنا عليه في المسألة ٣-١٥ ، الفصل الثالث .

لاحظ أنه في هذه المسألة كما في المسألة ٤ - ١١ تجري عمليات حسابية مطولة . في المسألة ٤ - ١٧ سنوضح كيف أن طريقة الترميز تبسط الحسابات بشكل كبير جدا .

١٥-٤. إذا كانت $d = X - A$ انحرافات X عن ثابت اختياري A ، أثبت أن

$$s = \sqrt{\frac{\sum f d^2}{N} - \left(\frac{\sum f d}{N}\right)^2}$$

الحسن :

بما أن $X = A + d$ ، $d = X - A$ ، $X = A + d$ كافي المألة ٣-١٨ ، الفصل الثالث . إذن

$$X - \bar{X} = (A + d) - (A + \bar{d}) = d - \bar{d}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum f(d - \bar{d})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2} \quad \text{جب}$$

باستخدام نتائج المسألة ١٣-٤ حيث أبدلنا \bar{X} و X بـ \bar{d} و d على الترتيب

طريقة أخرى :

$$\begin{aligned} s^2 &= (\bar{X} - \bar{X})^2 = (\bar{d} - \bar{d})^2 = \bar{d}^2 - 2\bar{d}\bar{d} + \bar{d}^2 \\ &= \bar{d}^2 - 2\bar{d}^2 + \bar{d}^2 = \bar{d}^2 - \bar{d}^2 = \frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2 \end{aligned}$$

ونحصل على النتيجة بأخذ الجذر الموجب .

١٦-٤ بين أنه لو قمنا بترميز كل مركز فئة X في توزيع تكراري طول فئاته متساوية وتساوى c بالقيمة u طبقاً للمعادلة $X = A + cu$ حيث A أحد مراكز الفئات فإن الانحراف المعياري يمكن كتابته على الصورة .

$$s = c \sqrt{\frac{\sum fu^2}{N} - \left(\frac{\sum fu}{N}\right)^2} = c \sqrt{\bar{u}^2 - \bar{u}^2}$$

الحل :

نحصل على ذلك مباشرة من المسألة السابقة . بما أن $d = X - A = cu$ وبما أن c ثابت

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(cu)^2}{N} - \left(\frac{\sum f(cu)}{N}\right)^2} = \sqrt{c^2 \frac{\sum fu^2}{N} - c^2 \left(\frac{\sum fu}{N}\right)^2} = c \sqrt{\frac{\sum fu^2}{N} - \left(\frac{\sum fu}{N}\right)^2}$$

طريقة أخرى :

من الممكن اثبات النتيجة مباشرة بدون استخدام المسألة ١٥-٤ .

$$X = A + cu, \bar{X} = A + c\bar{u} \text{ and } X - \bar{X} = c(u - \bar{u}).$$

بما أن

$$s^2 = (\bar{X} - \bar{X})^2 = c^2(u - \bar{u})^2 = c^2(u^2 - 2u\bar{u} + \bar{u}^2) = c^2(\bar{u}^2 - 2\bar{u}^2 + \bar{u}^2) = c^2(\bar{u}^2 - \bar{u}^2)$$

$$s = c \sqrt{\bar{u}^2 - \bar{u}^2} = c \sqrt{\frac{\sum fu^2}{N} - \left(\frac{\sum fu}{N}\right)^2}$$

١٧-٤ أوجد الانحراف المعياري لأوزان الطلبة في جامعة XYZ باستخدام (أ) الصيغة المستنتجة في المسألة ١٥-٤

(ب) طريقة الترميز المستخدمة في المسألة ١٦-٤ .

الحل :

في الجداول ٤-٤ ، ٥-٤ ، فإننا أخذنا بشكل اختياري A تساوى مركز الفئة 67 . لاحظ أنه في الجدول ٤-٤ الانحرافات $d = X - A$ مضاعفات لطول الفئة c . هذا العامل حذف في الجدول ٥-٤ . وهذا أدى إلى تبسيط الحسابات بشكل كبير في الجدول ٥-٤ . ويجب مقارنة هذه الجداول بتلك في المسائل ١١-٤ ، ١٤-٤ . ولقد الأسباب فإن طريقة الترميز يجب استخدامها كلما كان ذلك ممكناً .

الجدول ٤-٤

(أ)

fd	التكرارات f	$d = X - A$	مراكز الفئات X
-30	5	-6	61
-54	18	-3	64
0	42	0	67
81	27	3	70
48	8	6	73
$\sum fd = 45$	$N = \sum f = 100$		

$$= \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{873}{100} - \left(\frac{45}{100}\right)^2} = \sqrt{8.5275} = 2.92 \text{ kg}$$

جدول ٤-٥

(ب)

fu^2	fu	التكرارات X	$u = \frac{X-A}{c}$	مراكز الفئات f
20	-10	61	-2	5
18	-18	64	-1	18
0	0	$A \rightarrow 67$	0	42
27	27	70	1	27
32	16	73	2	8
$\Sigma fu^2 = 97$	$\Sigma fu = 15$			$N = \Sigma f = 100$

$$s = c \sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2} = 3 \sqrt{\frac{97}{100} - \left(\frac{15}{100}\right)^2} = \sqrt{0.9475} = 2.92 \text{ kg}$$

١٨-٤ أوجد (١) الوسط الحسابي (ب) الانحراف المعياري ، لتوزيع أجور الـ 65 عاملا في شركة P and R باستخدام طريقة الترميز (أنظر المسألة ٢-٣ ، الفصل الثاني) .

الحل :

يمكن ترتيب الحل كما هو موضح بالجدول ٤-٦

جدول ٤-٦

X	u	f	fu	fu^2
£55.00	-2	8	-16	32
65.00	-1	10	-10	10
$A \rightarrow 75.00$	0	16	0	0
85.00	1	14	14	14
95.00	2	10	20	40
105.00	3	5	15	45
115.00	4	2	8	32
		$N = \Sigma f = 65$	$\Sigma fu = 31$	$\Sigma fu^2 = 173$

$$\bar{X} = A + c\bar{u} = A + c \frac{\Sigma fu}{N} = £75.00 + (£10.00) \left(\frac{31}{65}\right) = £79.99 \quad (١)$$

$$s = c \sqrt{\bar{u}^2 - \bar{u}^2} = c \sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2} = (£10.00) \sqrt{\frac{173}{65} - \left(\frac{31}{65}\right)^2} = (£10.00) \sqrt{2.4341} = £15.60 \quad (ب)$$

١٩-٤ الجدول ٤-٧ يبين نسبة الذكاء I.Q لـ 480 تلميذ في مدرسة ابتدائية . أوجد (١) الوسط الحسابي (ب) الانحراف المعياري باستخدام طريقة الترميز .

جدول ٤-٧

Class mark X	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	110	114	118	122	126
Frequency f	4	9	16	28	45	66	85	72	54	38	27	18	11	5	2

الحل

$$\text{نسبة الذكاء (I.Q.)} = \frac{\text{العمر العقلي}}{\text{العمر الزمني}} ، \text{ معبر عنه كنسبة مئوية.}$$

على سبيل المثال فإن طفلاً عمره 8 سنوات والذي طبقاً لأسلوب تعليمي معين له عقلية تكافئ طفلاً عمره 10 سنوات له نسبة ذكاء $I.Q. = 10/8 = 1.25 = 125\%$ أو ببساطة 125 ويكون مفهوماً أنها نسبة مئوية.

للمصول على المتوسط والانحراف المعياري لنسب الذكاء فإن الحل يمكن أن يرتب كما في الجدول ٨-٤.

جدول ٨-٤

X	u	f	fu	fu ²
70	-6	4	-24	144
74	-5	9	-45	225
78	-4	16	-64	256
82	-3	28	-84	252
86	-2	45	-90	180
90	-1	66	-66	66
94	0	85	0	0
98	1	72	72	72
102	2	54	108	216
106	3	38	114	342
110	4	27	108	432
114	5	18	90	450
118	6	11	66	396
122	7	5	35	245
126	8	2	16	128
		$N = \Sigma f = 480$	$\Sigma fu = 236$	$\Sigma fu^2 = 3404$

$$\bar{X} = A + c\bar{u} = A + c \frac{\Sigma fu}{N} = 94 + 4 \left(\frac{236}{480} \right) = 95.97 \quad (1)$$

$$s = c\sqrt{u^2 - \bar{u}^2} = c\sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N} \right)^2} = 4\sqrt{\frac{3404}{480} - \left(\frac{236}{480} \right)^2} = 4\sqrt{6.8499} = 10.47. \quad (ب)$$

طريقة شارليز للمراجعة :

٢٠-٤ استخدم طريقة شارليز للمراجعة لإثبات صحة حساب (١) الوسط (ب) الانحراف المعياري الذين تم حسابهما في المسألة ١٩-٤.

وللمصول على المراجعة المطلوبة ، فإننا نضيف أعمدة الجدول ٩-٤ إلى أعمدة الجدول ٨-٤ فيما عدا العمود الثاني حيث كررنا للتسهيل.

الحل :

$$(1) \text{ من الجدول ٩-٤ أدناه } \Sigma f(u+1) = 716$$

$$\text{من الجدول ٨-٤ السابق } \Sigma fu + N = 236 + 480 = 716$$

وهذا يعطى المراجعة المطلوبة على الوسط.

(ب) من الجدول ٩-٤ أدناه $\Sigma f(u+1)^2 = 4356$.

من الجدول ٨-٤ السابق $\Sigma fu^2 + 2 \Sigma fu + N = 3404 + 2(236) + 480 = 4356$.

وهذا يعطي المراجعة المطلوبة على الانحراف المعياري.

جدول ٩-٤

$u+1$	f	$f(u+1)$	$f(u+1)^2$
-5	4	-20	100
-4	9	-36	144
-3	16	-48	144
-2	28	-56	112
-1	45	-45	45
0	66	0	0
1	85	85	85
2	72	144	288
3	54	162	486
4	38	152	608
5	27	135	675
6	18	108	648
7	11	77	539
8	5	40	320
9	2	18	162
$N = \Sigma f = 480$		$\Sigma f(u+1) = 716$	$\Sigma f(u+1)^2 = 4356$

معامل تصحيح شبرد للتباين :

٢١-٤ طبق تصحيح شبرد للحصول على الانحراف المعياري للبيانات في (أ) المسألة ١٧-٤ (ب) المسألة ١٨-٤ (ج) المسألة ١٩-٤

الحل

$$s^2 = 8.5275, c = 3 \quad \text{التباين المصحح} = s^2 - c^2/12 = 8.5275 - 3^2/12 = 7.7775$$

$$\text{الانحراف المعياري المصحح} = \sqrt{7.7775} = 2.79 \text{ kg}$$

$$s^2 = 243.41, c = 10 \quad \text{التباين المصحح} = s^2 - c^2/12 = 243.41 - 10^2/12 = 235.08$$

$$\text{الانحراف المعياري المصحح} = \sqrt{235.08} = £15.33$$

$$s^2 = 109.60, c = 4 \quad \text{التباين المصحح} = s^2 - c^2/12 = 109.60 - 4^2/12 = 108.27$$

$$\text{الانحراف المعياري المصحح} = \sqrt{108.27} = 10.41$$

٢٢ : لتوزيع التكراري الثاني بالمسألة ٨-٢ ، الفصل الثاني ، صفحة ٥٧ . أوجد (أ) الوسط (ب) الانحراف المعياري (ج) الانحراف المعياري مستخدماً تصحيح شرد (د) الانحراف المعياري الفعل من البيانات الخام .

الحل

على م. ص. ح. ٢

الجدول ١٠-٤

X	u	f	fu	fu^2
122	-8	8	-9	27
131	-2	5	-10	20
140	-1	9	-9	9
149	0	12	0	0
158	1	5	5	5
167	2	4	8	16
176	3	2	6	18
		$N = \sum f = 40$	$\sum fu = -9$	$\sum fu^2 = 95$

$$\bar{X} = A + cu = A + c \frac{\sum fu}{N} = 149 + 9 \left(\frac{-9}{40} \right) = 147.0 \text{ mm} \quad (1)$$

$$s = c\sqrt{u^2 - \bar{u}^2} = c\sqrt{\frac{\sum fu^2}{N} - \left(\frac{\sum fu}{N} \right)^2} = 9\sqrt{\frac{95}{40} - \left(\frac{-9}{40} \right)^2} = 9\sqrt{2.324375} = 13.7 \text{ mm} \quad (ب)$$

$$s^2 - c^2/12 = 188.27 - 9^2/12 = 181.52 = \text{التباين المصحح} \quad (ج)$$

$$13.5 \text{ mm} = \text{الانحراف المعياري المصحح}$$

(د) لحساب الانحراف المعياري من الأطوال الفعلية للأوراق المغطاة في المسألة ، قد يكون من الأنسب طرح رقم مناسب ، وليكن $A = 150 \text{ mm}$ من كل الأطوال ثم نستخدم طريقة المسألة ١٠-٤ . الانحرافات $d = X - A = X - 150$ مغطاة في الجدول التالي .

-12	14	0	-18	-6	-25	-1	7
-4	8	-10	-3	-14	-2	2	-6
18	-24	-12	26	13	-31	4	15
-4	23	-8	-3	-15	3	10	-15
11	-5	-15	-8	0	6	-5	-22

ومنها نجد أن $\sum d = -128$ ، $\sum d^2 = 7052$ إذن

$$s = \sqrt{d^2 - \bar{d}^2} = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N} - \left(\frac{\sum d}{N} \right)^2} = \sqrt{\frac{7052}{40} - \left(\frac{-128}{40} \right)^2} = \sqrt{166.06} = 12.9 \text{ mm}$$

بهذا فإن تصحيح شبرد نتج عنه بعض التحسين في هذه الحالة .

علاقة اعتباره بين مقاييس التثنية :

٧٣-٤ ناقش مدى صلاحية العلاقات الاعتبارية

(أ) الانحراف المتوسط = $s/2$ (الانحراف المعياري)

(ب) نصف المدى الربيعي = $s/2$ (الانحراف المعياري)

وذلك في توزيع أوزان الطلبة في جامعة XYZ

الحل :

$$(أ) \text{ من المسائل ٤-٤ ، ١١-٤ ، } \frac{\text{الانحراف المتوسط}}{\text{الانحراف المعياري}} = \frac{2.26}{2.92} = 0.77 \text{ وهو قريب من } ١/٢$$

$$(ب) \text{ من المسائل ٦-٤ ، ١١-٤ ، } \frac{\text{نصف المدى الربيعي}}{\text{الانحراف المعياري}} = \frac{1.98}{2.92} = 0.68 \text{ وهو قريب من } ٢/٣$$

وبهذا فإن العلاقة الاعتبارية صالحة في هذه الحالة .

ملحوظة : لم نقم باستخدام تصحيح شبرد للانحراف المعياري للبيانات المجمعة في الحل أعلاه نظرا لعدم استخدام تصحيح مقابل للانحراف المتوسط أو نصف المدى الربيعي .

خصائص الانحراف المعياري :

٤-٢٤ حدد النسبة المئوية لنسبة ذكاء « I.Q. » الطلبة في المسألة ٤-١٩ والتي تقع داخل المدى :

$$(أ) \bar{X} \pm s \quad (ب) \bar{X} \pm 2s \quad (ج) \bar{X} \pm 3s$$

الحل :

$$(أ) \bar{X} \pm s = 95.97 \pm 10.47 \text{ هو مدى نسبة الذكاء I.Q. من 85.5 إلى 106.4}$$

عدد الطلبة الذين تقع نسبة ذكائهم I.Q. في المدى $(\bar{X} \pm s)$

$$= 339 = \left(\frac{106.4 - 104}{4} \right) (38) + 54 + 72 + 85 + 66 + (45) \left(\frac{88 - 85.5}{4} \right)$$

النسبة المئوية لنسبة الذكاء I.Q. في المدى $\bar{X} \pm s = 339/480 = 70.6\%$

$$(ب) \bar{X} \pm 2s = 95.97 \pm 2(10.47) \text{ هو مدى نسبة الذكاء I.Q. من 75.0 إلى 116.9}$$

عدد الطلبة الذين تقع نسبة ذكائهم I.Q. في المدى $\bar{X} \pm 2s$ هو

$$= 451 = \left(\frac{116.9 - 116}{4} \right) (11) + 18 + 27 + 38 + 54 + 72 + 85 + 66 + 45 + 28 + 16 + (9) \left(\frac{76 - 75.0}{4} \right)$$

النسبة المئوية لنسبة الذكاء I.Q. في المدى $\bar{X} \pm 2s = 451/480 = 94.0\%$

$$(ج) \bar{X} \pm 3s = 95.97 \pm 3(10.47) \text{ هو مدى نسبة الذكاء I.Q. من 64.6 إلى 127.4}$$

عدد الطلبة الذين تقع نسبة ذكائهم I.Q. في المدى $\bar{X} \pm 3s$ هو

$$= 480 - \left(\frac{128 - 127.4}{4} \right) (2) = 479.7, \text{ or } 480$$

النسبة المئوية لنسبة الذكاء I.Q. في المدى $\bar{X} \pm 3s = 479.7/480 = 99.9\%$ أو من الناحية العملية 100% .

النسب المئوية في (أ) ، (ب) ، (ج) تتفق بشكل مناسب مع ما يتوقع من التوزيع الطبيعي ، بمعنى 99.73% ، 95.45% ، 68.27% على الترتيب .

لاحظ أننا لم نستخدم تصحيح شبرد للانحراف المعياري . ولو استخدم في هذه الحالة فإن النتائج ستكون أكثر قرباً للنسب السابقة . لاحظ أيضاً أن النتائج أعلاه يمكن الحصول عليها باستخدام جدول المسألة ٢٢-٤ .

٢٥-٤ أوجد مجموعات الأرقام 2, 8, 14 و 2, 5, 8, 11, 14 ما يلي :

- (أ) الوسط لكل مجموعة (ب) التباين لكل مجموعة (ج) وسط المجموعة المكونة من دمج المجموعتين .
(د) تباين المجموعة المكونة من دمج المجموعتين معا .

الحل :

$$(أ) \text{ وسط المجموعة الأولى } = \frac{1}{5}(2 + 5 + 8 + 11 + 14) = 8 \quad \text{وسط المجموعة الثانية} = \frac{1}{3}(2 + 8 + 14) = 8$$

$$(ب) \text{ تباين المجموعة الأولى } = s_1^2 = \frac{1}{5}[(2 - 8)^2 + (5 - 8)^2 + (8 - 8)^2 + (11 - 8)^2 + (14 - 8)^2] = 18$$

$$\text{تباين المجموعة الثانية} = s_2^2 = \frac{1}{3}[(2 - 8)^2 + (8 - 8)^2 + (14 - 8)^2] = 24$$

$$(ج) \text{ وسط المجموعات المندمجة} = \frac{2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 2 + 8 + 14}{5 + 3} = 8$$

(د) تباين المجموعات المندمجة

$$s^2 = \frac{(2 - 8)^2 + (5 - 8)^2 + (8 - 8)^2 + (11 - 8)^2 + (14 - 8)^2 + (2 - 8)^2 + (8 - 8)^2 + (14 - 8)^2}{5 + 3} = 20.25$$

طريقة أخرى ، بالصيغة

$$s^2 = \frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2} = \frac{(5)(18) + (3)(24)}{5 + 3} = 20.25 \quad \text{تباين المجموعات المندمجة} =$$

٢٦-٤ حل المسألة السابقة لمجموعات الأرقام 2, 5, 8, 11, 14 و 10, 16, 22 .

الحل

هنا وسط المجموعتين هو 8 و 16 على الترتيب ، بينما تباينهما هو نفسه تباين المجموعات في المسألة السابقة

$$s_1^2 = 18 \quad \text{و} \quad s_2^2 = 24$$

$$\text{وسط المجموعات المندمجة} = \frac{2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 10 + 16 + 22}{5 + 3} = 11$$

تباين المجموعات المندمجة

$$\frac{(2 - 11)^2 + (5 - 11)^2 + (8 - 11)^2 + (11 - 11)^2 + (14 - 11)^2 + (10 - 11)^2 + (16 - 11)^2 + (22 - 11)^2}{5 + 3} = 35.25$$

لاحظ أن الصيغة $s^2 = \frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2}$ والتي تعطي 20.25 غير صالحة للتطبيق في هذه الحالة حيث أن الوسط

الحسابي غير متساو في المجموعتين .

٢٧-٤ (١) أثبت أن $w^2 + pw + q$ حيث q ، p ثوابت مطاة ، نهاية صغرى عندما $w = -\frac{1}{2}p$ فقط

(ب) باستخدام (١) أثبت أن $\frac{\sum (X_j - a)^2}{N}$ أو باختصار $\frac{\sum (X - a)^2}{N}$ نهاية صغرى عندما فقط

الحل :

(١) المقدار $w^2 + pw + q = (w + \frac{1}{2}p)^2 + q - \frac{1}{4}p^2$. وبما أن $(q + \frac{1}{4}p^2)$ ثابت ، فإن المقدار يكون أصغر ما يمكن (بمعنى أنه نهاية صغرى) عندما $w + \frac{1}{2}p = 0$ أي $w = -\frac{1}{2}p$.

$$(ب) \quad \frac{\sum (X - a)^2}{N} = \frac{\sum (X^2 - 2aX + a^2)}{N} = \frac{\sum X^2 - 2a \sum X + Na^2}{N} = a^2 - 2a \frac{\sum X}{N} + \frac{\sum X^2}{N}$$

بمقارنة هذا المقدار بـ $w^2 + pw + q$ نجد أن $w = a, p = -2 \frac{\sum X}{N}, q = \frac{\sum X^2}{N}$.
وبهذا فإن المقدار نهاية صغرى عندما $a = -\frac{1}{2}p = (\sum X)/N = \bar{X}$. باستخدام النتيجة

التشتت المطلق والتشتت النسبي . معامل الاختلاف :

٢٨-٤ مصنع لإنتاج لمبات التلفزيون ينتج نوعين منها A ، B والعمر الانتاجي لهما بالساعة هو $\bar{X}_B = 1875$ و $\bar{X}_A = 1495$. وانحرافهما المعياري بالساعة $s_B = 310$ و $s_A = 280$. ما هو النوع الذي له أكبر

(١) تشتت مطلق (ب) تشتت نسبي

الحل :

(١) التشتت المطلق لـ $A = s_A = 280$ h.

التشتت المطلق لـ $B = s_B = 310$ h.

اللمبات B لها أكبر تشتت مطلق .

$$(ب) \quad \text{معامل اختلاف } A = \frac{s_A}{\bar{X}_A} = \frac{280}{1495} = 18.7\% \quad \text{معامل اختلاف } B = \frac{s_B}{\bar{X}_B} = \frac{310}{1875} = 16.5\%$$

وبهذا فإن اللمبات A لها أكبر تغير أو تشتت نسبي .

٢٩-٤ أوجد معاملات الاختلاف V للبيانات في (١) المسألة ٤ - ١٤ (ب) المسألة ٤ - ١٨ . باستخدام الانحراف المعياري المصحح وغير المصحح .

الحل :

$$(١) \quad V (\text{غير مصحح}) = \frac{s (\text{غير مصحح})}{\bar{X}} = \frac{2.92}{67.45} = 0.0433 = 4.3\%$$

$$\text{من المسألة ٤ - ٢١ (١)} \quad V (\text{مصحح}) = \frac{s (\text{مصحح})}{\bar{X}} = \frac{2.79}{67.45} = 0.0413 = 4.1\%$$

$$V \text{ (غير مصحح) } = \frac{s \text{ (غير مصحح)}}{\bar{X}} = \frac{15.60}{79.77} = 0.196 = 19.6\% \quad (\text{ب})$$

$$V \text{ (مصحح) } = \frac{s \text{ (مصحح)}}{\bar{X}} = \frac{15.33}{79.77} = 0.192 = 19.2\% \quad (\text{ب}) \quad \text{من المسألة ٢١-٤}$$

٣٠-٤ (أ) عرف مقياساً للتشتت النسبي يمكن استخدامه لمجموعة من البيانات معلوم ربيعاتها .

(ب) بين الحسابات اللازمة للحصول على القياس المعرف في (أ) باستخدام بيانات المسألة ٢١-٤ .

الحل :

(أ) إذا كانت Q_1 و Q_3 معطاة لمجموعة من البيانات فإن $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_3)$ يعد مقياساً للنزعة المركزية أو

متوسطات لهذه البيانات بينما $Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$ نصف المدى الربيعي. يعد مقياساً للتشتت لهذه البيانات .

وبهذا يمكن تعريف مقياس للتشتت النسبي كالآتي :

$$V_Q = \frac{\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)}{\frac{1}{2}(Q_1 + Q_3)} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

والذي يمكن تسميته بالمعامل الربيعي للاختلاف أو المعامل الربيعي للتشتت النسبي

$$V_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{69.61 - 65.64}{69.61 + 65.64} = \frac{3.97}{135.25} = 0.0293 = 2.9\% \quad (\text{ب})$$

المتغيرات المعيارية والدرجات المعيارية :

٣١-٤ حصل طالب على الدرجة 84 في الامتحان النهائي للرياضة حيث كان متوسط الدرجات 76 وانحرافها المعياري 10

في الامتحان النهائي للطبيعة حيث كان متوسط الدرجات 82 وانحرافها المعياري 16 ، حصل الطالب على الدرجة 90.

في أي الموضوعات كان درجة استيعابه أعلى ؟

الحل :

المتغير المعياري $z = (X - \bar{X})/s$ يقيس انحرافات X عن الوسط \bar{X} معبراً عنها بالانحراف المعياري s .

في الرياضة ، $z = (84 - 76)/10 = 0.8$ ، في الطبيعة $z = (90 - 82)/16 = 0.5$.

وبهذا كانت رتبة الطالب 0.8 من الدرجة المعيارية أعلى من الوسط في الرياضة بينما كانت 0.5 فقط من الدرجة

المعيارية أعلى من الوسط في الطبيعة . وبهذا فإن استيعابه النسبي كان أعلى في الرياضة .

المتغير $z = (X - \bar{X})/s$ يستخدم غالباً في الاختبارات التربوية حيث يعرف بالدرجات المعيارية .

٣٢-٤ (أ) حول نسب الذكاء I.Q. في المسألة ١٩-٤ إلى درجات معيارية .

(ب) عبر بالرسم البياني عن التكرار النسبي مقابل الدرجات المعيارية .

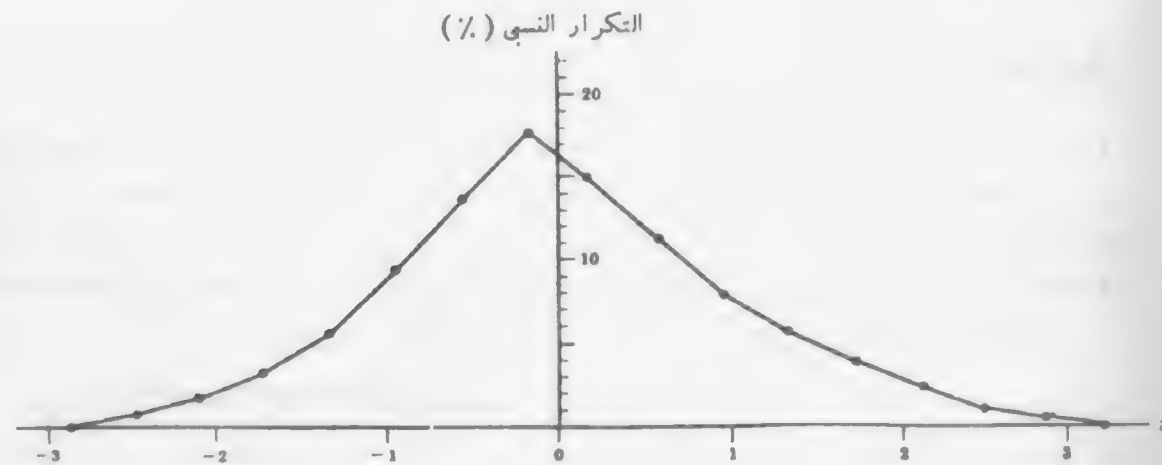
الحل :

(أ) خطوات العمل في التحويل إلى درجات معيارية يمكن ترتيبها كما في الجدول ٤ - ١١. في هذا الجدول أضفنا مركزى الفئة 66 و 130 واللذان تكراراتهما صفر وذلك لاستخدامهما في حل (ب). كذلك لم يستخدم تصحيح شبرد للانحراف المعياري. الدرجات المعدلة في هذه الحالة من الناحية العملية هي نفسها المعطاة هنا إلى درجة الدقة الموضحة.

$$\bar{X} = 96.0, s = 10.5 \quad \text{الجدول ٤ - ١١}$$

I.Q. (X)	$X - \bar{X}$	$z = \frac{X - \bar{X}}{s}$	التكرار f	التكرار النسبي f/N (%)
66	-30.0	-2.86	0	0.0
70	-26.0	-2.48	4	0.8
74	-22.0	-2.10	9	1.9
78	-18.0	-1.71	16	3.3
82	-14.0	-1.33	28	5.8
86	-10.0	-0.95	45	9.4
90	-6.0	-0.57	66	13.8
94	-2.0	-0.19	85	17.7
98	2.0	0.19	72	15.0
102	6.0	0.57	54	11.2
106	10.0	0.95	38	7.9
110	14.0	1.33	27	5.6
114	18.0	1.71	18	3.8
118	22.0	2.10	11	2.3
122	26.0	2.48	5	1.0
126	30.0	2.86	2	0.4
130	34.0	3.24	0	0.0
			480	100%

(ب) الشكل البياني للتكرار النسبي مقابل الدرجات المعيارية z (المضلع التكراري النسبي) المحور الأفقي مقياس بدلالة الانحراف المعياري s كوحدة. لاحظ أن التوزيع معتدل في عدم تماثله وهو ملتو التواءاً بسيطاً إلى اليمين.



مسائل إضافية

المدى :

- ٤ - ٣٣ أوجد مدى كل من مجموعات الأرقام :
- (أ) 3, 4, 6, 7, 8, 5, 3 (ب) 6.351, 9.434, 8.628, 10.624, 6.453, 8.772 .
- ج : (أ) 9 (ب) 4.273
- ٤ - ٣٤ أوجد مدى الحمل الأعظم المعطى بالجدول ٣ - ٨ في المسألة ٣ - ٢٩ ، الفصل الثالث . ج : 40 kN
- ٤ - ٣٥ أوجد مدى أقطار مسامير البرشام بالجدول ٣ - ١٠ في المسألة ٣ - ٦١ ، الفصل الثالث . ج : 0.036 mm
- ٤ - ٣٦ أكبر قيمة في 50 قياساً هو 8.34 kg . إذا كان المدى 0.46 kg أوجد أقل قيمة في القياسات . ج : 7.88 kg
- ٤ - ٣٧ أوجد مدى البيانات في (أ) المسألة ٣ - ٦٢ ، الفصل الثالث . (ب) المسألة ٣ - ٧٣ ، الفصل الثالث . (ج) المسألة ٢ - ٢٠ ، الفصل الثاني . ج : (أ) 35 (ب) غير محدد (ت) 900 hr

الانحراف المتوسط :

- ٤ - ٣٨ أوجد القيم المطلقة لـ (أ) 18.2 - (ب) 3.58 + (ج) 6.21 (د) 0 (هـ) $-\sqrt{2}$ (و) 3.52 - 2.36 - 4.00
- ج : (أ) 18.2 (ب) 3.58 (ج) 6.21 (د) 0 (هـ) بالتقريب $\sqrt{2} = 1.414$ (و) 1.88
- ٤ - ٣٩ أوجد الانحراف المتوسط لمجموعات الأرقام : (أ) 5, 7, 3, 9 (ب) 3.4, 4.1, 3.8, 1.6, 2.4 . ج : (أ) 2 (ب) 0.85
- ٤ - ٤٠ أوجد الانحراف المتوسط لمجموعات الأرقام بالمسألة ٤ - ٣٣ . ج : (أ) 2.2 (ب) 1.317
- ٤ - ٤١ أوجد الانحراف المتوسط للحمل الأعظم بالجدول ٣ - ٨ في المسألة ٣ - ٥٩ ، الفصل الثالث . ج : 5.76 kN
- ٤ - ٤٢ (أ) أوجد الانحراف المتوسط (M.D.) لأقطار مسامير البرشام بالجدول ٣ - ١٠ في المسألة ٣ - ٦١ ، الفصل الثالث . (ب) ماهي النسبة المئوية لأقطار مسامير البرشام التي تقع بين $(\bar{X} \pm M.D.)$, $(\bar{X} \pm 2 M.D.)$, $(\bar{X} \pm 3 M.D.)$ ج : (أ) 37 mm 0.004 (ب) 96.4% ، 85.2% ، 60.0%
- ٤ - ٤٣ أوجد الانحراف المتوسط (أ) عن الوسط (ب) عن الوسيط لمجموعة الأرقام 2, 8, 4, 12, 9, 10, 8 . حقق أن الانحراف المتوسط عن الوسيط ليس أكبر من الانحراف المتوسط عن الوسط . ج : (أ) 3.0 (ب) 2.8

- ٤ - ٤٤ أوجد الانحراف المتوسط (أ) حول المتوسط (ب) حول الوسيط ، لتوزيع بالمسألة ٣ - ٦٠ ، الفصل الثالث . استخدم نتيجة هذه المسألة وكذلك المسألة ٣ - ٧٠ ، الفصل الثالث .
ج : (أ) 31.2 (ب) 30.6
- ٤ - ٤٥ أوجد الانحراف المتوسط (أ) حول المتوسط (ب) حول الوسيط ، لتوزيع بالمسألة ٣ - ٦٢ ، الفصل الثالث . استخدم نتيجة هذه المسألة وكذلك المسألة ٣ - ٧٢ ، الفصل الثالث .
ج : (أ) 6.0 (ب) 6.0
- ٤ - ٤٦ وضح لماذا يكون الانحراف المتوسط مقياساً ملائماً أو غير ملائم للتباين لتوزيع المسألة ٣ - ٧٣ ، الفصل الثالث .
- ٤ - ٤٧ أوجد صيغة الترميز لحساب الانحراف المتوسط (أ) حول الوسيط (ب) حول الوسيط ، من توزيع تكراري . طبق هذه الصيغة للتحقق من النتائج في المسائل ٤ - ٤٤ ، ٤ - ٤٥ .

نصف المدى الربيعي أو الانحراف الربيعي :

- ٤ - ٤٨ أوجد نصف المدى الربيعي للتوزيعات في (أ) المسألة ٤ - ٥٩ ، الفصل الثالث . (ب) المسألة ٣ - ١٠٧ ، الفصل الثالث . فسر بوضوح النتائج في كل حالة .
ج : (أ) 5.1 kN (ب) 27.0 (ج) 12
- ٤ - ٤٩ أوجد نصف المدى الربيعي للتوزيعات في (أ) المسألة ٢ - ٣١ ، الفصل الثاني (ب) المسألة ٣ - ٧٣ ، الفصل الثالث ، فسر بوضوح النتائج في كل حالة . وضح مزايا نصف المدى الربيعي لمثل هذا النوع من التوزيعات على غيره من مقاييس التشتت .
ج : (أ) \$1801 (ب) 10.8 سنة
- ٤ - ٥٠ وضح أنه بالنسبة لأي توزيع تكراري فإن إجمالاً نسبة الحالات التي تقع في الفترة $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_3) \pm \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$ هي 50% . هل هذا أيضاً صحيح للفترة $(Q_2 \pm \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1))$ ؟ اشرح إجابتك .
- ٤ - ٥١ (أ) وضح كيف يمكن التمييز بيانياً عن نصف المدى الربيعي المقابل لتوزيع تكراري معين ؟
(ب) ماهي العلاقة بين نصف المدى الربيعي والتكرار المتجمع النسبي للتوزيع ؟

المدى المئيني 10 - 90 :

- ٤ - ٥٢ أوجد المدى المئيني 10 - 90 لتوزيعات (أ) المسألة ٣ - ٥٩ ، الفصل الثالث . (ب) المسألة ٣ - ١٠٧ ، الفصل الثالث . فسر بوضوح النتائج في كل حالة .
ج : (أ) 16.3 kN (ب) 33.6 or 34
- ٤ - ٥٣ أوجد المدى المئيني 10 - 90 لتوزيعات (أ) المسألة ٢ - ٣١ ، الفصل الثاني ، (ب) المسألة ٣ - ٧٣ ، الفصل الثالث . فسر بوضوح النتائج في كل حالة .
- ماهي مزايا المدى المئيني 10 - 90 على المقاييس الأخرى للتشتت ؟ وماهي عيوبه ؟
ج : (أ) \$7402 (ب) 40.8
- ٤ - ٥٤ ماهي المزايا أو العيوب التي يمكن أن تكون المدى المئيني 80 - 20 بالمقارنة بالمدى المئيني 90 - 10 ؟

٤ - ٦٥ ماهي التعديلات التي تحدث بالمسألة ٤ - ٦٣ عندما نطبق تصحيح شبرد ؟

ج : (أ) 0.00569 mm (ب) 71.6%, 93.0%, 99.68%

٤ - ٦٦ (أ) أوجد الوسط والانحراف المعياري لبيانات المسألة ٢ - ٨ ، الفصل الثاني .

(ب) كون توزيعاً تكرارياً للبيانات وأوجد الانحراف المعياري .

(ج) قارن النتائج في (ب) بتلك التي في (أ) . حدد ما إذا كان تطبيق تصحيح شبرد يؤدي إلى نتائج أحسن .

ج : (أ) 12.9 mm ، 146.8 mm

٤ - ٦٧ حل المسألة ٤ - ٦٦ باستخدام بيانات المسألة ٣ - ٢٧ ، الفصل الثاني .

ج : (أ) 0.0495 mm ، 7.349 mm

٤ - ٦٨ (أ) من مجموع N رقم ، الكسر p أرقام واحد والكسر $q = 1 - p$ أصفار . أثبت أن الانحراف المعياري

لمجموعة الأرقام هو \sqrt{pq} . (ب) طبق نتيجة (أ) على المسألة ٤ - ٥٦ (ج) .

٤ - ٦٩ (أ) أثبت أن تبين مجموعة مكونة من n رقم $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n-1)d$ (متوالية عددية

حدها الأول a والفرق المشترك d) معطى بالصيغة $\frac{1}{12}(n^2 - 1)d^2$ (ب) استخدم (أ) في المسألة ٤ - ٥٨

ملحوظة : استخدم

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1), 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$$

٤ - ٧٠ عم واثبت الخاصية ٣ بالصيغة ١١٦

علاقة اعتبارية بين مقاييس التشتت :

٤ - ٧١ بمقارنة الانحراف المعياري الذي حصلت عليه في المسألة ٤ - ٥٩ بالانحراف المتوسط في المسائل ٤ - ٤١ ، ٤ - ٤٢

٤ - ٤٤ ، حدد مدى تحقق العلاقة الاعتبارية :

الانحراف المتوسط = $\frac{4}{5}$ (الانحراف المعياري) . ناقش أية اختلافات يمكن حلونها .

٤ - ٧٢ بمقارنة الانحراف المعياري الذي حصلت عليه في المسألة ٤ - ٥٩ بنصف المدى الربيعي في المسألة ٤ - ٤٨ ، حدد مدى

تحقق العلاقة الاعتبارية :

نصف المدى الربيعي = $\frac{2}{3}$ (الانحراف المعياري) . ناقش أية اختلافات يمكن حلونها .

٤ - ٧٣ ماهي العلاقة الاعتبارية والتي يمكنك توقع وجودها بين نصف المدى الربيعي والانحراف المتوسط للتوزيع ذي الشكل

الناقوس المعتدل الالتواء ؟

ج : نصف المدى الربيعي = $\frac{5}{6}$ (الانحراف المتوسط)

٤ - ٧٤ في توزيع تكراري يمكن تقريبه بالتوزيع الطبيعي كان نصف المدى الربيعي 10 ماهي القيمة التي تتوقعها (أ) الانحراف

المعياري (ب) الانحراف المتوسط

ج : (أ) 15 (ب) 12

التشتت المطلق والتشتت النسبي . معامل الاختلاف :

٤ - ٧٥ في الامتحان النهائي في الاحصاء كان متوسط الدرجات لمجموعة من 150 طالباً هو 78 وانحرافها المعياري 8.0 وفي الجبر كان متوسط الدرجات للمجموعة هو 73 وانحرافها المعياري 7.6 . في أى الموضوعات كان هناك أكبر .
(أ) تشتت مطلق (ب) تشتت نسبي ج : (أ) الاحصاء (ب) الجبر

٤ - ٧٦ أوجد معامل الاختلاف لبيانات (أ) المسألة ٣ - ٥٩ ، الفصل الثالث (ب) المسألة ٣ - ١٠٧ ، الفصل الثالث .
ج : (أ) 6.6% (ب) 19.0%

٤ - ٧٧ (أ) ما السبب في عدم امكانية حساب معامل الاختلاف لتوزيع المسألة ٢ - ٣١ ، الفصل الثاني ؟
(ب) احسب معامل الربيعي للتشتت النسبي لهذا التوزيع (أنظر المسألة ٣ - ١٠٨ (ج) بالفصل الثالث وكذلك المسألة ٤ - ٣٠)

ج : 51.9%

٤ - ٧٨ (أ) أوجد متبسط التشتت النسبي الذي يستخدم نصف المدى الربيعي .
(ب) وضح كيفية حساب هذا المقياس باستخدام بيانات المسألة ٣ - ٧٣ ، الفصل الثالث .

المتغيرات المعيارية والدرجات المعيارية :

٤ - ٧٩ في الامتحانات انشار إليها في المسألة ٤ - ٧٥ ، حصل طالب على الدرجة 75 في الاحصاء و 71 في الجبر في أى امتحان يعد مستوى استجابته أعلى ؟
ج : الجبر

٤ - ٨٠ حول مجموعة الأرقام 5, 7, 8, 2, 6 إلى درجات معيارية .

ج : 0.29, — 1.17, 0.68, — 1.75, 0.19

٤ - ٨١ أثبت أن متوسط مجموعة من الدرجات المعيارية هو صفر وانحرافها المعياري هو واحد . وضح ذلك باستخدام المسألة ٤ - ٨٠ .

٤ - ٨٢ (أ) حول الدرجات في المسألة ٣ - ١٠٧ ، الفصل الثالث إلى درجات معيارية .

(ب) كون شكلاً بيانياً للتكرار النسبي مقابل الدرجات المعيارية .

الفصل الخامس

المزوم ، الالتواء ، والتفرطح

المزوم :

إذا كانت X_1, X_2, \dots, X_N تمثل N قيمة يمكن أن يأخذها المتغير X ، فإننا نعرف السكبة

$$(1) \quad \bar{X}' = \frac{X_1' + X_2' + \dots + X_N'}{N} = \frac{\sum_{j=1}^N X_j'}{N} = \frac{\sum X'}{N}$$

وتسمى بالمزوم الرأى . المزوم الأول حيث $r = 1$ هو الوسط الحسابى \bar{X}

المزوم الأول حول الوسط الحسابى \bar{X} يعرف كالآتى :

$$(2) \quad m_r = \frac{\sum_{j=1}^N (X_j - \bar{X})^r}{N} = \frac{\sum (X - \bar{X})^r}{N} = \overline{(X - \bar{X})^r}$$

إذا كانت $r = 1$ فإن $m_1 = 0$ (انظر المسألة ٣ - ١٦ ، الفصل الثالث) .

إذا كانت $r = 2$ فإن $m_2 = s^2$ التباين .

المزوم الرأى حول أية نقطة أصل A يعرف كالآتى :

$$(3) \quad m_r' = \frac{\sum_{j=1}^N (X_j - A)^r}{N} = \frac{\sum (X - A)^r}{N} = \frac{\sum d^r}{N} = \overline{(X - A)^r}$$

حيث $d = X - A$ هي انحرافات X عن A . إذا كانت $A = 0$ فإن (٣) تقول إلى (١) . ولهذا تسمى (١) في أغلب الأحيان بالمزوم الرأى حول الصفر .

العزوم للبيانات المجمعة :

إذا حدثت X_1, X_2, \dots, X_K بتكرارات f_1, f_2, \dots, f_K على الترتيب فإن العزوم السابقة تعرف كما يلي :

$$(٤) \quad \bar{X}' = \frac{f_1 X_1' + f_2 X_2' + \dots + f_K X_K'}{N} = \frac{\sum_{j=1}^K f_j X_j'}{N} = \frac{\sum f X'}{N}$$

$$(٥) \quad m_r = \frac{\sum_{j=1}^K f_j (X_j - \bar{X})^r}{N} = \frac{\sum f (X - \bar{X})^r}{N} = \overline{(X - \bar{X})^r}$$

$$(٦) \quad m_r = \frac{\sum_{j=1}^K f_j (X_j - A)^r}{N} = \frac{\sum f (X - A)^r}{N} = \overline{(X - A)^r}$$

حيث $N = \sum_{j=1}^K f_j = \sum f$ وهذه الصيغ ملائمة لحساب العزوم من البيانات المجمعة

العلاقة بين العزوم :

تتحقق العلاقات التالية بين العزوم حول الوسط m_r والعزوم حول نقطة أصل اختيارية m_r'

$$(٧) \quad \begin{cases} m_2 = m_2' - m_1'^2 \\ m_3 = m_3' - 3m_1' m_2' + 2m_1'^3 \\ m_4 = m_4' - 4m_1' m_3' + 6m_1'^2 m_2' - 3m_1'^4 \end{cases}$$

(أنظر المألة ه - هـ) لاحظ أن $m_1' = \bar{X} - A$

حساب العزوم للبيانات المجمعة :

طريقة الترميز التي استخدمت في حساب الوسط والانحراف المعياري والمعطاة في الفصل السابق يمكن استخدامها كطريقة مختصرة لحساب العزوم. هذه الطريقة تستخدم الحقيقة أن $X_j = A + cu_j$ (أو باختصار $X = A + cu$) بحيث نحصل باستخدام المعادلة (٦) على

$$(٨) \quad m_r' = c^r \frac{\sum f u^r}{N} = c^r \bar{u}^r$$

والتي يمكن استخدامها للحصول على m_r بتطبيق المعادلة (٧).

طريقة شارلير للمراجعة ومعامل شيرد للتصحيح :

تستخدم طريقة شارلير للمراجعة عند حساب العزوم بطريقة الترميز المتطابقات الآتية :

$$(٩) \quad \begin{cases} \sum f(u+1) = \sum fu + N \\ \sum f(u+1)^2 = \sum fu^2 + 2\sum fu + N \\ \sum f(u+1)^3 = \sum fu^3 + 3\sum fu^2 + 3\sum fu + N \\ \sum f(u+1)^4 = \sum fu^4 + 4\sum fu^3 + 6\sum fu^2 + 4\sum fu + N \end{cases}$$

معامل تصحيح شيرد للعزوم (بتعميم الأفكار بصفحة ١١٦) هو كالاتي :

$$m_2 = m_2 - \frac{1}{12}c^2 \quad (\text{مصحح})$$

$$m_4 = m_4 - \frac{1}{2}c^2m_2 + \frac{7}{240}c^4 \quad (\text{مصحح})$$

المراد من m_2 و m_4 لا يحتاجان إلى تصحيح .

العزوم في شكل غير مميز :

حتى :تلاقى . وحدات معينة فإنه يمكننا تعريف العزوم في شكل غير مميز حول الوسط الحسابي

$$(١٠) \quad a_r = \frac{m_r}{s^r} = \frac{m_r}{(\sqrt{m_2})^r} = \frac{m_r}{\sqrt{m_2}^r}$$

حيث $s = \sqrt{m_2}$ وهو الانحراف المعياري . بما أن $m_1 = 0$ و $m_2 = s^2$ فإن $a_1 = 0$ و $a_2 = 1$.

الالتواء :

الالتواء هو درجة تماثل أو البعد عن التماثل لتوزيع . إذا كان المنحنى التكراري لتوزيع (المدرج التكراري الممهد) له « ذيل » أكبر إلى يمين مركز النهاية العظمى عنه إلى يسارها يسمى التوزيع بأنه ملتو إلى اليمين أو موجب الالتواء . أما إذا كان العكس صحيحاً فيقال أنه ملتو إلى اليسار أو سالب الالتواء .

في التوزيعات الملتوية يقع الوسط على نفس جانب المنوال وذلك على نفس جانب الطرف الأطول (أنظر الأشكال ٣ - ١ ، ٣ - ٢ الفصل الثالث) . وكقياس للتأثر تأخذ الفرق (الوسط - المنوال) . وهذا المقياس يمكن تخليصه من الوحدات بقسمته على مقياس التشتت ، مثل الانحراف المعياري ، مما يؤدي إلى التعريف التالي :

$$(١١) \quad \frac{\bar{X} - \text{mode}}{s} = \frac{\text{الوسط} - \text{المنوال}}{\text{الانحراف المعياري}} = \text{الالتواء}$$

ولتحاشي استخدام المتوال ، من الممكن استخدام الصيغة الاعتبارية (١٠) صفحة ٤٨ ونعرف

$$(١٢) \quad \frac{3(\bar{X} - \text{median})}{s} = \frac{3(\text{الوسط} - \text{الوسيط})}{\text{الانحراف المعياري}} = \text{الالتواء}$$

والمقياسان السابقان يسميان على الترتيب معامل بيرسون الأول للالتواء ومعامل بيرسون الثاني للالتواء .

وهناك مقاييس أخرى للالتواء معرفة بدلالة اربيعات والمثلثيات وهي كالآتي :

$$(١٣) \quad \text{معامل الالتواء الربيعي} = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1}$$

$$(١٤) \quad \text{معامل الالتواء المثلثي} = \frac{(P_{90} - P_{50}) - (P_{50} - P_{10})}{P_{90} - P_{10}} = \frac{P_{90} - 2P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}}$$

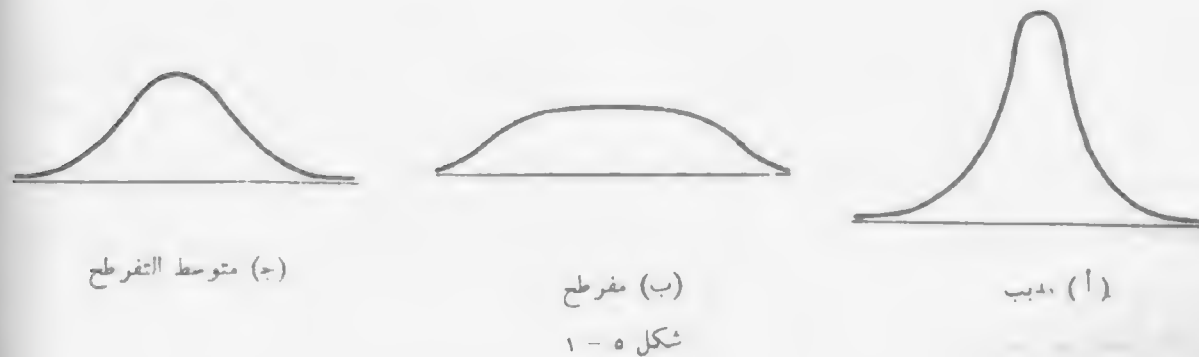
وهناك مقياس مهم آخر للالتواء باستخدام المزوم الثالث حول الوسط الحسابي معبراً عنه بصيغة غير مميزة ويعرف كالآتي :

$$(١٥) \quad \text{معامل الالتواء باستخدام المزوم} = a_3 = \frac{m_3}{s^3} = \frac{m_3}{(\sqrt{m_2})^3} = \frac{m_3}{\sqrt{m_2^3}}$$

طرق أخرى لقياس الالتواء تستخدم أحياناً a_3 و b_1 . والمنحنيات تامة التواء مثل المنحنى الطبيعي تكون كلا من b_1 ، a_3 يساوي الصفر .

التفرطح :

التفرطح هو درجة تدبب قبة التوزيع ، ويؤخذ عادة بالقياس إلى التوزيع الطبيعي . التوزيع ذو القمة العالية نسبياً مثل المنحنى المعطى بالشكل ١ - ١ (أ) يسمى منحنى مدبباً بينما المنحنى بالشكل ١ - ٢ (ب) حيث قبة مسطحة يسمى منحنى متوسط التفرطح الطبيعي المعطى ١ - ٣ (ج) حيث قبة ليست مدببة ولا مسطحة يسمى متوسط التفرطح



أحد مقاييس التفرطح تستخدم العزم الرابع حول الوسط الحسابي على الصورة غير المميزة ويعرف بالآتي :

$$(١٦) \quad \text{معامل التفرطح باستخدام العزم} = a_4 = \frac{m_4}{s_4} = \frac{m_4}{m_2^2}$$

الذي يرمز له غالباً بالرمز b_2 . وفي التوزيع الطبيعي $b_2 = a_4 = 3$. ولهذا السبب فإن التفرطح يعرف أحياناً بـ $(b_2 - 3)$ حيث يصير موجباً للتوزيع المدبب وسالباً للتوزيع المفطح ؛ وصفرأً للتوزيع الطبيعي .

يستخدم أيضاً مقياس آخر للتفرطح يعتمد على الريبعدت والمنحنينات ويعطى :

$$(١٧) \quad \kappa = \frac{Q}{P_{90} - P_{10}}$$

حيث $Q = \frac{1}{2} (Q_3 - Q_1)$ نصف المدى الربيعي . وسوف نشير إلى هذا المقياس بمعامل التفرطح المشيبي . للتوزيع الطبيعي تكون قيمة هذا المعامل 0.263 . (انظر المسألة ٥ - ١٤) .

عزوم ، التواء وتفرطح المجتمع :

عندما يكون من المطلوب التفرقة بين عزوم ومقاييس الالتواء والتفرطح لعينة من تلك التي تقابلها في المجتمع الذي سميت منه هذه العينة . فإنه من المعتاد استخدام الرموز اللاتينية للأولى والرموز اليونانية للآخر . فإذا كانت عزوم العينة يرمز لها بالرموز m_r ، m_r' فإن الرموز اليونانية المقابلة هي μ_r ، μ_r' (μ هو الحرف اليوناني « ميو ») . أما الدليل فتستخدم دائماً الحروف اللاتينية . كذلك فإنه إذا كانت مقاييس الالتواء والتفرطح للعينة يرمز لها بالرموز a_3 و a_4 على الترتيب ؛ فإن التواء وتفرطح المجتمع يرمز له بالرموز α_3 ، α_4 (هو الحرف اليوناني « ألف ») .

وقد سبق أن ذكرنا أن الانحراف المعياري للعينة وللمجتمع يرمز لها بالرموز σ ، s على الترتيب .

مسائل محلولة :

العزوم :

٥ - أوجد العزم (أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع لمجموعة الأرقام 2 ، 3 ، 7 ، 8 ، 10

الحل :

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{2 + 3 + 7 + 8 + 10}{5} = \frac{30}{5} = 6 \quad \text{(أ) العزم الأول أو الوسط الحسابي}$$

$$X^2 = \frac{\sum X^2}{N} = \frac{2^2 + 3^2 + 7^2 + 8^2 + 10^2}{5} = \frac{226}{5} = 45.2 \quad \text{(ب) العزم الثاني}$$

$$X^3 = \frac{\sum X^3}{N} = \frac{2^3 + 3^3 + 7^3 + 8^3 + 10^3}{5} = \frac{1890}{5} = 378 \quad \text{(ج) العزم الثالث}$$

$$X^4 = \frac{\sum X^4}{N} = \frac{2^4 + 3^4 + 7^4 + 8^4 + 10^4}{5} = \frac{16594}{5} = 3318.8 \quad \text{(د) العزم الرابع}$$

٥ - ٢ أوجد المزوم (أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع حول الوسط الحسابي لمجموعة الأرقام بالمسألة ٥ - ١

الحل :

$$m_1 = \overline{(X - \bar{X})} = \frac{\sum (X - \bar{X})}{N} = \frac{(2 - 6) + (3 - 6) + (7 - 6) + (8 - 6) + (10 - 6)}{5} = \frac{0}{5} = 0 \quad (أ)$$

m_1 دائماً تساوى صفراً نظراً لأن $\bar{X} - \bar{X} = X - X = 0$ (أنظر المسألة ٢ - ١٦ : الفصل الثالث)

$$m_2 = \overline{(X - \bar{X})^2} = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N} = \frac{(2 - 6)^2 + (3 - 6)^2 + (7 - 6)^2 + (8 - 6)^2 + (10 - 6)^2}{5} = \frac{46}{5} = 9.2 \quad (ب)$$

لاحظ أن m_2 هو التباين s^2 .

$$m_3 = \overline{(X - \bar{X})^3} = \frac{\sum (X - \bar{X})^3}{N} = \frac{(2 - 6)^3 + (3 - 6)^3 + (7 - 6)^3 + (8 - 6)^3 + (10 - 6)^3}{5} = \frac{-18}{5} = -3.6 \quad (ج)$$

$$m_4 = \overline{(X - \bar{X})^4} = \frac{\sum (X - \bar{X})^4}{N} = \frac{(2 - 6)^4 + (3 - 6)^4 + (7 - 6)^4 + (8 - 6)^4 + (10 - 6)^4}{5} = \frac{610}{5} = 122 \quad (د)$$

٥ - ٣ أوجد المزوم (أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

حول النقطة 4 لمجموعة الأرقام بالمسألة ٥ - ١

الحل :

$$(a) m_1' = \overline{(X - 4)} = \frac{\sum (X - 4)}{N} = \frac{(2 - 4) + (3 - 4) + (7 - 4) + (8 - 4) + (10 - 4)}{5} = 2 \quad (أ)$$

$$m_2' = \overline{(X - 4)^2} = \frac{\sum (X - 4)^2}{N} = \frac{(2 - 4)^2 + (3 - 4)^2 + (7 - 4)^2 + (8 - 4)^2 + (10 - 4)^2}{5} = \frac{66}{5} = 13.2 \quad (ب)$$

$$m_3' = \overline{(X - 4)^3} = \frac{\sum (X - 4)^3}{N} = \frac{(2 - 4)^3 + (3 - 4)^3 + (7 - 4)^3 + (8 - 4)^3 + (10 - 4)^3}{5} = \frac{298}{5} = 59.6 \quad (ج)$$

$$m_4' = \overline{(X - 4)^4} = \frac{\sum (X - 4)^4}{N} = \frac{(2 - 4)^4 + (3 - 4)^4 + (7 - 4)^4 + (8 - 4)^4 + (10 - 4)^4}{5} = \frac{1650}{5} = 330 \quad (د)$$

٥ - 4 باستخدام نتائج المسائل ٥ - ٢ ، ٥ - ٣ ، حقق العلاقة بين المروم

$$m_3 = m_3' - 3m_1'm_2' + 2m_1'^3 \quad (ب) \quad m_2 = m_2' - m_1'^2 \quad (أ)$$

الحل :

من المسألة ٥ - ٣ : $5.3: m_1' = 2, m_2' = 13.2, m_3' = 59.6, m_4' = 330$ إذن

$$m_2 = m_2' - m_1'^2 = 13.2 - (2)^2 = 13.2 - 4 = 9.2 \quad (أ)$$

$$m_3 = m_3' - 3m_1' m_2' + 2m_1'^3 = 59.5 - 3(2)(13.2) + 2(2)^3 = 59.5 - 79.2 + 16 = -3.6 \quad (ب)$$

$$m_4 = m_4' - 4m_1' m_3' + 6m_1'^2 m_2' - 3m_1'^4 = 330 - 4(2)(59.5) + 6(2)^2(13.2) - 3(2)^4 = 122 \quad (ج)$$

تتفق مع نتائج المسألة ٥ - ٢ .

$$٥ - ٥ \text{ أثبت أن (أ) } m_2 = m_2' - m_1'^2 \quad (ب) \quad m_3 = m_3' - 3m_1' m_2' + 2m_1'^3$$

$$(ج) \quad m_4 = m_4' - 4m_1' m_3' + 6m_1'^2 m_2' - 3m_1'^4$$

الحل :

$$(أ) \text{ إذا كانت } d = X - A \text{ فإن } \bar{d} = A + d \text{ ، } \bar{X} = A + d \text{ ، } \bar{X} - \bar{X} = d - \bar{d} \text{ ، } X - \bar{X} = d - \bar{d}$$

$$m_1 = \overline{(X - \bar{X})^2} = \overline{(d - \bar{d})^2} = \overline{d^2 - 2d\bar{d} + \bar{d}^2} \\ = \bar{d}^2 - 2\bar{d}\bar{d} + \bar{d}^2 = \bar{d}^2 - \bar{d}^2 = m_1' - m_1'^2$$

$$m_3 = \overline{(X - \bar{X})^3} = \overline{(d - \bar{d})^3} = \overline{(d^3 - 3d^2\bar{d} + 3d\bar{d}^2 - \bar{d}^3)} \quad (ب) \\ = \bar{d}^3 - 3\bar{d}\bar{d}^2 + 3\bar{d}^2\bar{d} - \bar{d}^3 = \bar{d}^3 - 3\bar{d}\bar{d}^2 + 2\bar{d}^3 = m_3' - 3m_1' m_2' + 2m_1'^3$$

$$m_4 = \overline{(X - \bar{X})^4} = \overline{(d - \bar{d})^4} = \overline{(d^4 - 4d^3\bar{d} + 6d^2\bar{d}^2 - 4d\bar{d}^3 + \bar{d}^4)} \\ = \bar{d}^4 - 4\bar{d}\bar{d}^3 + 6\bar{d}^2\bar{d}^2 - 4\bar{d}^4 + \bar{d}^4 = \bar{d}^4 - 4\bar{d}\bar{d}^3 + 6\bar{d}^2\bar{d}^2 - 3\bar{d}^4 \quad (ج) \\ = m_4' - 4m_1' m_3' + 6m_1'^2 m_2' - 3m_1'^4$$

حساب العزوم من البيانات المجمعة :

٥ - ٦ أوجد العزوم الأربعة الأولى حول الوسط لتوزيع الأوزان في المسألة ٣ - ٢٢ ؛ الفصل الثالث

جدول ٥ - ١

X	u	f	fu	fu ²	fu ³	fu ⁴
61	-2	5	-10	20	-40	80
64	-1	18	-18	18	-18	18
67	0	42	0	0	0	0
70	1	27	27	27	27	27
73	2	8	16	32	64	128
		N = Σf = 100	Σfu = 15	Σfu ² = 97	Σfu ³ = 33	Σfu ⁴ = 253

إذن

$$m_1' = c \frac{\Sigma fu}{N} = (3) \left(\frac{15}{100} \right) = 0.45$$

$$m_3' = c^3 \frac{\Sigma fu^3}{N} = (3)^3 \left(\frac{33}{100} \right) = 8.91$$

$$m_2' = c^2 \frac{\Sigma fu^2}{N} = (3)^2 \left(\frac{97}{100} \right) = 8.73$$

$$m_4' = c^4 \frac{\Sigma fu^4}{N} = (3)^4 \left(\frac{253}{100} \right) = 204.93$$

محيث

$$\begin{aligned} m_1 &= 0 \\ m_2 &= m_2' - m_1'^2 = 8.73 - (0.45)^2 = 8.5275 \\ m_3 &= m_3' - 3m_1' m_2' + 2m_1'^3 = 8.91 - 3(0.45)(8.73) + 2(0.45)^3 = 2.6932 \\ m_4 &= m_4' - 4m_1' m_3' + 6m_1'^2 m_2' - 3m_1'^4 \\ &= 204.93 - 4(0.45)(8.91) + 6(0.45)^2(8.73) - 3(0.45)^4 = 199.3759 \end{aligned}$$

٥ - ٧ أوجد (أ) m_1' (ب) m_2' (ج) m_3' (د) m_4' (هـ) m_1 (و) m_2 (ز) m_3 (ح) m_4
(ط) X (ى) s (ك) X^2 (ل) X^3 للتوزيع بالمسألة ٤ - ١٩ ، الفصل الرابع .

الحل :

جدول ٥ - ٢

X	u	f	fu	fu^2	fu^3	fu^4
70	-6	4	-24	144	-864	5184
74	-5	9	-45	225	-1125	5625
78	-4	16	-64	256	-1024	4096
82	-3	28	-84	252	-756	2268
86	-2	45	-90	180	-360	720
90	-1	66	-66	66	-66	66
94	0	85	0	0	0	0
98	1	72	72	72	72	72
102	2	54	108	216	432	864
106	3	38	114	342	1026	3078
110	4	27	108	432	1728	6912
114	5	18	90	450	2250	11250
118	6	11	66	396	2376	14256
122	7	5	35	245	1715	12005
126	8	2	16	128	1024	8192
		$N = \Sigma f = 480$	$\Sigma fu = 236$	$\Sigma fu^2 = 3404$	$\Sigma fu^3 = 6428$	$\Sigma fu^4 = 74588$

$$m_3' = c^3 \frac{\Sigma fu^3}{N} = (4)^3 \left(\frac{6428}{480} \right) = 857.0667 \quad (ج) \quad m_1' = c \frac{\Sigma fu}{N} = (4) \left(\frac{236}{480} \right) = 1.9667 \quad (أ)$$

$$m_4' = c^4 \frac{\Sigma fu^4}{N} = (4)^4 \left(\frac{74588}{480} \right) = 39780.2667 \quad (د) \quad m_2' = c^2 \frac{\Sigma fu^2}{N} = (4)^2 \left(\frac{3404}{480} \right) = 113.4667 \quad (ب)$$

$$m_1 = 0 \quad (هـ)$$

$$m_2 = m_2' - m_1'^2 = 113.4667 - (1.9667)^2 = 109.5988 \quad (و)$$

$$m_3 = m_3' - 3m_1' m_2' + 2m_1'^3 = 857.0667 - 3(1.9667)(113.4667) + 2(1.9667)^3 = 202.8158 \quad (ز)$$

$$m_4 = m_4' - 4m_1' m_3' + 6m_1'^2 m_2' - 3m_1'^4 = 35627.2853 \quad (ح)$$

$$\bar{X} = (\bar{A} + d) = A + m_1' = A + c \frac{\Sigma fu}{N} = 94 + 1.9667 = 95.97 \quad (ط)$$

$$s = \sqrt{m_2} = \sqrt{109.5988} = 10.47 \quad (ى)$$

$$\begin{aligned} X^2 &= (A + d)^2 = (A^2 + 2Ad + d^2) = A^2 + 2Ad + d^2 = A^2 + 2Am_1' + m_2' \quad (ك) \\ &= (94)^2 + 2(94)(1.9667) + 113.4667 = 9319.2063, \text{ or } 9319 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X^3 &= (A + d)^3 = (A^3 + 3A^2d + 3Ad^2 + d^3) = A^3 + 3A^2d + 3Ad^2 + d^3 \quad (ل) \\ &= A^3 + 3A^2m_1' + 3Am_2' + m_3' = 915\,571.9597, \text{ or } 915\,600 \end{aligned}$$

طريقة شارليز للمراجعة :

٥ - ٨ وضع كيفية استخدام طريقة شارليز للمراجعة للحسابات بالمسألة ٥ - ٧

الحل :

للحصول على المراجعة المطلوبة فإننا نضيف الأعمدة التالية إلى تلك التي بالمسألة ٥ - ٧ باستثناء العمود الثاني حيث كرر هنا للتسهيل .

جدول ٥-٣

$u + 1$	f	$f(u + 1)$	$f(u + 1)^2$	$f(u + 1)^3$	$f(u + 1)^4$
-5	4	-20	100	-500	2500
-4	9	-36	144	-576	2304
-3	16	-48	144	-432	1296
-2	28	-56	112	-224	448
-1	45	-45	45	-45	45
0	66	0	0	0	0
1	85	85	85	85	85
2	72	144	288	576	1152
3	54	162	486	1458	4374
4	38	152	608	2432	9728
5	27	135	675	3375	16875
6	18	108	648	3888	23328
7	11	77	539	3773	26411
8	5	40	320	2560	20480
9	2	18	162	1458	13122
$N = \Sigma f = 480$		$\Sigma f(u + 1) = 716$	$\Sigma f(u + 1)^2 = 4356$	$\Sigma f(u + 1)^3 = 17828$	$\Sigma f(u + 1)^4 = 122148$

في كل من المجموعات التالية أخذ الصف الأول من الجدول ٥-٣ والثاني من الجدول ٥-٣ بالمسألة ٥-٧ . تساوى النتائج يعطى المراجعة المطلوبة .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \Sigma fu + 1) = 716 \\ \Sigma fu + N = 236 + 480 = 716 \end{cases} \\ \begin{cases} \Sigma fu + 1)^2 = 4356 \\ \Sigma fu^2 + 2 \Sigma fu + N = 3404 + 2(236) + 480 = 4356 \end{cases} \\ \begin{cases} \Sigma fu + 1)^3 = 17828 \\ \Sigma fu^3 + 3 \Sigma fu^2 + 3 \Sigma fu + N = 6428 + 3(3404) + 3(236) + 480 = 17828 \end{cases} \\ \begin{cases} \Sigma fu + 1)^4 = 122148 \\ \Sigma fu^4 + 4 \Sigma fu^3 + 6 \Sigma fu^2 + 4 \Sigma fu + N = 74588 + 4(6428) + 6(3404) + 4(236) + 480 = 122148 \end{cases} \end{aligned}$$

تصحيح شبرد للمزوم :

٥-٩ طبق تصحيح شبرد لإيجاد المزوم حول الوسط للبيانات في (١) المسألة ٥-٦ (ب) المسألة ٥-٧ .

الحل :

$$\begin{aligned} m_2 (\text{المصحح}) &= m_2 - c^2/12 = 8.5275 - 3^2/12 = 7.7775 \quad (١) \\ &= m_4 - \frac{1}{2}c^2m_2 + \frac{1}{240}c^4 \\ &= 199.3759 - \frac{1}{2}(3)^2(8.5275) + \frac{1}{240}(3)^4 \\ m_4 (\text{المصحح}) &= 163.3646 \end{aligned}$$

لا يحتاجان إلى تصحيح .

$$\begin{aligned} m_2 (\text{المصحح}) &= m_2 - c^2/12 = 109.5988 - 4^2/12 = 108.2655 \quad (ب) \\ &= m_4 - \frac{1}{2}c^2m_2 + \frac{1}{240}c^4 \\ &= 35627.2853 - \frac{1}{2}(4)^2(109.5988) + \frac{1}{240}(4)^4 \\ m_4 (\text{المصحح}) &= 34757.9616 \end{aligned}$$

الالتواء :

٥-١٠ أوجد معامل التواء بيرسون (١) الأول (ب) الثاني لاجور الـ 65 عاملا في شركة P and R . أنظر المسألة ٣-٤٤ ، الفصل الثالث والمسألة ٤-١٨ ، الفصل الرابع .

الحل :

$$\text{الوسط } £ 79.76 , \text{ الوسيط } £ 79.06 , \text{ الانحراف المعياري } £ 15.60 = s$$

$$\frac{£ 79.76 - £ 77.50}{£ 15.60} = 0.1448, \text{ or } 0.14. = \frac{\text{الوسط} - \text{المنوال}}{s} = (١) \text{ المعامل الأول للتفرطح}$$

$$\frac{3(£ 79.76 - £ 79.06)}{£ 15.60} = 0.1346, \text{ or } 0.13. = \frac{3(\text{الوسط} - \text{الوسيط})}{s} = (ب) \text{ المعامل الثاني للتفرطح}$$

إذا استخدمنا الانحراف المعياري المصحح (أنظر المسألة ٤-٢١ (١) ، الفصل الرابع) فإن هذه المعاملات تصبح ، على الترتيب ،

$$(١) \quad \frac{£79.76 - £77.50}{£15.33} = 0.1474 \text{ or } 0.15 = \frac{\text{الوسط} - \text{المنسول}}{s \text{ (المصحح)}}$$

$$(ب) \quad \frac{3(£79.76 - £79.06)}{£15.33} = 0.1370, \text{ or } 0.14 = \frac{3 (\text{الوسط} - \text{الوسيط})}{s \text{ (المصحح)}}$$

بما أن المعاملات موجبة فإن التوزيع ملئ التواء موجب ، بمعنى ، ملئ إلى اليمين .

١١-٥ أوجد (١) معامل الالتواء الربيعي (ب) معامل الالتواء المثني لتوزيع المسألة ٥-١٠ (أنظر المسألة ٣-٤٤ ، الفصل الثالث)

الحل :

$$Q_1 = £68.25, Q_2 = P_{50} = £79.06, Q_3 = £90.75, P_{10} = D = £58.12, P_{90} = D_0 = £101.00$$

$$(١) \quad \text{معامل الالتواء الربيعي} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \frac{£90.75 - 2(£79.06) + £68.25}{£90.75 - £68.25} = 0.0391$$

$$(ب) \quad \text{معامل الالتواء المثني} = \frac{P_{90} - 2P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}} = \frac{£101.00 - 2(£79.06) + £58.12}{£101.00 - £58.12} = 0.0233$$

١٢-٥ أوجد معامل الالتواء باستخدام العزوم a_3 ، لكل من (١) توزيع أوزان الطلبة في جامعة XYZ (أنظر المسألة ٥-٦) .

(ب) نسب الذكاء I.Q. لطلبة المدرسة الابتدائية (المسألة ٥-٧)

الحل :

(١)

$$m_2 = s^2 = 8.5275, m_3 = -2.6932.$$

$$a_3 = \frac{m_3}{s^3} = \frac{m_3}{(\sqrt{m_2})^3} = \frac{-2.6932}{(\sqrt{8.5275})^3} = 0.1413, \text{ or } -0.14. \quad \text{إذن}$$

إذا استخدم تصحيح شير للبيانات المجعفة (أنظر المسألة ٥-٩ (١)) إذن

$$a_3 \text{ (المصحح) } = \frac{m_3}{(\sqrt{\text{corrected } m_2})^3} = \frac{-2.6932}{(\sqrt{7.7775})^3} = -0.1242 \text{ or } -0.12$$

$$a_3 = \frac{m_3}{s^3} = \frac{m_3}{(\sqrt{m_2})^3} = \frac{202.8158}{(\sqrt{109.5988})^3} = 0.1768, \text{ or } 0.18 \quad (\text{ب})$$

إذا استخدم تصحيح شبرد للبيانات المجعومة (أنظر المسألة ٩-١) فإن

$$a_3 (\text{المصحح}) = \frac{m_3}{(\sqrt{\text{corrected } m_2})^3} = \frac{202.8158}{(\sqrt{108.2655})^3} = 0.1800, \text{ or } 0.18$$

لاحظ أن كلا التوزيعين ملأوا التواء بسيطاً ، (١) إلى اليسار (سالب) ، (ب) إلى اليمين (موجب)

التوزيع (ب) أكثر التواء من (١) . بمعنى أن (١) أكثر تماثلاً من (ب) ويدل على ذلك الحقيقة أن القيمة الرقمية أو القيمة المطلقة لمعامل الالتواء في (ب) أكبر منها في (١) .

التفرطح :

١٢-٥ أوجد معامل التفرطح باستخدام العزوم . a_4 . لبيانات (١) المسألة ٩-١ (ب) مسألة ٧

الحل :

$$a_4 = \frac{m_4}{s^4} = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{199.3759}{(8.5275)^2} = 2.7418, \text{ or } 2.74 \quad (\text{أ})$$

إذا استخدم تصحيح شبرد (أنظر المسألة ٩-١) ، فإن

$$a_4 (\text{المصحح}) = \frac{m_4 (\text{المصحح})}{(a_4 (\text{المصحح}))^2} = \frac{163.3646}{(7.7775)^2} = 2.7007, \text{ or } 2.70$$

$$a_4 = \frac{m_4}{s_4} = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{35.627.2853}{(109.5988)^2} = 2.9660, \text{ or } 2.97 \quad (\text{ب})$$

إذا استخدم تصحيح شبرد (أنظر المسألة ٩-١) (ب) ، فإن

$$a_4 (\text{المصحح}) = \frac{m_4 (\text{المصحح})}{(m_2 (\text{المصحح}))^2} = \frac{34.757.9616}{(108.2655)^2} = 2.9653, \text{ or } 2.97$$

وبما أنه في التوزيع الطبيعي $a_4 = 3$ ، ينتج عن ذلك أن كلا التوزيعين (١) ، (ب) مفرطحان وذلك بالمقارنة بالتوزيع الطبيعي (بمعنى أنه أقل تدبياً من التوزيع الطبيعي) .

إذا أخذنا خاصية التدب فإن التوزيع (ب) يقرب بالتوزيع الطبيعي أكثر من التوزيع (١) ولكن ، من المسألة ١٢-٥ التوزيع (١) أكثر تماثلاً من (ب) بحيث إذا أخذنا صفة التماثل فإن (١) يقرب بالتوزيع أكثر من (ب) .

١٤-٥ (١) احسب معامل التفرطح المثني $\kappa = Q/(P_{90} - P_{10})$ لتوزيع المسألة ١١-٥ .

(ب) ما مدى قربيه من التوزيع الطبيعي ؟

الحل :

$$Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2}(\pounds 90.75 - \pounds 68.25) = \pounds 11.25, P_{90} - P_{10} = \pounds 101.00 - \pounds 58.12 = \pounds 42.88 \quad (١)$$

$$\kappa = Q/(P_{90} - P_{10}) = 0.262 \quad \text{إذن}$$

(ب) بما أن κ للتوزيع الطبيعي هو 0.263 ، ينتج عن ذلك أن التوزيع المعطى متوسط التفرطح (بمعنى أن تحديه يقترب من التوزيع الطبيعي) . أى أن تفرطح التوزيع يماثل تقريبا تفلطح التوزيع الطبيعي مما يؤدي إلى الاعتقاد بأنه يمكن تقريبه بشكل جيد باستخدام التوزيع الطبيعي إذا أخذنا في الاعتبار تفرطحه .

مسائل إضافية

العزوم :

١٥-٥ أوجد العزم (١) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع لمجموعة الأرقام 4, 7, 5, 9, 8, 3, 6

ج : (١) 6 (ب) 40 (ج) 288 (د) 2188

١٦-٥ أوجد العزم (١) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

حول الوسط لمجموعة الأرقام بالمسألة ١٥-٥ .

ج : (١) 0 (ب) 4 (ج) 0 (د) 25.86

١٧-٥ أوجد العزم (١) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

حول الرقم 7 لمجموعة الأرقام بالمسألة ١٥-٥ .

ج : (١) -1 (ب) 5 (ج) -91 (د) 53

١٨-٥ باستخدام نتائج المسألة ١٦-٥ ، ١٧-٥ ، أثبت العلاقات بين العزوم

$$m_3 = m_3' - 3m_1' m_2' + 2m_1'^3 \quad (ب) \quad m_2 = m_2' - m_1'^2 \quad (١)$$

$$m_4 = m_4' - 4m_1' m_3' + 6m_1'^2 m_2' - 3m_1'^4 \quad (٢)$$

١٩-٥ أوجد المزوم الأربعة حول الوسط لمجموعة أرقام المتوالية الحسابية 2, 5, 8, 11, 14, 17 .

ج : 0, 26.25, 0, 1193.1

٢٠-٥ أثبت أن (١) $m_2' = m_2 + h^2$ (ب) $m_3' = m_3 + 3hm_2 + h_3$ (ج) $m_4' = m_4 + 4hm_3 + 6h^2m_2 + h^4$

حيث $h = m_1'$

٢١-٥ إذا كان المزوم الأول حول الرقم 2 هو 5 ، فما هو الوسط ؟

ج : 7

٢٢-٥ إذا كانت المزوم الأربعة الأولى حول الرقم 3 تساوى 2, 10, — 25, 50 —

أوجد المزوم المقابلة (١) حول الوسط (ب) حول الرقم 5 (ج) حول الصفر .

(ج) (١) 0, 6, 19, 42 (ب) 4, 22, — 117, 560 (ج) 1, 7, 38, 74

٢٣-٥ أوجد المزوم الأربعة الأولى حول الوسط للأرقام 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1.

ج : 0.02344, 0.0586, 0.0696

٢٤-٥ (١) أثبت أن $m_6 = m_6' + 5m_1'm_4' + 10m_1'^2m_2' + 10m_1'^3m_3' + 4m_1'^4$ (ب) أوجد صيغة مماثلة لـ m_6

٢٥-٥ من مجموع N عدد ، الكسر p يعبر عن الأرقام التي تأخذ القيمة واحد والكسر $q = 1 - p$ يعبر عن الأرقام التي تأخذ القيمة صفر . أوجد

(١) m_1 (ب) m_2 (ج) m_3 (د) m_4 لمجموعة الأرقام . قارن بالمسألة ٢٣-٥ .

ج : (١) $m_1 = 0$ (ب) $m_2 = pq$ (ج) $m_3 = pq(q - p)$ (د) $m_4 = dq(p^2 - pq + q^2)$

٢٦-٥ أثبت أن المزوم الأربعة الأولى حول الوسط في المتوالية العددية $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n - 1)d$

$$m_1 = 0, m_2 = \frac{1}{12}(n^2 - 1)d^2, m_3 = 0, m_4 = \frac{1}{240}(n^2 - 1)(3n^2 - 7)d^4$$

قارن بالمسألة ١٩-٥ . أنظر أيضا المسألة ٦٩-٤ ، الفصل الرابع

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + (n - 1)^4 = \frac{1}{30}n(n - 1)(2n - 1)(3n^2 - 3n - 1).$$

ملحوظة :

المزوم من البيانات المجمعة :

X	f
12	1
14	4
16	6
18	10
20	7
22	2

المجموع 30

٢٧-٥ احسب المزوم الأربعة الأولى حول الوسط للتوزيع بالجدول ٤-٥

$$m_1 = 0, m_2 = 5.97, m_3 = -0.397, m_4 = 89.22 \quad \text{ج :}$$

٢٨-٥ وضع كيفية استخدام طريقة شارليز للمراجعة عند إجراء الحسابات بالمسألة ٢٧-٥

٢٩-٥ طبق معامل تصحيح شبرد للمزوم التي حصلت عليها بالمسألة ٢٧-٥ .

$$\text{ج : } m_1 (\text{مصحح}) = 0, m_2 (\text{مصحح}) = 5.440, m_3 (\text{مصحح}) = -0.5920, m_4 (\text{مصحح}) = 76.2332$$

٣٠-٥ أوجد المزوم الأربعة الأولى حول الوسط للتوزيع بالمسألة ٣-٩٥ بالفصل الثالث .

(أ) بدون تصحيح شبرد (ب) باستخدام تصحيح شبرد .

$$\text{ج : (أ) } m_1 = 0, m_2 = 53.743, m_3 = 61.853, m_4 = 8491.4$$

$$\text{(ب) } m_1 (\text{مصحح}) = 51.660, m_2 (\text{مصحح}) = 7837.8$$

٣١-٥ أوجد m_1 (أ) m_2 (ب) m_3 (ج) m_4 (د)

$$\bar{X} \text{ (هـ) } s \text{ (و) } \bar{X}^2 \text{ (ز) } \bar{X}^3 \text{ (ح) } \bar{X}^4 \text{ (ط) } (\bar{X} + 1)^3 \text{ (ي)}$$

لتوزيع المسألة ٣-٦٢ ، الفصل الثالث .

$$(أ) 0 \quad (ب) 52.95 \quad (ج) 92.35 \quad (د) 7158.20 \quad (هـ) 26.2 \quad (و) 7.28 \quad (ز) 739.58$$

$$(ح) 22247. \quad (ط) 706428 \quad (ي) 24545$$

الالتواء :

٢٢-٥ أوجد معامل الالتواء باستخدام المزوم a_3 ، لتوزيع المسألة ٢٧-٥

(أ) بدون استخدام تصحيح شبرد (ب) باستخدام تصحيح شبرد

$$\text{ج : (أ) } -0.2464 \quad (ب) -0.2464$$

٢٣-٥ أوجد معامل الالتواء باستخدام المزوم a_3 ، لتوزيع المسألة ٣-٥٩ ، الفصل الثالث . أنظر المسألة ٣٠-٥ .

$$\text{ج : } 0.1570$$

٣٤-٥ العزم الثاني حول الوسط لتوزيعين هو 16.9 بينما العزم الثالث حول الوسط لهما هو 12.8 — ، 8.1 —
على الترتيب . أى التوزيعين أكثر التواء إلى اليسار ؟

ج : التوزيع الأول .

٣٥-٥ أوجد معامل التواء بيرسون (١) الأول (ب) الثاني . لتوزيع المسألة ٣-٥٩ ، الفصل الثالث عدد الفروق .
ج : (١) 0.040 (ب) 0.074

٣٦-٥ أوجد (١) معامل الالتواء الربيعي (ب) معامل الالتواء المثني لتوزيع المسألة ٣-٥٩ ، الفصل الثالث ،
قارن النتيجة بنتيجة المسألة ٣٥-٥ واشرح .

(١) -0.02 (ب) -0.13

٣٧-٥ (١) وضع السبب في أن معامل بيرسون للالتواء غير مناسب لتوزيع المسألة ٢-٣١ الفصل الثاني :

(ب) أوجد معامل الالتواء الربيعي لهذا التوزيع وفسر النتيجة .

ج : (ب) -0.078

التفرطح :

٣٨-٥ أوجد معامل التفرطح باستخدام العزوم a_4 ، لتوزيع المسألة ٥-٢٧

(١) بدون استخدام تصحيح شبرد (ب) باستخدام تصحيح شبرد

ج : (١) 2.62 (ب) 2.58

٣٩-٥ أوجد معامل التفرطح باستخدام العزوم لتوزيع المسألة ٣-٩٤ ، الفصل الثالث .

(١) بدون استخدام تصحيح شبرد (ب) باستخدام تصحيح شبرد . (أنظر المسألة ٥-٣٠) .

ج : (١) 2.94 (ب) 2.94

٤٠-٥ العزم الرابع حول الوسط لكلا من التوزيعين بالمسألة ٥-٣٤ هما 780 ، 230 على الترتيب . أى التوزيعين أكثر
تقريباً للتوزيع المعتدل لو نظرنا إلى

(١) تدبب القمة (ب) الالتواء

ج : (١) الثاني (ب) الأول

٤١-٥ أى من التوزيعات بالمسألة ٥-٤٠ (١) مدبب (ب) متوسط التفرطح (ج) مفطح ؟

ج : (١) الثاني (ب) ليس أى منهما (ج) الأول .

٤٢-٥ الانحراف المياري لتوزيع متماثل هو 5 . ماذا يجب أن يكون عليه الحزم الرابع حول الوسط بحيث يكون التوزيع (١) مديب (ب) متوسط التفرطح (ج) مفرطح ؟

ج : (١) أكبر من 1875 (ب) يساوي 1875 (ج) أقل من 1875

٤٣-٥ (١) احسب معامل التفرطح المثلى ، κ لتوزيع المسألة ٣-٩٠ الفصل الثالث .

(ب) قارن نتيجتك بالنتيجة النظرية 0.263 لتوزيع الطبيعي وفسر ذلك .

(ج) كيف يمكن التوفيق بين هذه النتيجة بتلك التي حصلت عليها من المسألة ٥-٣٩

ج : (١) 0.313

الفصل السادس

اساسيات نظرية الاحتمالات

التعريف التقليدي للاحتمالات :

افترض أن الحدث E يمكن أن يحدث بـ h طريقة وكانت n عدد جميع الحالات الممكنة والتي لها نفس الفرصة في الحدوث وبهذا فإن احتمال حدوث الحدث (يسمى نجاحه) يرمز له بالرمز .

$$p = \Pr\{E\} = \frac{h}{n}$$

واحتمال عدم حدوث الحدث (يسمى فشله) يرمز له بالرمز .

$$q = \Pr\{\text{not } E\} = \frac{n-h}{n} = 1 - \frac{h}{n} = 1 - p = 1 - \Pr\{E\}$$

وبهذا فإن $p+q=1$ أو $\Pr\{E\} + \Pr\{\text{not } E\} = 1$

والحدث "not E " يرمز له أحياناً بالرمز \bar{E} , $\sim E$ أو E^c

مثال :

E تمثل الحدث ظهور الأرقام 3 أو 4 في رمية زهرة طاولة مرة واحدة .

هناك ست طرق ممكنة لوقوع الزهر ينتج عنها ظهور الأرقام 1, 2, 3, 4, 5, 6 .

وإذا كانت الزهرة غير متميزة (بمعنى أنها غير مثقلة بالرصاص بحيث تقع على عدد معين عند القائها - غير

مفشوشة) . فإننا يمكن أن نفترض أن هذه الطرق الست متساوية الحدوث . وبما أن E يمكن أن تحدث في

مرتين من هذه الطرق فإن $p = \Pr\{E\} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

احتمال عدم الحصول على 3 أو 4 (بمعنى ، الحصول على 1, 2, 5, 6) هو

$$q = \Pr\{\bar{E}\} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

الر
غير

الا

أو

هذه

لاحظ أن احتمال حدث هو رقم بين 0, 1 . إذا كان وقوع الحدث مستحيلاً ، فإن احتماله هو 0 . إذا كان الحدث لا بد أن يقع ، بمعنى أن وقوعه مؤكد ، فإن احتماله هو 1 . إذا كان احتمال حدوث حدث هو p ، فإن الترجيح في صالح حدوثه هو $q : p$. (وتقرأ « p إلى q ») ، والترجيح في صالح عدم حدوثه هو $q : p$. بهذا فإن الترجيح في صالح عدم ظهور 3 أو 4 في رمية واحدة لزهره طاولة غير متحيزة هو

$$q : p = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 2:1$$

تعريف الاحتمال كتكرار نسبي :

يعيب التعريف السابق للاحتمال أن كلمة « له نفس الفرصة في الحدوث » كلمة غامضة . وفي الواقع فإن هذه الكلمة تبدو أنها مرادفة لكلمة « متساوية الاحتمال » ، وبهذا فإن التعريف دائري حيث نعرف الاحتمال بدلالة نفسه . ولهذا السبب فإن البعض ، يستخدم تعريفاً إحصائياً للاحتمال . وطبقاً لهذا فإن الاحتمال المقدر ، أو الاحتمال الاعتباري . لحدث يؤخذ على أنه التكرار النسبي لحدوث هذا الحدث عندما تكون عدد المشاهدات كبيراً جداً . والاحتمال نفسه هو نهاية التكرار النسبي عندما يؤول عدد المشاهدات إلى ما لا نهاية .

مثال :

إذا قذفت عملة 1000 مرة ونتج عنها 529 صورة ، فإن التكرار النسبي للصورة هو $529/1000=0.529$. إذا قذفت العملة 1000 مرة أخرى ونتج عنها 493 صورة فإن التكرار النسبي في مجموع 2000 رمية هو $0.511 = (529 + 493)/2000$. وطبقاً للتعريف الإحصائي ، فإنه بالاستمرار بهذا الشكل فإننا نصبح أقرب ثم أقرب إلى رقم نسميه احتمال ظهور الصورة في رمية واحدة للعملة . من النتيجة التي حصلنا عليها هذا الرقم يجب أن يكون 0.5 إلى رقم معنوي واحد . للحصول على أرقام معنوية أكثر فإننا يجب أن نأخذ مشاهدات أخرى .

التعريف الإحصائي ، على الرغم من أنه مفيد من الناحية العملية ، إلا أن له صعوباته من وجهة النظر الرياضية ، حيث أن الرقم الذي يمثل النهاية قد لا يوجد بالفعل . لهذا السبب فإن نظرية الاحتمال الحديثة تبنى على أساس فروض حيث مفهوم الاحتمال غير معرف مثلما النقطة والخط غير معرفين في الهندسة .

الاحتمال الشرطي . الأحداث المستقلة والتابعة :

إذا كان E_1 و E_2 حدثين ، فإن احتمال حدوث E_2 علماً بأن E_1 قد حدث فعلاً يعبر عنه $Pr \{E_2 | E_1\}$ أو $Pr \{E_2 \text{ given } E_1\}$ ويسمى بالاحتمال الشرطي لـ E_2 إذا كانت E_1 حدثت بالفعل .

إذا كان حدث أو عدم حدوث E_1 لن يؤثر على احتمال حدوث E_2 فإن $Pr \{E_2 | E_1\} = Pr \{E_2\}$ ونقول في هذه الحالة أن E_1 و E_2 أحداث مستقلة ، وخلاف ذلك فإنهم أحداث تابعة .

إذا كانت $E_1 E_2$ تعبر عن الحدث « كلا من E_1, E_2 يحدثان منا » وتسمى في بعض الأحيان حدث مركب ، فإن

$$(1) \quad \Pr\{E_1 E_2\} = \Pr\{E_1\} \Pr\{E_2|E_1\}$$

وعلى وجه الخصوص

$$(2) \quad \Pr\{E_1 E_2\} = \Pr\{E_1\} \Pr\{E_2\} \quad \text{للأحداث المستقلة}$$

وللثلاثة أحداث E_1, E_2, E_3 فإن

$$(3) \quad \Pr\{E_1 E_2 E_3\} = \Pr\{E_1\} \Pr\{E_2|E_1\} \Pr\{E_3|E_1 E_2\}$$

بمعنى أن احتمال حدوث E_1, E_2, E_3 معاً يساوى احتمال حدوث E_1 مضروباً في احتمال حدوث E_2 علماً بأن E_1 قد حدث فعلاً ، مضروباً في احتمال حدوث E_3 علماً بأن كلا من E_1, E_2 قد حدثا بالفعل . وعلى وجه الخصوص .

$$(4) \quad \Pr\{E_1 E_2 E_3\} = \Pr\{E_1\} \Pr\{E_2\} \Pr\{E_3\} \quad \text{للأحداث المستقلة}$$

وبشكل عام إذا كانت $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ عدد n من الأحداث المستقلة احتمالاتها على الترتيب

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \quad \text{فإن احتمال حدوث } E_1, E_2, E_3, \dots, E_n \text{ هو } p_1 p_2 p_3 \dots p_n$$

مثال ١ :

إذا كان الحدث E_1 يعبر عن « ظهور الصورة في الرمية الخامسة لعملة » والحدث E_2 يعبر عن « ظهور الصورة في الرمية السادسة للعملة » فإن الحدثين E_1, E_2 أحداث مستقلة ، وبهذا فإن احتمال ظهور الصورة في كلا الرميتين الخامسة والسادسة هو ، بافتراض أن العملة « غير متحيزة » هو

$$\Pr\{E_1 E_2\} = \Pr\{E_1\} \Pr\{E_2\} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

مثال ٢ :

إذا كان احتمال أن يظل A على قيد الحياة 20 عاماً هو 0.7 واحتمال أن يظل B على قيد الحياة 20 عاماً هو 0.5 ، فإن احتمال أن يظل الإثنين على قيد الحياة 20 عاماً هو $0.35 = (0.7)(0.5)$.

مثال ٣ :

افترض أن صندوقاً يحتوي على 3 كور بيضاء و 2 كرة سوداء . الحدث E_1 هو « الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء » والحدث E_2 « الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء » علماً بأن الكرة التي سحبنا لا نعاد مرة ثانية .

هنا E_1, E_2 أحداث تابعة .

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء $\Pr\{E_1\} = \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$ بينما أن احتمال

أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء علماً بأن الكورق التي سحبنا كانت سوداء

$$\Pr\{E_2|E_1\} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Pr\{E_1 E_2\} = \Pr\{E_1\} \Pr\{E_2|E_1\} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

التو

على الـ

الاحداث المتنافية :

في حدثين أو عدة أحداث إذا كان حدوث أحدهما يمنع حدوث الآخر أو الآخرين فإنه يطلق عليها أحداث متنافية . بهذا إذا كانت E_1 و E_2 أحداث متنافية فإن $\Pr\{E_1 E_2\} = 0$.

إذا كان $E_1 + E_2$ يمثل الحدث بأن « أيًا من E_1 أو E_2 أو كلاهما يحدثان » فإن

$$(٥) \quad \Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1 E_2\}$$

وعلى وجه الخصوص

$$(٦) \quad \Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} \quad \text{للأحداث المتنافية}$$

وكنتميم لهذا إذا كانت E_1, E_2, \dots, E_n عدد n من الأحداث المتنافية احتمال حدوثها هو على الترتيب p_1, p_2, \dots, p_n فإن احتمال حدوث

$$E_1 \text{ أو } E_2 \text{ أو } \dots \text{ أو } E_n \text{ هو } p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

مثال ١ :

E_1 يمثل الحدث « سحب آس من مجموعة أوراق اللعب » الكوتشينة « والحدث E_2 يمثل « سحب ورقة عليها صورة الملك » إذن $\Pr\{E_1\} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ and $\Pr\{E_2\} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ احتمال سحب ورقة تكون إما آس أو ملك هو $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$

حيث أن الملك والآس لا يمكن أن يظهر معاً في سحب واحد ولهذا فهما يمدان أحداثاً متنافية .

مثال ٢ :

E_1 يمثل الحدث « سحب آس من مجموعة أوراق اللعب » الكوتشينة « و E_2 يمثل الحدث « سحب ورقة عليها صورة القلب » إذن E_1 و E_2 لا يمدان أحداثاً متنافية حيث يمكن أن تكون الورقة آس وعليها صورة القلب . وبهذا فإن احتمال سحب ورقة وتكون آس وعليها صورة القلب أو كليهما هو

$$\begin{aligned} \Pr\{E_1 + E_2\} &= \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1 E_2\} \\ &= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13} \end{aligned}$$

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة :

إذا كان المتغير X يمكن أن يأخذ مجموعة مجموعة من القيم المتقطعة X_1, X_2, \dots, X_K باحتمالات p_1, p_2, \dots, p_K على الترتيب ، حيث $p_1 + p_2 + \dots + p_K = 1$ فإنه يمكن القول أن هذا يعد تعريفاً لتوزيع احتمال متقطع للمتغير X .

الدالة $p(X)$ والتي تأخذ القيم p_1, p_2, \dots, p_K لقيم $X = X_1, X_2, \dots, X_K$ تسمى دالة الاحتمال أو التكرار X . ولأن X يمكن أن تأخذ قيماً معينة باحتمالات محددة ، فإنه يسمى غالباً بالمتغير العشوائي المتقطع . المتغير العشوائي يعرف أيضاً بالمتغير التصادفي .

مثال :

قلقت زهرق طاولة (غير متحيزتين) فإذا كان X يعبر عن مجموع النقط التي نحصل عليها . فإن التوزيع الاحتمال يمثلي بالجدول التالي

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(X)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

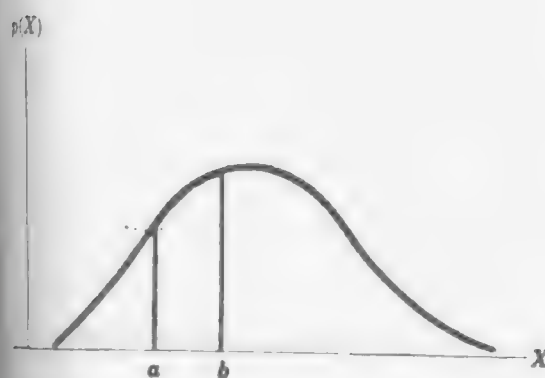
على سبيل المثال ، احتمال الحصول على مجموع 5 هو $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ وهذا فإنه في 900 رمية للزهرتين فإننا نتوقع أن 100 رمية ستعطي المجموع 5 .

لاحظ أن هذا مناظر لتوزيع التكراري النسبي حيث حلت الاحتمالات محل التكرارات النسبية وهذا يمكن التفكير في التوزيعات الاحتمالية كتوزيع نظري أو الصورة المثالية في النهاية للتوزيع التكراري النسبي عندما تكون عدد المشاهدات كبير جداً . ولهذا السبب فإنه يمكن أن ننظر إلى التوزيعات الاحتمالية كتوزيعات للمجتمعات ، بينما التوزيعات التكرارية النسبية كتوزيعات للعينات المسحوبة من هذه المجتمعات .

ويمكن تمثيل التوزيعات الاحتمالية بيانياً برسم $p(X)$ مقابل X ، كما في التوزيع التكراري النسبي . أنظر المسألة ٦-١١ بتجميع الاحتمالات نحصل على دالة التوزيع الاحتمالي التراكمي ، والمقابلة للتوزيع التكراري المتجمع النسبي . والدالة المرتبطة بهذا التوزيع تسمى أحياناً بدالة التوزيع .

التوزيعات الاحتمالية المتصلة :

الأفكار السابقة يمكن أن تمتد لتشمل الحالة التي يمكن أن يأخذ فيها المتغير X مجموعة من القيم المتصلة . ويعبر المفضل التكراري النسبي للعينات ، من الناحية النظرية أو في النهاية عن المجتمع حيث يحدد بمنحنى متصل . مثل الموضح في الشكل ٦-١ . والذي تأخذ معادلته الصورة $Y = p(X)$ المساحة الكلية تحت المنحنى المحدد بالمحور X ، تساوي واحد ، والمساحة تحت المنحنى التي تقع بين الخطوط $X = a$ و $X = b$ (مظلة في الشكل) تغطي احتمال أن X تقع بين a, b والتي يمكن التعبير عنها بـ $\Pr\{a < X < b\}$



وتسمى $p(X)$ دالة كثافة الاحتمال ، أو باختصار دالة كثافة ، وإذا أعطينا مثل هذه الدالة فإنه يمكن القول أن «ذا بعد تعريفاً للتوزيع الاحتمال المتصل للمتغير X . ويسمى المتغير X غالباً بمتغير عشوائى متصل .

وكما في حالة المتغير المتقطع ، فإنه يمكن تعريف دالة التوزيع الاحتمال التراكمى ودالة التوزيع المرتبطة بها .

التوقع الرياضى :

إذا كانت p تمثل احتمال حصول شخص على كمية من النقود S . التوقع الرياضى ، أو ببساطة التوقع ، يعرف بأنه pS .

مثال :

إذا كان احتمال أن يكسب شخص جائزة قيمتها £10 هو $1/5$ ، فإن التوقع هو $£2 = (1/5)(£10)$.

ويمكن بسهولة تعميم مفهوم التوقع . إذا كان X يعبر عن متغير عشوائى متقطع والذي يمكن أن يأخذ القيم X_1, X_2, \dots, X_K باحتمالات p_1, p_2, \dots, p_K على الترتيب حيث $p_1 + p_2 + \dots + p_K = 1$ ، التوقع الرياضى للمتغير X أو ببساطة توقع X ، ويرمز له بالرمز $E(X)$ ، يعرف بأنه

$$(v) \quad E(X) = p_1 X_1 + p_2 X_2 + \dots + p_K X_K = \sum_{j=1}^K p_j X_j = \sum pX$$

إذا وضعنا في صيغة التوقع بدلا من الاحتمالات p_j ، التكرارات النسبية f_j/N حيث $N = \sum f_j$ فإن التوقع يختصر إلى $(\sum fX)/N$ وهو الوسط الحسابى \bar{X} لعينة حجمها N حيث X_1, X_2, \dots, X_K تظهر مع تلك التكرارات النسبية وكلما صارت N أكبر فإن التكرارات النسبية f_j/N تقترب من الاحتمالات p_j وهذا يؤدي إلى تفسير $E(X)$ كمثل لمتوسط المجتمع التى سميت منه العينة . فإذا رمزنا لمتوسط العينة بالرمز m فإن متوسط المجتمع المقابل يعبر عنه بالحرف اليونانى μ (ميو)

ويمكن تعريف التوقع أيضا بالنسبة للمتغير العشوائى المستمر . ولكن التعريف يحتاج إلى استخدام علم التفاضل والتكامل .

العلاقة بين متوسط وتباين المجتمع ومتوسط وتباين العينة :

إذا سمينا عينة عشوائية حجمها N من مجتمع (بمعنى أننا نفترض أن كل العينات ذات نفس الحجم لها نفس الفرصة في السحب) ، فإنه من الممكن اثبات أن القيمة المتوقعة لمتوسط العينة m هو متوسط المجتمع μ .

لا يترتب على ما سبق استنتاج أن القيمة المتوقعة لأي كمية محسوبة من العينة تساوى القيمة المقابلة لها في المجتمع . على سبيل المثال ، فإن القيمة المتوقعة لتباين العينة كما سبق أن عرفناه لا يساوى تباين المجتمع ولكن يساوى $(N-1)/N$ مضروبا في هذا التباين . وهذه هى الطريقة التى يختارها بعض الاحصائيين في تعريف تباين العينة حيث يأخذون تعريفنا للتباين مضروبا في $(N-1)/N$.

التحليل التوافقي :

الحصول على احتمالات الحوادث المركبة يتطلب عد جميع الحالات وهذا غالبا ما يكون صعب أو مل أو كليهما . ولتسهيل العمل المطلوب فإننا نستخدم المبادئ الأساسية للموضوع المسمى بالتحليل التوافقي

المبادئ الأساسية :

إذا كان حدث يمكن أن يحدث بأي من n_1 طريقة إذا حدث ذلك فإن حدثا آخر يمكن أن يحدث بأي من n_2 طريقة ، فإن عدد الطرق التي يمكن أن يحدث بها الحدثان معا بهذا الترتيب هو $n_1 n_2$

مثال :

مثال : إذا كان هناك 3 مرشحين لمنصب المحافظ و 5 مرشحين لمنصب العمدة ، فإن عدد الطرق التي يمكن بها شغل الوظائف معا هو $15 = 3 \cdot 5$ طريقة .

مضروب n :

مضروب n ، ويرمز له بالرمز $n!$ يعرف كالاتي

$$(٨) \quad n! = n(n-1)(n-2) \dots 1$$

وهذا $144 = (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)(3 \cdot 2 \cdot 1) = 4! \cdot 3! = 120 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5! = 5! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ومن المناسب تعريف $0! = 1$

التباديل :

تباديل n من الأشياء المختلفة تأخذ r في كل مرة هي تنظيمات يتكون كل منها من r مأخوذة من n من الأشياء مع الاهتمام بالترتيب في هذه التنظيمات .

عدد تباديل n من الأشياء مأخوذة r في المرة يرمز لها بالرمز $P_{n,r}$ أو $P(n,r)$ ونعرف كالاتي

$$(٩) \quad P_{n,r} = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

وعمل وجه الخصوص ، عدد تباديل n شيء مأخوذة n في المرة هو

$$P_{n,n} = n(n-1)(n-2) \dots 1 = n!$$

مثال :

عدد تباديل الحروف a, b, c مأخوذة حرفان في كل مرة هو $6 = 3 \cdot 2 = P_{3,2}$ وهذه هي

$$ba, ac, ca, bc, cb$$

عدد تراتيب مجموعة من n من الأشياء مقسمة إلى n_1 من الأشياء المتشابهة ، n_2 الأشياء المتشابهة و هو

$$(10) \quad n = n_1 + n_2 + \dots \quad \text{حيث} \quad \frac{n!}{n_1! n_2! \dots}$$

مثال :

عدد تبديل الحروف في كلمة *Statistics* هو $\frac{10!}{3!3!1!2!1!} = 50400$ حيث أنه يوجد 3 s's ، 1 a ، 3 i's و 2 c و 1 c .

التوافيق :

توافيق n من الأشياء المختلفة مأخوذة r في كل مرة هي اختيارات يتركب كل منها من r من الـ n بصرف النظر عن الترتيب . عدد توافيق n من الأشياء مأخوذة r في كل مرة يرمز لها بالرمز ${}_nC_r$, $C(n, r)$, C_n , or $\binom{n}{r}$ وتعرف بما يلي :

$$(11) \quad {}_nC_r = \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

مثال :

عدد توافيق الحروف a, b, c مأخوذة اثنان في كل مرة هو ${}_3C_2 = \frac{3 \cdot 2}{2!} = 3$

وهي ab, ac, bc . لاحظ أن ab هي نفس التوافيق مثل ba ولكنها ليست نفس التبديل .

لاحظ أن ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$. بهذا فإن ${}_20C_{17} = {}_20C_3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1140$ عدد توافيق n من الأشياء مأخوذة 1 أو 2 . أو n في كل مرة هو

$${}_nC_1 + {}_nC_2 + \dots + {}_nC_n = 2^n - 1$$

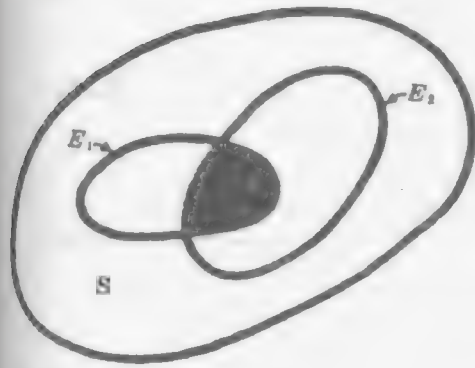
تقريب ستيرلنج لـ $n!$:

عندما تكون n كبيرة فإن حساب قيمة $n!$ مباشرة يكون غير عملي . وفي مثل هذه الحالة فإنه يمكن الاستفادة بصيغة ستيرلنج التقريبية :

$$(12) \quad n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

حيث $e = 2.71828 \dots$ الأساس الطبيعي للوغاريتمات . أنظر المسألة ٦-٣٦ .

العلاقة بين الاحتمال ونظرية الفئات :



في النظرية الحديثة للاحتتمالات ، نعبر عن كل النتائج الممكنة لتجربة أو مباراة كنقطة في مجال (والذي يمكن أن يكون ذو بعد واحد أو بعدين أو ثلاثة أبعاد . . . وهكذا) . ويسمى هذا المجال مجال العينة S (أو فراغ العينة) إذا كانت S تحتوي على عدد محدود من النقط فإنه من الممكن أن ننسب لكل نقطة رقم غير سالب يسمى بالاحتمال بحيث يكون مجموع كل هذه الأرقام المقابلة لجميع النقط في S هو الرقم واحد . الحدث هو فئة أو مجموعة من النقط في S كثال الحدث E_1 أو E_2 المشار إليهما في الرسم ٥-٢ ، ويسمى هذا الرسم بـ *Venn diagram* أو *Euler diagram* .

الحدث $E_1 + E_2$ هو مجموعة النقط التي إما تكون في E_1 أو E_2 أو كليهما بينما الحدث $E_1 E_2$ مجموعة النقط المشتركة في كل من E_1 و E_2 بهذا فإن احتمال حدث مثل E_1 هو مجموع الاحتمالات المرتبطة بجميع النقط الموجودة في E_1 . كذلك فإن احتمال $E_1 + E_2$ ويعبر عنها $\Pr\{E_1 + E_2\}$ وهو مجموع الاحتمالات المرتبطة بجميع النقط الموجودة داخل الفئة $E_1 + E_2$. إذا لم يكن هناك نقط مشتركة بين E_1 و E_2 ، بمعنى أن الأحداث متنافية ، فإن $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\}$ أما إذا كانت هناك نقط مشتركة بينهما فإن

$$\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1 E_2\}$$

الفئة $E_1 + E_2$ يرمز لها أحيانا بالرمز $E_1 \cup E_2$ وتسمى اتحاد فئتين .

الفئة $E_1 E_2$ ويرمز لها أحيانا بالرمز $E_1 \cap E_2$ وتسمى تقاطع فئتين

ومن الممكن تعميم ما سبق في حالة وجود أكثر من فئتين . فبدلاً من $E_1 + E_2 + E_3$ و $E_1 E_2 E_3$ فإنه يمكن استخدام الرموز $E_1 \cup E_2 \cup E_3$ و $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ على الترتيب .

ويستخدم الرمز الخاص ϕ على الفئة التي لا تحتوي على أي نقط ، وتسمى بالفئة الخالية والاحتمال المرتبط بالحدث المقابل لهذه الفئة هو صفر بمعنى $\Pr\{\phi\} = 0$.

إذا كان E_1 و E_2 لا يوجد بينهما نقط مشتركة ، فيمكن أن نكتب $E_1 E_2 = \phi$ والتي تعني أن هذه الأحداث متنافية وأن $\Pr\{E_1 E_2\} = 0$.

وفي هذا الاتجاه الحديث ، فإن المتغير العشوائي يعرف كدالة معرفة على كل نقطة في مجال العينة ، على سبيل المثال ، في المثال ٣٧ - ٦ ، المتغير العشوائي هو مجموع إحدائيات كل نقطة .

وفي الحالات التي تتكون S من عدد لا نهائي من النقط فإن الأفكار السابقة يمكن تعميمها باستخدام المفاهيم المعروفة في التفاضل والتكامل .

مسائل محلولة

القواعد الأساسية للاحتمالات :

١-٦ حدد الاحتمال p أو تقدير له ، لكل من الأحداث التالية :

(أ) ظهور رقم فردى فى رمية واحدة لزهرة طاولة غير متحيزة .

من حالات ممكنة كل منها له نفس الفرصة فى الظهور ، 3 حالات (عندما يظهر على وجه الزهرة 1, 3, 5)
فى صالح الحدث . إذن $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

(ب) ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل فى رمية عملة غير متحيزة مرتين .

إذا كانت H تعبر عن « الصورة » و T تعبر عن « الكتابة » ، فإن النتائج الممكنة فى الرمييتين هى أربعة حالات لها نفس الفرصة فى الظهور وهى HH, HT, TH, TT . والثلاث حالات الأولى فقط هى التى فى صالح الحدث . إذن $p = \frac{3}{4}$.

(ج) ظهور آس أو عشرة دينارى أو إثنتين بستونى عند سحب ورقة واحدة من 52 ورقة من مجموعة أوراق لعب (كوتشينية) عادية مخلوطة خلطاً جيداً .

الحدث يمكن أن يتحقق فى 6 حالات (آس بستونى ، آس قلب ، آس سبائى ، آس دينارى ، عشرة دينارى وإثنتين بستونى) من 52 حالة لها نفس الفرصة فى الظهور . إذن $p = \frac{6}{52} = \frac{3}{26}$.

(د) ظهور مجموع 7 فى رمية واحدة لظهرتين طاولة غير متحيزتين .

كل من الوجوه الستة لأحد الزهرتين يرتبط بظهوره بكل من الوجوه الستة للزهرة الأخرى ، وبهذا فإن مجموع الحالات الممكنة ظهورها والتى لها نفس الفرصة فى الظهور ، هى $6 \times 6 = 36$. وهذه يمكن التعبير عنها ، بـ
(1, 1), (2, 1), (3, 1), ..., (6, 6)

هناك 6 حالات نحصل فيها على المجموع 7 ، وهى (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) ، أنظر المسألة ٢٧-٦ (١) إذن $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

(هـ) فى 100 رمية لعملة إذا ظهرت الصورة فى 56 رمية فإن الكتابة تظهر فى المرات الأخرى .

بما أن $44 = (100 - 56)$ صورة تظهر فى 100 رمية للعملة ، فإن الاحتمال المقدر أو الاحتمال الاعتبارى لظهور الصورة هو التكرار النسبى $44/100 = 0.44$.

٢-٦ تجربة مكونة من قذف عملة وزهرة طاولة . إذا كان E_1 هو الحدث « الصورة » تظهر فى رمية العملة و E_2 الحدث « 3 أو 6 » يظهران عند رمى الزهرة ، عبر بالكلمات عن معنى كل ما يلى :

(أ) \bar{E}_1 ظهور كتابة على العملة وأى رقم على الزهرة .

(ب) \bar{E}_2 1 أو 2 أو 4 أو 5 على الزهرة وأى شئ على العملة .

- (ج) E_1, E_2 صورة على العملة و 3 أو 6 على الزهرة .
 (د) $\Pr\{E_1 \bar{E}_2\}$ احتمال ظهور صورة على العملة و 1, 2, 4, 5 على الزهرة .
 (هـ) $\Pr\{E_1 | E_2\}$ احتمال الصورة على العملة علماً بأن 3 أو 6 ظهرت فعلاً على الزهرة .
 (و) $\Pr\{\bar{E}_1 + \bar{E}_2\}$ احتمال الكتابة على العملة 1, 2, 4, 5 على الزهرة ، أو كليهما .

٦-٣ سحب كرة بشكل عشوائي من صندوق به 6 كرات حمراء ، 4 كرات بيضاء ، 5 كرات زرقاء . حدد احتمال أن تكون
 (أ) حمراء (ب) بيضاء (ت) زرقاء (ث) ليست حمراء (ج) حمراء أو بيضاء

الحل :

اعتبر R الحدث سحب كرة حمراء ، W الحدث سحب كرة بيضاء و كذلك B الحدث سحب كرة زرقاء . إذن

$$\Pr\{R\} = \frac{\text{عدد طرق اختيار كرة حمراء}}{\text{عدد الطرق الكلية لاختيار كرة}} = \frac{6}{6+4+5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \quad (أ)$$

$$\Pr\{W\} = \frac{4}{6+4+5} = \frac{4}{15} \quad (ب)$$

$$\Pr\{B\} = \frac{5}{6+4+5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad (ج)$$

$$\Pr\{\bar{R}\} = 1 - \Pr\{R\} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \quad (د) \text{ باستخدام (أ)}$$

$$\Pr\{R + W\} = \frac{\text{عدد طرق اختيار كرة حمراء أو بيضاء}}{\text{عدد الطرق الكلية لاختيار كرة}} = \frac{6+4}{6+4+5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \quad (هـ)$$

طريقة أخرى :

$$\Pr\{R + W\} = \Pr\{\bar{B}\} = 1 - \Pr\{B\} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad (و) \text{ من (ج)}$$

لاحظ أن : $\Pr\{R + W\} = \Pr\{R\} + \Pr\{W\}$ بمعنى $\frac{2}{3} = \frac{2}{5} + \frac{4}{15}$ وهذا مثال للقاعدة العامة $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\}$ وهذا صحيح في حالة ما إذا كانت E_1, E_2 أحداث متنافية .

٦-٤ قلقت زهرة غير متميزة مرتين . أوجد احتمال الحصول على 4 أو 5 أو 6 في المرة الأولى و 1 أو 2 أو 3 أو 4 في المرة الثانية .

الحل :

اعتبر E_1 الحدث « 4 أو 5 أو 6 » في الرمية الأولى ، E_2 = الحدث « 1 أو 2 أو 3 أو 4 » في الرمية الثانية .

وبما أن كل من الستة أوجه التي يمكن أن تقع عليها الزهرة في المرة الأولى ترتبط بكل من الستة أوجه التي يمكن أن تقع عليها الزهرة في المرة الثانية . فإن عدد الطرق الممكنة والتي لها نفس الفرصة في الظهور هي $6 \times 6 = 36$ طريقة كل من الطرق الثلاث التي يظهر E_1 ترتبط بكل من الطرق الأربع التي يمكن أن يظهر بها E_2 وهذا يعطي $4 \times 3 = 12$ طريقة يمكن أن تحدث بها E_1 و E_2 معاً أو $E_1 E_2$.

$$\text{إذن } \Pr \{E_1 E_2\} = 12/36 = 1/3$$

لاحظ أن $1/3 = 2/6 \cdot 4/6$ بمعنى $\Pr \{E_1 E_2\} = \Pr \{E_1\} \Pr \{E_2\}$ وهذه الصيغة صحيحة إذا كانت E_1 و E_2 أحداثاً مستقلة .

٦ - ٥ سحب كارتان من مجموعة أوراق لعب عادية مكونة من 52 كارتاً ومخلوطة خلطاً جيداً . أوجد احتمال أن يكون كلاهما آس إذا كان الكارت الأول (أ) أعيد إلى المجموعة (ب) لم يعد إلى المجموعة .

الحل :

اعتبر E_1 = الحدث « آس » في السحب الأول ، E_2 = الحدث « آس » في السحب الثانية .

(أ) إذا أعيد الكارت الأول إلى المجموعة فإن E_1 و E_2 أحداث مستقلة إذن

$$\Pr \{ \text{الكارتان المسحوبان آس} \} = \Pr \{E_1 E_2\} = \Pr \{E_1\} \Pr \{E_2\} = (4/52)(4/52) = 1/169$$

(ب) الكارت الأول يمكن أن يسحب به 52 طريقة ، الكارت الثاني يمكن أن يسحب به 51 طريقة حيث أن الكارت الأول لن يعاد . بهذا فإن عدد طرق سحب كارتين هو $52 \cdot 51$ طريقة كلها لها نفس الفرصة في الظهور .

بما أن هناك 4 طرق يمكن أن يحدث بها E_1 و 3 طرق يمكن أن يحدث بها E_2 وبهذا فإن كلا من E_1 و E_2 أو $E_1 E_2$ يمكن أن يحدثا به $4 \cdot 3$ طرق . إذن $\Pr \{E_1 E_2\} = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$

لاحظ أن $3/51 = \Pr \{ \text{الكارت الثاني آس علماً بأن الكارت الأول آس} \} = \Pr \{E_2|E_1\}$ وهذه النتيجة إيضاح للقاعدة العامة $\Pr \{E_1 E_2\} = \Pr \{E_1\} \Pr \{E_2|E_1\}$ في حالة ما إذا كانت E_1 و E_2 أحداثاً مستقلة .

٦ - ٦ سحب ثلاث كرات على التوالي من الصندوق المشار إليه (بالمسألة ٦ - ٢)

أوجد احتمال أن يكون سحبوا بالترتيب أحمر ، أبيض وأزرق إذا كانت كل كرة مسحوبة (أ) نعاد مرة أخرى إلى الصندوق (ب) لا تعاد .

الحل :

اعتبر R = الحدث « أحمر » في السحب الأول W = الحدث « أبيض » في السحب الثانية ، B =

الحدث « أزرق » في السحب الثالثة

والمطلوب $\Pr \{RWB\}$.

(أ) إذا أُعيدت كل كرة بعد سحبها فإن R, W, B تعد أحداثاً مستقلة وهذا فإن

$$\Pr\{RWB\} = \Pr\{R\} \Pr\{W\} \Pr\{B\} = \left(\frac{6}{6+4+5}\right) \left(\frac{4}{6+4+5}\right) \left(\frac{5}{6+4+5}\right) = \left(\frac{6}{15}\right) \left(\frac{4}{15}\right) \left(\frac{5}{15}\right) = \frac{8}{225}$$

(ب) إذا لم تعد الكرة بعد سحبها ، فإن B, W, R تعد أحداثاً تابعة وهذا فإن

$$\begin{aligned} \Pr\{RWB\} &= \Pr\{R\} \Pr\{W|R\} \Pr\{B|WR\} = \left(\frac{6}{6+4+5}\right) \left(\frac{4}{5+4+5}\right) \left(\frac{5}{5+3+5}\right) \\ &= \left(\frac{6}{15}\right) \left(\frac{4}{14}\right) \left(\frac{5}{13}\right) = \frac{4}{91} \end{aligned}$$

حيث $\Pr\{B|WR\}$ هو احتمال الشرطي للحصول على كرة زرقاء إذا كانت كرة بيضاء وكرة حمراء. قد اختياريهما بالفعل .

٦ - ٧ في رمية زهرة غير متميزة مرتين أوجد احتمال ظهور الرقم 4 مرة واحدة على الأقل .

الحل :

إذا كانت E_1 = الحدث « 4 » في الرمية الأولى ،

E_2 = الحدث « 4 » في الرمية الثانية .

$E_1 + E_2$ = الحدث « 4 » في الرمية الأولى أو « 4 » في الرمية الثانية أو في كليهما .

= الحدث ظهور « 4 » مرة واحدة على الأقل

المطلوب هو $\Pr\{E_1 + E_2\}$

الطريقة ١ :

حدد الطرق الممكنة والتي لها نفس الفرصة في الظهور والتي يمكن أن تقع بها الزهرتان $36 - 6.6 =$

كذلك ، عدد الطرق التي يحدث بها E_1 وليس $E_2 = 5$.

عدد الطرق التي يحدث بها E_2 وليس $E_1 = 5$.

عدد الطرق التي يحدث بها لكل من $E_1, E_2 = 1$.

بهذا فإن عدد الطرق التي يمكن أن يحدث بها على الأقل أحد الحدثين E_1 أو $E_2 = 11 = 5 + 5 + 1$

بحيث $\Pr\{E_1 + E_2\} = 11/36$

الطريقة 2 :

بما أن E_1 و E_2 ليست أحداثاً متنافية فإن $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1 E_2\}$

كذلك ، بما أن E_1 و E_2 أحداثاً مستقلة $\Pr\{E_1 E_2\} = \Pr\{E_1\} \Pr\{E_2\}$

إذن $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1\} \Pr\{E_2\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{11}{36}$

الطريقة 3 :

$$\begin{aligned} \text{إذن } \Pr \{ \text{ظهور الرقم « 4 » على الأقل مرة} \} + \Pr \{ \text{عدم ظهور الرقم « 4 »} \} &= 1 \\ \Pr \{ \text{ظهور الرقم « 4 » على الأقل مرة} \} &= 1 - \Pr \{ \text{عدم ظهور الرقم « 4 »} \} \\ &= 1 - \Pr \{ \text{عدم ظهور « 4 » في الرمية الأولى وعدم ظهور « 4 » في الرمية الثانية} \} \\ &= 1 - \Pr \{ \bar{E}_1 \bar{E}_2 \} = 1 - \Pr \{ \bar{E}_1 \} \Pr \{ \bar{E}_2 \} \\ &= 1 - \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{3}{4} \right) = \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

٦ - ٨ كيس يحتوي على « 4 » كرات بيضاء ، « 2 » كرة سوداء ، وكيس آخر يحتوي على 3 كرات بيضاء ، 5 كرات سوداء . إذا سحبت كرة من كل كيس ، أوجد احتمال :

- (أ) كلا الكرتين لونهما أبيض .
- (ب) كلا الكرتين لونهما أسود .
- (ج) كرة بيضاء و كرة سوداء .

الحل :

إذا كانت W_1 = الحدث « كرة بيضاء » من الكيس الأول .

W_2 = الحدث « كرة بيضاء » من الكيس الثاني .

$$\Pr \{ W_1 W_2 \} = \Pr \{ W_1 \} \Pr \{ W_2 \} = \left(\frac{4}{4+2} \right) \left(\frac{3}{3+5} \right) = \frac{1}{4} \quad (أ)$$

$$\Pr \{ \bar{W}_1 \bar{W}_2 \} = \Pr \{ \bar{W}_1 \} \Pr \{ \bar{W}_2 \} = \left(\frac{2}{4+2} \right) \left(\frac{5}{3+5} \right) = \frac{1}{4} \quad (ب)$$

(ج) الحدث « كرة بيضاء و كرة سوداء » مثل الحدث « أما الكرة الأولى بيضاء والثانية سوداء أو الكرة الأولى سوداء والثانية بيضاء » بمعنى ، $W_1 \bar{W}_2 + \bar{W}_1 W_2$. بما أن الأحداث $\bar{W}_1 W_2$ ، $W_1 \bar{W}_2$ أحداث متنافية ، فإن

$$\begin{aligned} \Pr \{ W_1 \bar{W}_2 + \bar{W}_1 W_2 \} &= \Pr \{ W_1 \bar{W}_2 \} + \Pr \{ \bar{W}_1 W_2 \} \\ &= \Pr \{ W_1 \} \Pr \{ \bar{W}_2 \} + \Pr \{ \bar{W}_1 \} \Pr \{ W_2 \} = \left(\frac{4}{4+2} \right) \left(\frac{5}{3+5} \right) + \left(\frac{2}{4+2} \right) \left(\frac{3}{3+5} \right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

طريقة أخرى :

$$1 - \Pr \{ W_1 W_2 \} - \Pr \{ \bar{W}_1 \bar{W}_2 \} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{الاحتمال المطلوب هو}$$

٦ - ٩ لعب A و B ، 12 دوراً في مباراة الشطرنج كسب A ، 6 منها و B ، 4 وتعادلا في مرتين . وقد اتفقا على اللعب 3 أدواراً أخرى .

أوجد احتمال (أ) A يكسب المباريات الثلاث . (ب) انتهاء مباريتين بالتعادل (ج) A و B يكسبان بالتبادل (د) B يكسب مباراة على الأقل .

الحل :

اعتبر أن A_1, A_2, A_3 تمثل الأحداث « A يكسب » في المباراة الأولى A_1 ، في المباراة الثانية A_2 ، في المباراة الثالثة A_3 .

B_1, B_2, B_3 تمثل الأحداث « B يكسب » في المباراة الأولى B_1 ، في المباراة الثانية B_2 ، في المباراة الثالثة B_3 .

T_1, T_2, T_3 تمثل الأحداث « التعادل » في المباراة الأولى T_1 ، في المباراة الثانية T_2 ، في المباراة الثالثة T_3 .

على ضوء الخبرة السابقة (احتمال اعتباري) فنفرض أن

$$\Pr \{ A \text{ يكسب مباراة} \} = 6/12 = 1/2$$

$$\Pr \{ B \text{ يكسب مباراة} \} = 4/12 = 1/3$$

$$\Pr \{ \text{انتهاء أى مباراة بالتعادل} \} = 2/12 = 1/6$$

$$\Pr \{ A \text{ يكسب جميع المباريات} \} = \Pr \{ A_1 A_2 A_3 \} = \Pr \{ A_1 \} \Pr \{ A_2 \} \Pr \{ A_3 \} = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8} \quad (أ)$$

وذلك بافتراض أن نتيجة كل مباراة مستقلة عن نتيجة المباريات السابقة ، وهذا الفرض يبدو منطقياً (إلا لو اعتبرنا أن اللاعبين يتأثرون نفسياً بفوز أو خسارة اللاعب الآخر في المباريات السابقة) .

$$(ب) \quad \Pr \{ \text{انتهاء مبارتين بالتعادل} \} =$$

$$= \Pr \{ \text{انتهاء المبارتين الأولى والثانية أو الأولى والثالثة أو الثانية والثالثة بالتعادل} \}$$

$$\begin{aligned} & \Pr \{ T_1 T_2 T_3 \} + \Pr \{ T_1 T_2 \bar{T}_3 \} + \Pr \{ \bar{T}_1 T_2 T_3 \} \\ & \Pr \{ T_1 \} \Pr \{ T_2 \} \Pr \{ T_3 \} + \Pr \{ T_1 \} \Pr \{ T_2 \} \Pr \{ \bar{T}_3 \} + \Pr \{ \bar{T}_1 \} \Pr \{ T_2 \} \Pr \{ T_3 \} \\ & \left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{5}{6} \right) + \left(\frac{5}{6} \right) \left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{1}{6} \right) = 15/216 = 5/72. \end{aligned}$$

$$(ج) \quad \Pr \{ A \text{ و } B \text{ يكسبان بالتبادل} \} =$$

$$= \Pr \{ A \text{ يكسب ثم } B \text{ يكسب ثم } A \text{ يكسب ثم } B \text{ يكسب ثم } A \text{ يكسب ثم } B \text{ يكسب} \}$$

$$\begin{aligned} & \Pr \{ A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3 \} + \Pr \{ A_1 B_1 A_2 B_2 B_3 A_3 \} + \Pr \{ A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 A_3 \} \\ & \Pr \{ A_1 \} \Pr \{ B_1 \} \Pr \{ A_2 \} \Pr \{ B_2 \} \Pr \{ A_3 \} \Pr \{ B_3 \} + \Pr \{ A_1 \} \Pr \{ B_1 \} \Pr \{ A_2 \} \Pr \{ B_2 \} \Pr \{ B_3 \} \Pr \{ A_3 \} \\ & = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{2}{3} \right) = 5/36. \end{aligned}$$

$$(د) \quad \Pr \{ B \text{ يخسر جميع المباريات} \} = 1 - \Pr \{ B \text{ يكسب مباراة على الأقل} \}$$

$$\begin{aligned} & = 1 - \Pr \{ \bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 \} = 1 - \Pr \{ \bar{B}_1 \} \Pr \{ \bar{B}_2 \} \Pr \{ \bar{B}_3 \} \\ & = 1 - \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{2}{3} \right) = 19/27 \end{aligned}$$

التوزيعات الاحتمالية :

١٥-٦ أوجد احتمال وجود أولاد وبنات في عائلات مكونة من 3 أطفال . مفترساً تساوى احتمال الأولاد والبنات .

الحل :

اعتبر أن B الحدث « وجود ولد في العائلة » . .

G = الحدث « وجود بنت في العائلة » .

وطبقاً لفرض الخاص بتساوى الاحتمالات فإن $\Pr\{B\} = \Pr\{G\} = 1/2$.

في عائلات مكونة من 3 أطفال فإن الأحداث المتنافية يمكن أن تقع حسب الاحتمالات الموضحة :

(أ) ثلاثة أولاد (BBB) . إذن $\Pr\{BBB\} = \Pr\{B\}\Pr\{B\}\Pr\{B\} = 1/8$

وقد افترضنا هنا أن ولادة ولد لن تتأثر بكون الطفل السابق ولد ، أى افترضنا أن الأحداث مستقلة .

(ب) ثلاث بنات (GGG) . إذن كما في (أ) أو بالتماثل $\Pr\{GGG\} = 1/8$

(ج) ولدان وبنت (BBG + BGB + GBB) . إذن

$$\begin{aligned} \Pr\{BBG + BGB + GBB\} &= \Pr\{BBG\} + \Pr\{BGB\} + \Pr\{GBB\} \\ &= \Pr\{B\}\Pr\{B\}\Pr\{G\} + \Pr\{B\}\Pr\{G\}\Pr\{B\} + \Pr\{G\}\Pr\{B\}\Pr\{B\} \\ &= 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8 \end{aligned}$$

(د) بنتان وولد (GGB + GBG + BGG) . كما في (ج) أو بالتماثل ، الاحتمال يساوى $3/8$.

إذا أخذنا X كتغير عشوائى يعبر عن عدد الأولاد في العائلات المكونة من ثلاثة أطفال ، يعبر عن التوزيع

الاحتمالى كما هو موضح بالجدول

Number of boys X	0	1	2	3
Probability $p(X)$	1/8	3/8	3/8	1/8

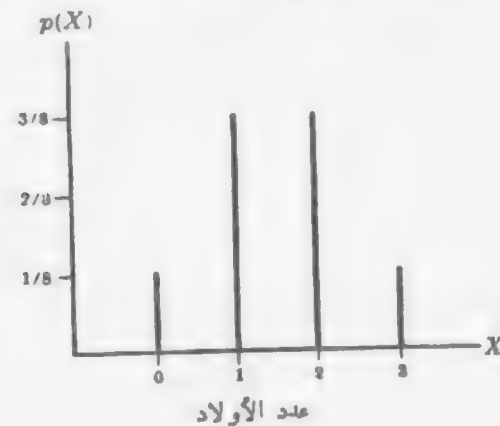
١١-٦ مثل بيانياً توزيع المسألة ٦-١٠ .

الحل :

الرسم البياني يمكن أن يمثل أما بالشكل ٦-٣ أو بالشكل ٦-٤



شكل ٦-٤



شكل ٦-٣

لاحظ أن مجموع مساحات المستطيلات في الشكل ٦-٤ أعلاه هو واحد . في الشكل السابق ، ويسمى بالمضلع الاحتمالى ، نعتبر المتغير X كتغير متصل على الرغم من أن المتغير أصلاً متغير متقطع وهذه الطريقة تعد مفيدة أحياناً . الشكل ٦-٣ ، في الناحية الأخرى ، يستعمل عندما لا نريد اعتبار المتغير كتغير متصل .

٦-١٢ المتغير المتصل X بأخذ قيمياً بين الصفر و 4 ودالة كثافة احتماله هي $p(X) = \frac{1}{2} - aX$ ، حيث a مقدار ثابت .

(أ) احسب قيمة a .

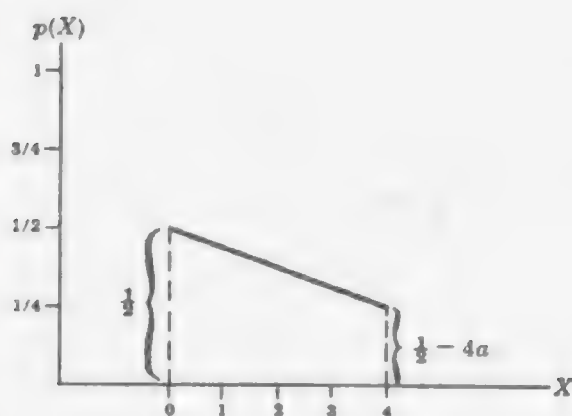
(ب) أوجد $\Pr\{1 < X < 2\}$.

الحل :

(أ) الرسم البياني لـ $p(X) = \frac{1}{2} - aX$

هو خط مستقيم كما هو موضح بالشكل

٦-٥ .



الشكل ٦-٥

للحصول على قيمة a ، فإننا يجب أن

نتأكد من أن المساحة الكلية المحصورة

بين الخط $X = 0$ ، $X = 4$ وأعلى

المحور X يجب أن تساوى واحداً .

عند $X = 0$ فإن $p(X) = \frac{1}{2}$

عند $X = 4$ فإن $p(X) = \frac{1}{2} - 4a$

إذن يجب اختيار a بحيث تكون

مساحة الشكل الرباعي = 1 .

مساحة الشكل الرباعي =

$\frac{1}{2}$ (الارتفاع) (مجموع القواعد) .

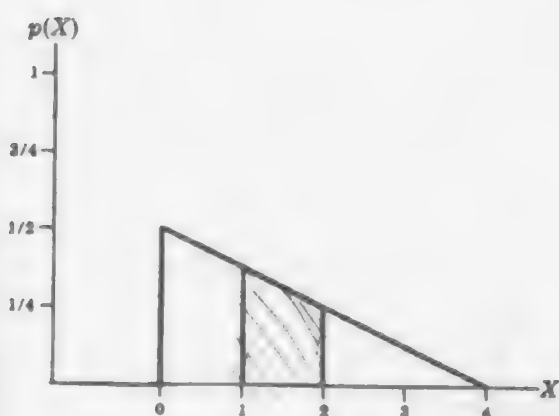
$$\frac{1}{2} (4) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 4a \right) =$$

$$1 = 2(1 - 4a) =$$

$$(1 - 4a) = \frac{1}{2}, 4a = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{8}$$

وبما أن $(\frac{1}{2} - 4a)$ تساوى الصفر

بهذا فإن الشكل البياني الصحيح هو المعطى بالشكل ٦-٦ .



الشكل ٦-٦

(ب) الاحتمال المطلوب معبر عنه بالمساحة المظلة بين $X = 1$ ، $X = 2$ في الشكل ٦-٦ .

من (أ) $p(X) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}X$ ، إذن $p(1) = \frac{3}{8}$ و $p(2) = \frac{1}{4}$ هي الاحداثيات عند $X = 1$

$X = 2$ على الترتيب .

$$\frac{1}{2}(1) \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{16}$$

مساحة الشكل الرباعي المطلوب هي

وهو الاحتمال المطلوب .

التوقع الرياضي :

١٣-٦ اشترى شخص ورقة يانصيب واحتمال أن يكسب الجائزة الأولى وقدرها £5000 أو الثانية وقدرها £2000 هو 0.001 للأولى و 0.003 للثانية ماهو السعر العادل الذي يمكن دفعه في هذه الورقة .

الحل :

$$\text{التوقع} = (£5000)(0.001) + (£2000)(0.003) = £5 + £6 = £11$$

وهو السعر العادل الذي يجب دفعه .

١٤-٦ في تجارة معينة تتضمن مخاطرة يمكن أن يكسب شخص £300 باحتمال 0.6 أو يتكبد خسارة £100 باحتمال 0.4 حدد القيمة المتوقعة بالنسبة له .

الحل :

$$\text{التوقع} = (£300)(0.6) - (£100)(0.4) = £180 - £40 = £140$$

١٥-٦ أوجد (أ) $E(X)$ (ب) $E(X^2)$ (ج) $E[(X - \bar{X})^2]$ للتوزيع الاحتمال التالي :

X	8	12	16	20	24
$p(X)$	1/8	1/6	3/8	1/4	1/12

الحل :

$$E(X) = \sum Xp(X) = (8)(1/8) + (12)(1/6) + (16)(3/8) + (20)(1/4) + (24)(1/12) = 16 \quad (أ)$$

وهذا يمثل متوسط هذا التوزيع

$$E(X^2) = \sum X^2p(X) = (8)^2(1/8) + (12)^2(1/6) + (16)^2(3/8) + (20)^2(1/4) + (24)^2(1/12) = 276 \quad (ب)$$

وهذا يمثل العزم الثاني حول نقطة الأصل صفر .

$$\begin{aligned} E[(X - \bar{X})^2] &= \sum (X - \bar{X})^2p(X) \\ &= (8 - 16)^2(1/8) + (12 - 16)^2(1/6) + (16 - 16)^2(3/8) + (20 - 16)^2(1/4) + (24 - 16)^2(1/12) = 20 \end{aligned}$$

وهذا يمثل تباين هذا التوزيع .

١٦-٦ كيس يحتوي على 2 كرة بيضاء و 3 كرات سوداء . أربعة أشخاص A, B, C, D وحسب ترتيب أسمائهم قام كل منهم بسحب كرة والكرة المسحوبة لامتداد ثانية الأول الذي يسحب كرة بيضاء يحصل على £ 20 . حدد توقع كل منهم .

الحل :

بما أن هناك 3 كرات سواد فقط ، فإن شخصاً منهم سيكسب في أول محاولة له . استخدم A, B, C, D للدلالة على الأحداث « A يكسب » ، « B يكسب » ، « C يكسب » ، « D يكسب » على الترتيب .
 $\Pr\{A \text{ wins}\} = \Pr\{A\} = \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$. بهذا فإن توقع A £4 (£10) .

$\Pr\{A \text{ يخسر و } B \text{ يكسب}\} = \Pr\{AB\} = \Pr\{\bar{A}\} \Pr\{B|\bar{A}\} = (\frac{7}{10})(\frac{3}{7}) = \frac{3}{10}$.
 وهذا فإن توقع B £3 =

$\Pr\{A \text{ يخسر و } B \text{ يخسر و } C \text{ يكسب}\} = \Pr\{ABC\} = \Pr\{\bar{A}\} \Pr\{\bar{B}|\bar{A}\} \Pr\{C|\bar{A}\bar{B}\} = (\frac{7}{10})(\frac{6}{7})(\frac{3}{6}) = \frac{1}{2}$.
 وهذا فإن توقع C £2 =

$\Pr\{\bar{A}\bar{B}\bar{C}D\} = \Pr\{\bar{A}\} \Pr\{\bar{B}|\bar{A}\} \Pr\{\bar{C}|\bar{A}\bar{B}\} \Pr\{D|\bar{A}\bar{B}\bar{C}\} = (\frac{7}{10})(\frac{6}{7})(\frac{5}{6})(\frac{1}{5}) = \frac{1}{10}$.
 $\Pr\{A \text{ يخسر و } B \text{ يخسر و } C \text{ يخسر و } D \text{ يكسب}\} =$

وهذا فإن توقع D £1 = .

مراجعة : $\frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 1$ and $\frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \text{£}10$.

التباديل :

٦ - ١٧ بكم طريقة يمكن ترتيب 5 من البيل المختلفة الألوان في صف ؟

الحل :

يجب أن ترتيب البليات الخمس في خمس أماكن أي :

المكان الأول يمكن شغله بأى من البليات الخمس ، بمعنى ، هناك خمس طرق لشغل المكان الأول ، فإذا فعلنا ذلك فإن هناك 4 طرق لشغل المكان الثاني . ثم بعد ذلك هناك 3 طرق لشغل المكان الثالث ، طريقتان لشغل المكان الرابع وأخيراً طريقة واحدة لشغل المكان الأخير . وبهذا

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120 = \text{عدد طرق ترتيب 5 بليات في صف}$$

وبشكل عام

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n =$ عدد طرق ترتيب n من الأشياء المختلفة في صف وهذه نسي أيضاً عدد طرق ترتيب n من الأشياء المختلفة مأخوذة n في كل مرة ويرمز لها بالرمز nP_n .

٦ - ١٨ كم عدد طرق إجلاس 10 أشخاص على مقعد به 4 أماكن فقط ؟

الحل :

المكان الأول يمكن شغله بأى من 10 طرق وإذا تم ذلك فإن هناك 9 طرق لشغل المكان الثاني ، 8 طرق لشغل المكان الثالث ، 7 طرق لشغل المكان الرابع .

وهذا $5040 = 10.9.8.7 =$ عدد طرق ترتيب 10 أشخاص مأخوذة بين 4 في المرة

وبشكل عام

$n(n-1) \dots (n-r+1) =$ عدد طرق ترتيب n من الأشياء المختلفة مأخوذة r في المرة وهذا يسمى أيضاً

عدد تبديل n من الأشياء المختلفة مأخوذة r في كل مرة ويرمز لها بالرمز $P_{n,r}$ و $P(n,r)$ و ${}_nP_r$.

لاحظ أنه عندما $r = n$ فإن ${}_nP_n = n!$ كما في المسألة ٦ - ١٧.

١٩ - ٦ احسب (أ) ${}_8P_3$ (ب) ${}_6P_4$ (ت) ${}_{15}P_1$ (ث) ${}_3P_3$

الحل :

(أ) ${}_8P_3 = 8.7.6 = 336$ (ب) ${}_6P_4 = 6.5.4.3 = 360$ (ج) ${}_{15}P_1 = 15$ (د) ${}_3P_3 = 3.2.1 = 6$

٢٠ - ٦ من المطلوب إجلال 5 رجال و 4 نساء في صف بحيث يشغل النساء الأماكن ذات الأرقام الزوجية . ماهو عدد الترتيب الممكنة ؟

الحل :

عدد طرق إجلال الرجال هو ${}_5P_5$ والنساء ${}_4P_4$. كل ترتيب للرجال يمكن أن يرتبط بكل ترتيب للنساء .

هذا فإن عدد الترتيب الممكنة $= {}_5P_5 \cdot {}_4P_4 = 5!4! = (120)(24) = 2880$

٢١ - ٦ كم من الأعداد المكونة من 4 أرقام يمكن تكوينها من 10 أرقام 0, 1, 2, 3, ..., 9 إذا كانت :

(أ) يسمح بتكرار الرقم

(ب) غير مسموح بتكرار الرقم

(ج) الرقم الأخير يجب أن يكون صفراً وغير مسموح بتكرار الأرقام .

الحل :

(أ) الرقم الأول يمكن أن يكون أى رقم من 9 أرقام (حيث أن الصفر غير مسموح به) الرقم الثاني ، الرقم الثالث والرابع يمكن أن يكون أى رقم من الأرقام العشرة . إذن $9.10.10.10 = 9000$ رقم يمكن تكوينهم .

(ب) الرقم الأول يمكن أن يكون أى رقم من 9 أرقام (حيث أن الصفر غير مسموح به)

الرقم الثاني يمكن أن يكون أى رقم من 9 أرقام (أى رقم ماعداً الذى ظهر في الخانة الأولى)

الرقم الثالث يمكن أن يكون أى رقم من 8 أرقام (أى رقم ماعداً الذى ظهر في الخانتين الأولى والثانية) .

الرقم الرابع يمكن أن يكون أى رقم من 7 أرقام (أى رقم ماعداً الذى ظهر في الخانات الثلاث الأولى)

إذن $4536 = 9.8.7.6$ عدد يمكن تكوينه .

طريقة أخرى :

الرقم الأول يمكن أن يكون أى رقم من 9 الخانات الثلاث الأخرى يمكن اختيارها بـ ${}_9P_3$ طريقة .
إذن ${}_9P_3 = 9.9.8.7 = 4536$ عدد يمكن تكوينه .

(ج) الرقم الأول يمكن اختياره بـ 9 طرق ، الثاني بـ 8 طرق والثالث بـ ${}_8P_3$ طرق .
إذن $9.8.7 = 504$ عدد يمكن تكوينه .

طريقة أخرى :

الرقم الأول يمكن اختياره بـ 9 طرق والرقان التاليان يمكن اختيارهما بـ ${}_8P_2$ طرق .
إذن $9.8.7 = 504$ عدد يمكن تكوينه .

٦ - ٢٢ أربعة كتب مختلفة في الرياضة ، ستة كتب مختلفة في الطبيعة وكتابان مختلفان في الكيمياء مطلوب ترتيبهما على رف .
ماهى عدد الترتيب المختلفة والممكنة إذا .

(أ) توضع الكتب المتعلقة بنفس الموضوع متجاورة .

(ب) كتب الرياضة فقط هى التى يجب أن توضع متجاورة .

الحل :

(أ) عدد طرق ترتيب كتب الرياضة فيما بينها هى $4! = {}_4P_4$ طريقة ، وعدد طرق ترتيب كتب الطبيعة هو $6! = {}_6P_6$ طريقة وكتب الكيمياء $2! = {}_2P_2$ طريقة وعدد طرق ترتيب المجموعات الثلاث هو $3! = {}_3P_3$

هذا فإن عدد الترتيب الممكنة هو $4! 6! 2! 3! = 207 360$

(ب) يمكن اعتبار كتب الرياضة الأربعة ككتاب واحد كبير . هذا يكون لدينا 9 كتب والتى يمكن ترتيبها بـ $9! = {}_9P_9$ طريقة . فى كل من هذه الطرق توضع كتب الرياضة معاً . ويكون عدد طرق ترتيب كتب الرياضة فيما بينها هو $4! = {}_4P_4$ طريقة ، إذن .

عدد الترتيب المطلوبة $9! 4! = 8709 120$

٦ - ٢٢ رتب فى صف خمساً من البلى الأحمر واثنين من البلى الأبيض وثلاثاً من البلى الأزرق . إذا كان البلى من نفس اللون لايمكن تميزه من بعض ، فاهو عدد الترتيب المختلفة الممكنة :

الحل :

نفترض أن هناك P من الترتيب المختلفة . بضرب P فى عدد طرق ترتيب

(أ) البلى الخمس الأحمر فيما بينها .

(ب) إثنان من البلى الأبيض فيما بينها .

(ج) الثلاثة من البلى الأزرق فيما بينها .

(بمعنى ضرب P في $3! 2! 5!$) ، ثم نحصل على عدد طرق ترتيب 10 من البيل إذا كانت كل بلية متميزة عن الأخرى وهي 10! .

$$\text{إذن } (3! 2! 5!) P = 10! \text{ و } P = 10! / (3! 2! 5!)$$

وبشكل عام ، عدد طرق الترتيب المختلفة لـ n من الأشياء مقسمة إلى n_1 من الأشياء المتشابهة n_2 من الأشياء المتشابهة n_3, \dots, n_k من الأشياء المتشابهة هي $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ حيث $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

٦ - ٢٤ بكم طريقة يمكن أن يجلس 7 من الأشخاص حول مائدة دائرية إذا :

(أ) يمكن أن يجلسوا في أى مكان . (ب) شخصان معينان يجب أن لا يجلسوا متجاورين .

الحل :

(أ) اعتبر أن واحداً منهم يمكن أن يجلس في أى مكان . وبهذا فإن الـ 6 أشخاص الباقين يمكن أن يجلسوا بـ $6! = 720$ طريقة ، وهو عدد طرق ترتيب 7 أشخاص في دائرة .

(ب) اعتبر أن الشخصين المعينين كشخص واحد . وبهذا سيكون هناك 6 أشخاص يمكن ترتيبهم بـ $5!$ ولكن الشخصين اللذين اعتبرناهما كشخص واحد يمكن ترتيبهما فيما بينهم بـ $2!$ طريقة . وبهذا فإن عدد طرق ترتيب 6 أشخاص حول مائدة مستديرة بحيث يجلس شخصان معينان معاً $= 2! 5! = 240$ باستخدام (أ) ، عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها 6 أشخاص حول مائدة مستديرة بحيث أن شخصين معينين لا يجلسان بجوار بعضهما هو $480 = 720 - 240 =$ طريقة .

التباديل :

٦ - ٢٥ ما هي عدد الطرق التي يمكن أن يقسم بها 10 أشياء إلى مجموعتين مكونتين من 4 و 6 أشياء على الترتيب ؟

الحل :

هذه مثل عدد تراتيب 10 من الأشياء حيث 4 أشياء متشابهة فيما بينهما و 6 أشياء أخرى متشابهة فيما بينها .

$$\text{من المسألة ٦ - ٢٣ النتيجة هي } \frac{10!}{4! 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210$$

هذه المشكلة مكافئة لمشكلة الحصول على عدد اختيارات 4 من 10 من الأشياء (أو 6 من 10 من الأشياء) وذلك بدون أهمية لترتيب الاختيار .

وبشكل عام عدد اختيارات r من n من الأشياء ، ويسمى عدد تباديل n من الأشياء مأخوذة r في المرة يرمز لها بالرمز $\binom{n}{r}$ ، $C(n, r)$ ، ${}_nC_r$ ويعطى بالصيغة .

$${}_nC_r = \frac{n!}{r! (n-r)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{r!} = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

٦ - ٢٦ احسب (أ) 7C_4 (ب) 6C_3 (ج) 4C_4

الحل :

$${}^7C_4 = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \quad (أ)$$

$${}^6C_3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5!} = 6, \text{ or } {}^6C_3 = {}^6C_1 = 6 \quad (ب)$$

(ج) 4C_4 هو عدد اختيارات 4 أشياء مأخوذة كلها مرة واحدة .

$$\text{إذن } {}^4C_4 = 1$$

$$\text{لاحظ أن } {}^4C_4 = \frac{4!}{4!0!} = 1 \text{ إذا عرفنا } 0! = 1$$

٦ - ٢٧ كم طرق اختيار لجنة مكونة من 5 من 9 أشخاص ؟

الحل :

$${}^9C_5 = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5!} = 126$$

٦ - ٢٨ من بين 5 من علماء الرياضة و 7 من علماء الطبيعة ، المطلوب تشكيل لجنة تكون من 2 من علماء الرياضة و 3 من علماء الطبيعة . بكم طريقة يمكن أن يتم ذلك إذا ،

(أ) أى عالم رياضى أو عالم طبيعى يمكن دخوله اللجنة .

(ب) عالم طبيعة معين يجب أن يكون ضمن اللجنة .

(ج) إثنان معينان من علماء الرياضة يجب ألا يكونا ضمن اللجنة .

الحل :

(أ) عدد طرق اختيار 2 من بين 5 من علماء الرياضة هي 5C_2 وطريقة ، عدد طرق اختيار 3 من بين 7 من علماء الطبيعة هي 7C_3 وطريقة .

$$\text{عدد طرق الاختيار الممكنة} = {}^5C_2 \cdot {}^7C_3 = 10 \cdot 35 = 250$$

(ب) عدد طرق اختيار 2 من بين 5 من علماء الرياضة هي 5C_2 وطريقة عدد طرق اختيار عالمين إضافيين من علماء الطبيعة من بين 6 علماء هي 6C_2 وطريقة .

$$\text{عدد طرق الاختيار الممكنة} = {}^5C_2 \cdot {}^6C_2 = 10 \cdot 15 = 150$$

(ج) عدد طرق اختيار 2 من بين 3 من علماء الرياضة هي 3C_2 وطريقة ، عدد طرق اختيار 3 من بين 7 من علماء الطبيعة هي 7C_3 وطريقة .

$$\text{عدد طرق الاختيار الممكنة} = {}^3C_2 \cdot {}^7C_3 = 3 \cdot 35 = 105$$

٦ - ٢٩ طفل معه خمس عملات كل عملة لها قيمة مختلفة . ماهو عدد مجموع النقود المختلفة التي يمكن له تكوينها .

الحل :

بما أن كل عملة يمكن التعامل معها بطريقتين ، أما أن تختار أو لا تختار . وبما أن كلا من الطريقتين التي يتم بهما التعامل مع العملة ترتبط بطريقتين للتعامل مع كل عملة من العملات الأخرى . فإن عدد طرق التعامل مع العملات الخمس هي 2^5 طريقة . ولكن الـ 2^5 طريقة تتضمن الحالة التي لا تأخذ فيها أى عملة . وبهذا يكون الرقم المطلوب لجميع النقود $2^5 - 1 = 31$.

طريقة أخرى :

من الممكن اختيار 1 من 5 من العملات ، 2 من 5 عملات ، ... ، 5 من 5 عملات . وبهذا فإن عدد مجاميع النقود المطلوب هو

$${}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$$

وبشكل عام ، ولأى قيمة صحيحة موجبة n و ${}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \dots + {}_nC_n = 2^n - 1$

٦ - ٣٠ من 7 حروف ساكنة و 5 حروف متحركة ، ماهو عدد الكلمات المكونة من 4 حروف ساكنة مختلفة و 3 حروف متحركة مختلفة ؟ ليس من الضروري أن تكون الجملة لها معنى .

الحل :

عدد طرق اختيار 4 حروف ساكنة مختلفة هي ${}_7C_4$ ، عدد طرق اختيار 3 حروف متحركة مختلفة هي ${}_3C_3$. طريقة . والـ 7 حروف المختلفة (4 ساكنة 3 متحركة) يمكن ترتيبها بين أنفسهم بعدد طرق ${}_7P_7 = 7!$

$$\text{إذن} \quad {}_7C_4 \cdot {}_3C_3 \cdot 7! = 35 \cdot 10 \cdot 5040 = 1764000 = \text{عدد الكلمات} .$$

تقريب ستيرلينج لـ $n!$:

٦ - ٣١ احسب $50!$.

الحل :

لقيم n الكبيرة

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} .$$

$$50! \sim \sqrt{2\pi(50)} 50^{50} e^{-50} = S .$$

ولحساب قيمة S تستخدم اللوغاريتمات للأساس 10 . إذن

$$\begin{aligned} \log S &= \log(\sqrt{100\pi} 50^{50} e^{-50}) = \frac{1}{2} \log 100 + \frac{1}{2} \log \pi + 50 \log 50 - 50 \log e \\ &= \frac{1}{2} \log 100 + \frac{1}{2} \log 3.142 + 50 \log 50 - 50 \log 2.718 \\ &= \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(0.4972) + 50(1.6990) - 50(0.4343) = 64.4836 \end{aligned}$$

وبها $S = 3.04 \times 10^{64}$ ، وهو عدد له 65 رقم .

الاحتمال والتحليل التوافقي :

٦-٣٢ صندوق يحتوي على 8 كرات حمراء ، 3 بيضاء و 9 كرات زرقاء . إذا سحبنا 3 كرات عشوائياً ، أوجد احتمالات . (أ) الكرات الثلاث الحمراء . (ب) 2 حمراء و كرة بيضاء . (ج) على الأقل كرة بيضاء . (د) كرة من كل لون تم سحبها . (هـ) الكرات سحب بالترتيب حمراء ، بيضاء ، زرقاء .

الحل :

(أ) الطريقة الأولى :

اعتبر R_1, R_2, R_3 تعبر عن الأحداث R_1 كرة حمراء في السحبة الأولى ، R_2 كرة حمراء في السحبة الثانية ، R_3 كرة حمراء في السحبة الثالثة .

إذن R_1, R_2, R_3 تعبر عن الحدث « كل الكرات المسحوبة حمراء » .

$$\Pr\{R_1 R_2 R_3\} = \Pr\{R_1\} \Pr\{R_2 | R_1\} \Pr\{R_3 | R_1 R_2\} = (8/20)(7/19)(6/18) = 14/285$$

الطريقة الثانية :

$$\frac{{}^8C_3}{{}^{20}C_3} = \frac{14}{285} = \frac{\text{عدد طرق اختيار 3 من 8 الكرات الحمراء}}{\text{عدد طرق اختيار 3 من 20 من الكرات}} = \text{الاحتمال المطلوب}$$

$$\Pr\{(\text{الكرات الثلاث البيضاء})\} = \frac{{}^3C_3}{{}^{20}C_3} = \frac{1}{1140} \quad , \quad (ب) \text{ باستخدام الطريقة الموضحة في (أ) ،}$$

الطريقة الأولى المشار إليها في (أ) يمكن أيضاً استخدامها .

$$\Pr\{ \text{كرتان حمراء و كرة بيضاء} \} = \quad (ج)$$

$$= \frac{(\text{اختيار 2 من 8 من الكرات الحمراء}) (\text{اختبار كرة من 3 كرات بيضاء})}{\text{عدد اختيار 3 كرات من 20 كرة}}$$

$$\frac{{}^8C_2 \cdot {}^3C_1}{{}^{20}C_3} = \frac{7}{95}$$

$$\Pr\{ \text{عدم وجود كرات بيضاء} \} = \frac{{}^{17}C_3}{{}^{20}C_3} = \frac{34}{57} \quad (د)$$

$$\Pr\{ \text{وجود كرة بيضاء على الأقل} \} = 1 - \frac{34}{57} = \frac{23}{57} \quad \text{إذن}$$

$$\Pr\{ \text{سحب كرة من كل لون} \} = \frac{{}^8C_1 \cdot {}^3C_1 \cdot {}^9C_1}{{}^{20}C_3} = \frac{18}{95} \quad (هـ)$$

$$\Pr\{ \text{سحب كرة من كل لون} \} = 1/3! \Pr\{ \text{الكرات المسحوبة بالترتيب أحمر ، أبيض ، أزرق} \}$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{18}{95} \right) = \frac{3}{95}$$

باستخدام (و) .

$$\Pr\{R_1 W_2 B_3\} = \Pr\{R_1\} \Pr\{W_2 | R_1\} \Pr\{B_3 | R_1 W_2\} = (8/20)(3/19)(9/18) = 3/95 \quad \text{طريقة أخرى :}$$

٦-٣٣ بحيث خمسة كروت من مجموعة أوراق لعب مكونة من 52 كارت موزجة مزجاً جيداً . أوجد احتمال الحصول على
(أ) 4 آس (ب) 4 آس وكارت ملك (ج) 3 عليها العدد 10 و 2 ولد (د) 10, 9 ، ولد ، الملكة ،
الملك بأى ترتيب (هـ) 3 من نفس المجموعة و 2 من مجموعة أخرى (و) الحصول على آس على الأقل .

الحل :

$$\Pr \{ 4 \text{ آس} \} = \frac{{}^4C_4 \cdot {}^{48}C_1}{{}^{52}C_5} = \frac{1}{54145} \quad (\text{أ})$$

$$\Pr \{ 4 \text{ آس} , 1 \text{ ملك} \} = \frac{{}^4C_4 \cdot {}^{48}C_1}{{}^{52}C_5} = \frac{1}{649740} \quad (\text{ب})$$

$$\Pr \{ 3 \text{ عشرة} , 2 \text{ ولد} \} = \frac{{}^3C_3 \cdot {}^{49}C_2}{{}^{52}C_5} = \frac{1}{108290} \quad (\text{ج})$$

$$\Pr \{ 10 , 9 \text{ ولد} , \text{ملكة وملك في أى ترتيب} \} = \frac{{}^2C_2 \cdot {}^{48}C_3 \cdot {}^{47}C_1}{{}^{52}C_5} = \frac{6}{162435} \quad (\text{د})$$

$$\Pr \{ 3 \text{ من أى مجموعة} , 2 \text{ من مجموعة أخرى} \} = \frac{4 \cdot {}^{48}C_3 \cdot 3 \cdot {}^{47}C_2}{{}^{52}C_5} = \frac{429}{4165} \quad (\text{هـ})$$

حيث أن هناك 4 طرق لاختيار المجموعة الأولى و 3 طرق لاختيار المجموعة الثانية .

$$\Pr \{ \text{عدم الحصول على آس} \} = \frac{{}^{48}C_5}{{}^{52}C_5} = \frac{35673}{54145} \quad (\text{و})$$

$$\Pr \{ \text{الحصول على آس على الأقل} \} = 1 - \frac{35673}{54145} = \frac{18472}{54145}$$

٦-٣٤ أوجد احتمال ظهور الرقم 6 ثلاث مرات في 5 رميات لزهرة طاولة متوازنة .

الحل :

اعتبر أن رمية زهرة الطاولة يمكن تمثيلها كخمس مسافات - - - - - في كل مسافة سيكون لدينا
أما الحدث 6 أو الحدث ليس 6 ($\bar{6}$) . على سبيل المثال ثلاثة من الأرقام 6 ورقان من غير الأرقام 6 يمكن حلونها
كالتالى : 66 $\bar{6}$ 66 or 6 $\bar{6}$ 666

وهكذا احتمال حدث مثل 66 $\bar{6}$ 66 هو

$$\Pr \{ 66\bar{6}66 \} = \Pr \{ 6 \} \Pr \{ 6 \} \Pr \{ \bar{6} \} \Pr \{ 6 \} \Pr \{ 6 \} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6} \right)^3 \left(\frac{5}{6} \right)^2$$

كذلك $\Pr \{ 6\bar{6}666 \} = \left(\frac{1}{6} \right)^3 \left(\frac{5}{6} \right)^2$ ، وهكذا ، لكل الأحداث المكونة من ثلاثة من الرقم 6 ، ورقان
ليسا 6 . ولكن هناك $10 = {}^5C_3$ من هذه الأحداث وهذه الأحداث أحداث متنافية . وبهذا فإن الاحتمال
المطلوب هو

$$\Pr \{ 66\bar{6}66 \text{ or } 6\bar{6}666 \text{ or etc.} \} = {}^5C_3 \left(\frac{1}{6} \right)^3 \left(\frac{5}{6} \right)^2 = \frac{25}{1296}$$

وبشكل عام ، إذا كان $p = \Pr\{E\}$ ، $q = \Pr\{\bar{E}\}$ ، فإنه باستخدام نفس المبررات التي ذكرناها فيما سبق فإن احتمال الحصول على X E 's بالضبط من N محاولة هو

$$nC_x p^x q^{n-x}$$

٢٥-٦ في مصنع لوحظ أن متوسط الوحدات التالفة بالنسبة لمواصفات معينة في إنتاج آلة معينة لإنتاج المسامير هو 20% إذا اختير 10 مسامير عشوائياً من الإنتاج اليومي لهذه الآلة ، أوجد احتمال وجود :

(أ) 2 بالضبط تالفين (ب) 2 أو أكثر تالفين (ج) أكثر من 5 من الإنتاج تالف .

الحل :

$$\Pr\{\text{عدد المسامير التالفة 2}\} = {}_{10}C_2(0.2)^2(0.8)^8 = 45(0.04)(0.1678) = 0.0302 \quad (أ)$$

باستخدام مبررات مماثلة للمسألة ٦ - ٢٤ .

(ب)

$$\Pr\{\text{عدد المسامير التالفة 2 أو أكثر}\}$$

$$= 1 - \Pr\{\text{عدد المسامير التالفة 0}\} - \Pr\{\text{عدد المسامير التالفة 1}\}$$

$$\begin{aligned} &= 1 - {}_{10}C_0(0.2)^0(0.8)^{10} - {}_{10}C_1(0.2)^1(0.8)^9 \\ &= 1 - (0.8)^{10} - 10(0.2)(0.8)^9 = 1 - 0.1074 - 0.2684 = 0.6242 \end{aligned}$$

(ج)

$$\Pr\{\text{عدد المسامير التالفة أكثر من 5}\} =$$

$$\Pr\{\text{تالف 6}\} + \Pr\{\text{تالف 7}\} + \Pr\{\text{تالف 8}\} + \Pr\{\text{تالف 9}\} + \Pr\{\text{تالف 10}\}$$

$$\begin{aligned} &= {}_{10}C_6(0.2)^6(0.8)^4 + {}_{10}C_7(0.2)^7(0.8)^3 + {}_{10}C_8(0.2)^8(0.8)^2 \\ &\quad + {}_{10}C_9(0.2)^9(0.8) + {}_{10}C_{10}(0.2)^{10} \\ &= 0.00637. \end{aligned}$$

٢٦-٦ في 1000 عينة كل عينة مكونة من 10 مسامير مأخوذة حسب بيانات المسألة السابقة ، كم من هذه العينة نتوقع أن نجد

(أ) عدد المسامير التالفة 2 بالضبط

(ب) عدد المسامير التالفة 2 أو أكثر

(ج) عدد المسامير التالفة أكثر من 5 ؟

الحل :

$$(أ) \quad = \text{العدد المتوقع من المسألة ٦-٢٥} \quad (1000)(0.0302) = 30$$

$$(ب) \quad = \text{العدد المتوقع من المسألة ٦-٢٥} \quad (1000)(0.6242) = 624$$

$$(ج) \quad = \text{العدد المتوقع من المسألة ٦-٢٥} \quad (1000)(0.00637) = 6$$

مجال العينة واشكال ايلر :

٦ - ٣٧ (أ) كون مجال العينة لرمية زهرق طاولة

غير متحيزتين مرة واحدة .

(ب) من مجال العينة أوجد احتمال أن

المجموع في رمية زهرق طاولة هو

١١ أو 7 .

الحل :

(أ) يتكون مجال العينة من مجموعة النقطة

المبينة في الشكل ٦ - ٧ . الاحداثي

الأول لكل نقطة بين العدد الموضح

على إحدى الزهرتين والاحداثي الثاني

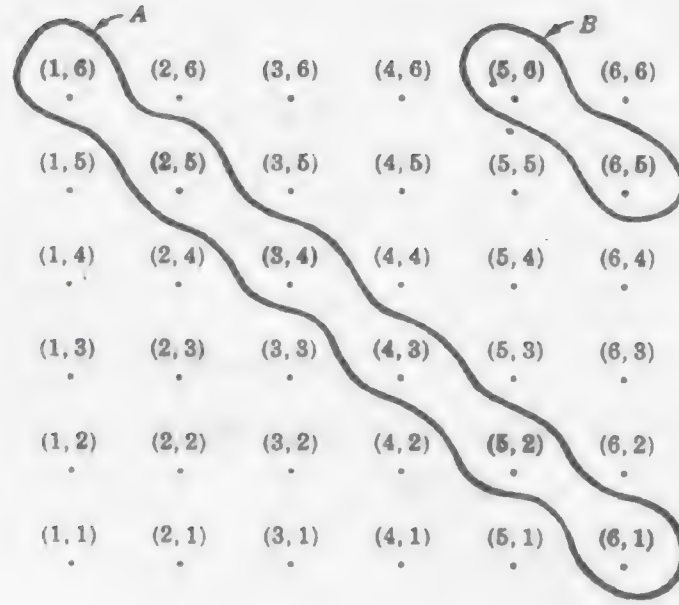
يبين العدد الموضح على الزهرة الأخرى .

العدد الكلي للنقط هو 36 ونخصص

لكل نقطة احتمالاً قدره $1/36$.

وبهذا يكون مجموع احتمالات جميع

النقط في المجال هو 1 .



شكل ٦ - ٧

(ب) مجموع النقط المقابلة للأحداث « المجموع 7 » مشار إليها بـ A و « المجموع 11 » مشار إليها بـ B .

$$\Pr\{A\} = \text{مجموع الاحتمالات المرتبطة بكل نقطة في } A = 6/36$$

$$\Pr\{B\} = \text{مجموع الاحتمالات المرتبطة بكل نقطة في } B = 2/36$$

$$\Pr\{A + B\} = \text{مجموع احتمالات النقط الموجودة في } A \text{ أو في } B \text{ أو في كليهما} = (6 + 2) / 36 = 8/36 = 2/9$$

لاحظ أنه في هذه الحالة $\Pr\{A + B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\}$.

نظراً لأن A و B ليس بينهما نقط مشتركة ، بمعنى أنهما أحداث متنافية .

٦ - ٣٨ باستخدام مجال عينة ، وضح أن

(أ)

$$\Pr\{A + B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\}$$

$$\Pr\{A + B + C\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} + \Pr\{C\} - \Pr\{AB\} - \Pr\{BC\} - \Pr\{AC\} + \Pr\{ABC\} \text{ (ب)}$$

الحل :

(أ) اعتبر أن A و B مجموعتان من النقط بينهما نقط مشتركة مثله بـ AB كما في الشكل ٦ - ٨ .

تتكون A من AB و $B\bar{A}$ بينما B تتكون من AB و $B\bar{A}$.
 المجموع الكلي للنقط في $A + B$ (أما في A أو في B أو في كليهما)
 = المجموع الكلي للنقط في A + المجموع الكلي للنقط في B - المجموع الكلي للنقط في AB .
 وبما أن احتمال أي حدث أو فئة = مجموع الاحتمالات المرتبطة بنقط الفئة فإن

$$\Pr\{A + B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\}$$

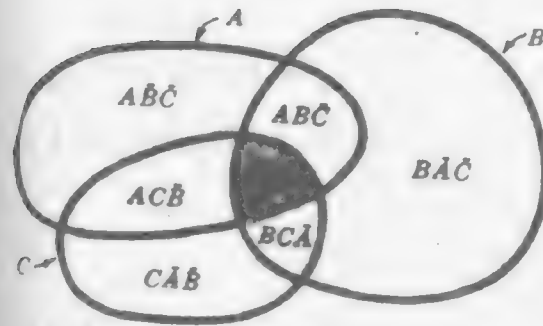
طريقة أخرى :

اعتبر أن $A - AB$ تمثل مجموعة النقط في A والتي ليست في B (مثل $A\bar{B}$) فإن $A - AB$ ،
 تمد أحداثاً متنافية (بمعنى أنه لا يوجد نقط مشتركة بينهما) . كذلك

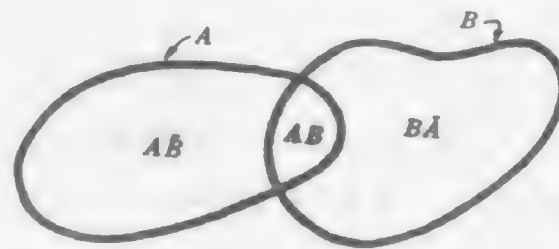
$$\Pr\{A - AB\} = \Pr\{A\} - \Pr\{AB\}$$

وبهذا فإن

$$\Pr\{A + B\} = \Pr\{A - AB\} + \Pr\{B\} = \Pr\{A\} - \Pr\{AB\} + \Pr\{B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\}$$



شكل ٦ - ٩



شكل ٦ - ٨

(ب) اعتبر أن A, B, C مجموعات ثلاث من النقط كما هو موضح بالشكل ٦ - ٩ الرمز ABC يعني النقط الموجودة في A, B معاً وغير الموجودة في C والرموز الأخرى لها معانٍ مشابهة .

من الممكن اعتبار أن النقط الموجودة أما في A أو B أو C أنها النقط المتضمنة في الـ 7 مجموعات المتنافية بالشكل ٦ - ٩ أعلاه ، منها 4 مجموعات مظلة و 3 غير مظلة . الاحتمال المطلوب هو

$$\Pr\{A + B + C\} = \Pr\{A\bar{B}\bar{C}\} + \Pr\{B\bar{C}\bar{A}\} + \Pr\{C\bar{A}\bar{B}\} + \Pr\{A\bar{B}C\} + \Pr\{B\bar{C}A\} + \Pr\{C\bar{A}B\} + \Pr\{ABC\}$$

والآن للحصول على $A\bar{B}\bar{C}$ ، على سبيل المثال ، فإننا نحذف النقطة المشتركة بين A و B وكذلك بين A, C ، ولكن هذا يؤدي إلى أن نحذف النقطة المشتركة بين A, B, C مرتين .

$$A\bar{B}\bar{C} = A - AB - AC + ABC \quad \text{وهذا فإن}$$

$$\Pr\{A\bar{B}\bar{C}\} = \Pr\{A\} - \Pr\{AB\} - \Pr\{AC\} + \Pr\{ABC\}$$

وبنفس الطريقة ، نجد أن

$$\Pr\{B\bar{C}\bar{A}\} = \Pr\{B\} - \Pr\{BC\} - \Pr\{BA\} + \Pr\{BCA\}$$

$$\Pr\{C\bar{A}\bar{B}\} = \Pr\{C\} - \Pr\{CA\} - \Pr\{CB\} + \Pr\{CAB\}$$

$$\Pr\{BC\bar{A}\} = \Pr\{BC\} - \Pr\{ABC\}$$

$$\Pr\{CA\bar{B}\} = \Pr\{CA\} - \Pr\{BCA\}$$

$$\Pr\{AB\bar{C}\} = \Pr\{AB\} - \Pr\{CAB\}$$

$$\Pr\{ABC\} = \Pr\{ABC\}$$

بتجميع هذه المعادلات السبع مع الأخذ في الاعتبار أن $\Pr\{AB\} = \Pr\{BA\}$ فأنتنا نحصل على

$$\Pr\{A + B + C\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} + \Pr\{C\} - \Pr\{AB\} - \Pr\{BC\} - \Pr\{AC\} + \Pr\{ABC\}$$

٢٩ - ٦ في بحث شمل 500 طالب يدرسون مادة أو أكثر من المواد ، الجبر ، الطبيعة ، الإحصاء خلال فصل دراسي وجدت الأرقام التالية للطلبة الذين يدرسون المواد الموضحة .

جبر وطبيعة 83	الجبر 329
جبر وإحصاء 217	طبيعة 186
طبيعة وإحصاء 63	إحصاء 295

كم عدد الطلبة الذين يدرسون

(أ) كل المواد الثلاث (ب) يدرسون الجبر ولا يدرسون الإحصاء

(ج) يدرسون الطبيعة ولا يدرسون الجبر

(د) يدرسون الإحصاء ولا يدرسون الطبيعة

(هـ) يدرسون الجبر أو الإحصاء ولا يدرسون الطبيعة

(و) يدرسون الجبر ولا يدرسون الطبيعة أو الإحصاء

الحل :

اعتبر أن A ترمز لمجموعة الطلبة الذين يدرسون الجبر ، و A يرمز لعدد الطلبة المنتمين لهذه المجموعة . كذلك

اعتبر أن B يرمز لعدد الطلبة الذين يدرسون الطبيعة ، C عدد الطلبة الذين يدرسون الإحصاء .

بهذا فإن $(A + B + C)$ يرمز لعدد الذين يدرسون الجبر أو الطبيعة أو الإحصاء أو أى توافق منها ،

(AB) ترمز لعدد الذين يدرسون كلا من الجبر والطبيعة . وهكذا . وكما في المثال السابق ، فإن

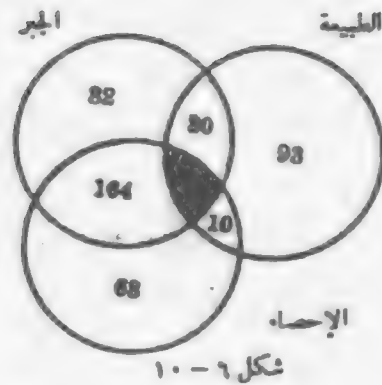
$$(A + B + C) = (A) + (B) + (C) - (AB) - (BC) - (AC) + (ABC)$$

(أ) بالتعويض بالأرقام المغطاة في هذه الصيغة فإننا نجد

$$500 = 329 + 186 + 295 - 83 - 63 - 217 + (ABC)$$

أو $(ABC) = 53$ ، وهو عدد الطلبة الذين يدرسون الجبر والطبيعة والإحصاء . لاحظ أن الاحتمال (الاعتباري) لأن يدرس الطالب المواد الثلاث هو $53/500$.

(ب) للحصول على المعلومات المطلوبة من الملامح تكوين شكل أيلر يبين عدد الطلبة الذين ينتمون لكل مجموعة .



تبدأ من حقيقة أن هناك 53 طالب يدرسون المواد الثلاث ، ومنه نستنتج أن عدد الطلبة الذين يدرسون الجبر والإحصاء ولا يدرسون الطبيعة هو $164 = 217 - 53$ وهو الموضح بالرسم ١٠-٦ . ومن البيانات المغطاة فإننا نحصل على الأرقام الموضحة .

من البيانات المغطاة، عدد الطلبة الذين يدرسون الجبر ولا يدرسون إحصاء هو $217 - 329$ أو من الشكل ١٠-٦ ، $82 + 30 = 112$.

(ج) عدد الذين يدرسون الطبيعة ولا يدرسون الجبر $93 + 10 = 103$.

(د) عدد الذين يدرسون الإحصاء ولا يدرسون الطبيعة $68 + 164 = 232$.

(هـ) عدد الذين يدرسون الجبر أو الإحصاء ولا يدرسون الطبيعة $82 + 164 + 68 = 314$.

(و) عدد الذين يدرسون الجبر ولا يدرسون الطبيعة أو الإحصاء $82 =$

مسائل إضافية

المبادئ الأساسية للاحتتمالات :

١٠-٤ أوجد الاحتمال p ، أو تقدير له ، لكل من الأحداث التالية :

(أ) ظهور ملك ، آس ، ولد سباق ، أو بنت ديناري عند سحب ورقة واحدة من مجموعة أوراق لعب (كوتشينة) مخلوطة خلطاً جيداً .

(ب) ظهور مجموع 8 في رمية واحدة لزهرق طاولة غير متحيزتين .

(ج) وجود سبار غير قالف من 600 سبار تم اختيارها ووجد أن بها 12 سبار قالف .

(د) ظهور مجموع 7 أو 11 في رمية واحدة لزهرق طاولة غير متحيزتين .

(هـ) ظهور الصورة مرة على الأقل في رمية عملة متوازنة ثلاث مرات .

ج : (أ) $5/26$ (ب) $5/36$ (ج) 0.98 (د) $2/9$ (هـ) $7/8$.

٦-٤١ في تجربة مكونة من سحب ثلاثة كروت على التوالي من مجموعة أوراق لعب عادية مخلوطة خلطاً جيداً . اعتبر E_1 يمثل الحدث « ملك » في السحبة الأولى ، E_2 الحدث « ملك » في السحبة الثانية E_3 الحدث « ملك » في السحبة الثالثة . عبر بالكلمات على كلى مما يلي :

(أ) $\Pr\{E_1 \bar{E}_2\}$ (ب) $\Pr\{E_1 + E_2\}$ (ج) $\bar{E}_1 + \bar{E}_2$

(د) $\Pr\{E_3 | E_1 \bar{E}_2\}$ (هـ) $\bar{E}_1 \bar{E}_2 \bar{E}_3$ (و) $\Pr\{E_1 E_2 + \bar{E}_2 E_3\}$.

ج : (أ) احتمال ظهور الملك في السحبة الأولى وعدم ظهور الملك في السحبة الثانية .

(ب) احتمال ظهور الملك أما في السحبة الأولى أو في السحبة الثانية أو كليهما .

(ج) عدم ظهور الملك لا في السحبة الأولى ولا في السحبة الثانية ولا في كليهما معاً .

(د) احتمال ظهور الملك في السحبة الثالثة علماً بأن الملك قد ظهر في السحبة الأولى ولم يظهر في السحبة الثانية .

(هـ) عدم ظهور الملك في أى من السحبات الثلاث .

(و) احتمال ظهور الملك في كل من السحبتين الأولى والثانية معاً أو عدم ظهور الملك في السحبة الثانية مع ظهوره في السحبة الثالثة .

٦-٤٢ سحبت كرة عشوائياً من صندوق به 10 كرات حمراء ، 30 كرة بيضاء ، 20 كرة زرقاء و 15 كرة برتقالية . أوجد احتمال أن تكون الكرة :

(أ) برتقالية أو حمراء . (ب) ليست حمراء أو زرقاء . (ج) ليست زرقاء .

(د) بيضاء . (هـ) حمراء أو بيضاء أو زرقاء .

ج : (أ) $1/3$ (ب) $3/5$ (ج) $11/15$ (د) $2/5$ (هـ) $4/5$

٦-٤٣ سحبت كرتان على التوالي من الصندوق الموضح في المسألة السابقة ، ويتم إعادة الكرة المسحوبة بعد كل سحبة . أوجد احتمال أن تكون :

(أ) الكرتان بيضاء . (ب) الأولى حمراء والثانية بيضاء . (ج) لا توجد بينهما كرة برتقالية .

(د) الكرتان إما كلاهما حمراء أو كلاهما بيضاء أو إحداهما حمراء والأخرى بيضاء .

(هـ) الكرة الثانية ليست زرقاء . (و) الكرة الأولى برتقالية .

(ز) على الأقل واحدة زرقاء . (ح) على الأكثر واحدة حمراء .

(ط) الأولى بيضاء ولكن الثانية ليست بيضاء . (ي) كرة واحدة فقط حمراء .

ج : (أ) $4/25$ (ب) $4/75$ (ج) $16/225$ (د) $64/225$ (هـ) $11/15$ (و) $1/5$ (ز) $104/225$

(ح) $221/225$ (ط) $6/25$ (ي) $52/225$.

٤٤ - ٦ حل المسألة السابقة إذا كانت الكرة التي تسحب لا تعاد مرة أخرى .

ج : (أ) $29/185$ (ب) $2/37$ (ج) $118/185$ (د) $52/185$ (هـ) $11/15$ (و) $1/5$
(ز) $86/185$ (ح) $182/185$ (ط) $9/37$ (ى) $26/111$.

٤٥ - ٦ في رميتين لزهري طاولة متوازنتين أوجد احتمال تسجيل مجموع 7 نقط

(أ) مرة (ب) على الأقل مرة (ج) مرتين

ج : (أ) $5/18$ (ب) $11/36$ (ج) $1/36$

٤٦ - ٦ سحب ورقتان على التوالي من مجموعة أوراق لعب عادية مكونة من 52 ورقة مخلوطة خلطاً جيداً . أوجد احتمال أن

(أ) الورقة الأولى ليست عشرة سباق أو آس .

(ب) الورقة الأولى آس ولكن الورقة الثانية ليست آس .

(ج) ورقة على الأقل تحمل علامة الديناري

(د) الورقتان ليستا من نفس المجموعة .

(هـ) لا يوجد أكثر من ورقة عليها صورة (الولد ، البنت ، الملك)

(و) الورقة الثانية ليست من الأوراق التي عليها صورة .

(ز) الورقة الثانية ليست من الأوراق التي عليها صورة علماً بأن الورقة الأولى من الأوراق التي عليها صورة .

(ح) الورقتان إما من الأوراق التي عليها صورة أو من الأوراق التي عليها رسم البستوني أو كلاهما .

ج : (أ) $47/52$ (ب) $16/221$ (ج) $15/34$ (د) $13/17$ (هـ) $210/221$

(و) $10/13$ (ز) $40/51$ (ح) $77/442$.

٤٧ - ٦ صندوق يحتوي على 9 تذاكر مرقمة من 1 إلى 9 (بما فيها الرقم 9 نفسه) .

إذا سحب ثلاث تذاكر من الصندوق تذكراً في كل مرة ، أوجد احتمال أن تكون أرقامها بالتبادل إما فردي ،

زوجي ، فردي أو زوجي ، فردي ، زوجي .

ج : $5/18$.

٤٨ - ٦ معامل الترجيح لصالح A لكسب مباراة في الشطرنج ضد B هو 3:2 . إذا لعبت ثلاث مباريات ، ما هو معامل

الترجيح .

(أ) لصالح أن يكسب A على الأقل مباريتين من ثلاث .

(ب) ضد A أن يخسر أو المباريتين الأولى والثانية مع B .

ج : (أ) 44 : 81 (ب) 4 : 21

٦- ٤٩ كيس نقود يحتوي على قطعتين من النقود الفضية و 4 قطع نقود نحاسية وكيس آخر يحتوي على 4 قطع نقود فضية و 3 نحاسية . إذا اختيرت قطعة نقود عشوائياً من أحد الكيسين ، ما هو احتمال أن تكون قطعة نقود فضية ؟
ج : 19/42 .

٦- ٥٠ احتمال أن يبقى رجل على قيد الحياة 25 سنة أخرى وهو $3/5$ واحتمال أن تبقى زوجته على قيد الحياة 25 سنة أخرى $2/3$ ما هو احتمال :

(أ) أن يبقى الإثنين على قيد الحياة .

(ب) أن يبقى الرجل فقط على قيد الحياة .

(ج) أن تبقى الزوجة فقط على قيد الحياة .

(د) أن يبقى واحداً منهما على قيد الحياة .

ج : (أ) $2/5$ (ب) $1/5$ (ج) $4/15$ (د) $13/15$

٦- ٥١ من 800 عائلة بكل عائلة 4 أطفال ، ما هي النسبة المتوقعة للمتوقعة للعائلات التي بها

(أ) ولدان وبناتان .

(ب) ولد على الأقل

(ج) ليس بها بنات .

(د) بنتان على الأكثر ؟ مفترضاً أن الأولاد والبنات لهما احتمال متساو في الوجود .

ج : (أ) 37.5% (ب) 93.75% (ج) 6.25% (د) 68.75%

التوزيعات الاحتمالية :

٦- ٥٢ إذا كان X متغيراً عشوائياً يمثل عدد الأولاد في العائلات المكونة من 4 أطفال (أنظر المسألة ٦- ٥١)

(أ) كون جدولاً يمثل التوزيع الاحتمالي لـ X .

(ب) مثل التوزيع في (أ) بيانياً .

X	0	1	2	3	4
$p(X)$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

ج : (أ)

٦- ٥٣ المتغير العشوائي المتصل X يأخذ قيمًا بين $X = 2$ و $X = 8$ (بما فيها 2,8) ، ودالة كثافة احتماله معرفة

بـ $a(X+3)$ حيث a مقدار ثابت .

(أ) احسب قيمة a . (ب) أوجد $\Pr\{3 < X < 5\}$.

(ج) $\Pr\{X \geq 4\}$ (د) $\Pr\{|X - 5| < 0.5\}$.

ج : (أ) $1/48$ (ب) $7/24$ (ج) $3/4$ (د) $1/6$

- ٥٤ - ٦ ثلاث كرات بلّ سحبت بدون إرجاع من وعاء يحتوى على 4 كرات بلّ حمراء و 6 كرات بلّ بيضاء . إذا كان X متغير عشوائى يعبر عن عدد الكرات الحمراء المسحوبة .
- (أ) كون جدولاً موضحاً به التوزيع الاحتمالى لـ X .
- (ب) مثل التوزيع بيانياً .

X	0	1	2	3
$p(X)$	1/6	1/2	3/10	1/30

ج : (أ)

- ٥٥ - ٦ فى المسألة السابقة ، أوجد (أ) $\Pr\{X = 2\}$ (ب) $\Pr\{1 \leq X \leq 3\}$ وفسر النتيجة .
- ج : (أ) $3/10$ ، وهذا احتمال سحب ما مجموعة 2 من الكرات الحمراء .
- (ب) $5/6$ ، وهذا احتمال سحب 1 أو 2 أو 3 من الكرات الحمراء ، سحب كرة حمراء على الأقل .

التوقع الرياضى :

- ٥٦ - ٦ ما هو السعر العادل للاشتراك فى لعبة احتمال أن يكسب فيها الشخص £25 هو 0.2 واحتمال أن يكسب £10 هو 0.4 ؟
- ج : £9 .

- ٥٧ - ٦ إذا أمطرت السماء ، فإن بائع مظلات واقية من المطر يمكن أن يكسب £30 فى اليوم . إذا كان الجو معتدلاً فإنه يخسر £6 فى اليوم . ما هو توقعه إذا كان احتمال سقوط المطر هو 0.3 ؟
- ج : £4.80 فى اليوم .

- ٥٨ - ٦ A و B يشتركان فى لعبة حيث يقذفان بعملة متوازنة ثلاث مرات والذى يحصل على الصورة أولاً يكسب اللعبة . إذا قذف A العملة أولاً وإذا كانت القيمة الإجمالية للرهان هو £20 ، ما هو المبلغ الذى يجب أن يساهم به كل منهم بحيث يمكن اعتبار اللعبة عادلة ؟
- ج : $A, £12.50; B, £7.50$

- ٥٩ - ٦ أوجد (أ) $E(X)$ (ب) $E(X^2)$ (ج) $E[(X - \bar{X})^2]$ (د) $E(X^2)$ للتوزيع الاحتمالى التالى .

X	10	-20	30
$p(X)$	1/5	3/10	1/2

ج : (أ) 7 (ب) 590 (ج) 541 (د) 10900

٦-٦٠ أوجد (أ) الوسط (ب) التباين و (ج) الانحراف المعياري لتوزيع X بالمسألة ٦-٥٤ وفسر نتائجك .

ج : (أ) 1.2 (ب) 0.56 (ج) $\sqrt{0.56} = 0.75$.

٦-٦١ متغير عشوائي يأخذ القيمة 1 باحتمال p و 0 باحتمال $q = 1 - p$ أثبت أن

$$E(X) = p \quad (أ) \quad E[(X - \bar{X})^2] = pq \quad (ب)$$

٦-٦٢ أثبت أن (أ) $E(2X + 3) = 2E(X) + 3$ (ب) $E[(X - \bar{X})^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$

٦-٦٣ إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين لهما نفس التوزيع .

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

التباديل :

٦-٦٤ احسب (أ) P_2 (ب) P_3 (ج) P_3 : (أ) 12 (ب) 2520 (ج) 720

٦-٦٥ لأي قيمة من قيم n ، $nP_3 = n+1P_3$ ؟ ج : $n = 5$

٦-٦٦ بكم طريقة يمكن أجلال 5 أشخاص على كنية إذا كان عدد الأماكن المتاحة هو 3 فقط ؟ ج : 60

٦-٦٧ بكم طريقة يمكن ترتيب 7 كتب على رف إذا كان (أ) أى ترتيب ممكن (ب) ثلاثة كتب معينة يجب أن تكون معاً ، (ج) كتابان معينان يجب أن يشغلا النهاية ؟

ج : (أ) 5040 (ب) 720 (ج) 240

٦-٦٨ كم من الأعداد المكونة من خمسة أرقام بكل منها يمكن تكوينها من الأرقام 1, 2, 3, ..., 9 إذا (أ) الأرقام يجب أن تكون فردية (ب) الرقمان الأوليان من كل عدد أرقام زوجية ؟

ج : (أ) 8400 ، (ب) 2520

٦-٦٩ قل المسألة السابقة إذا كان تكرار الرقم مسموحاً به .

ج : (أ) 32 805 (ب) 11664

٦-٧٠ كم من الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام يمكن تكوينها من ثلاثة أرقام أربعة وأربعة أرقام اثنين ، ورقان ثلاثة ؟ ج : 20

٦-٧١ بكم طريقة يمكن أجلال 3 رجال و 3 نساء حول مائدة إذا كان (أ) لا توجد قيود موضوعة .

(ب) اثنتان معينتان من النساء يجب ألا يجلسا معاً . (ج) كل واحدة من النساء يجب أن تجلس بين رجلين .

ج : (أ) 120 (ب) 72 (ت) 12

التوافيق :

٧٢-٦ احسب (أ) C_3 (ب) C_4 (ج) C_{10}

ج : (أ) 10 (ب) 70 (ج) 45

٧٣-٦ لأي قيمة من قيم n تكون $nC_2 = 7 \cdot nC_3$ ؟ ج : $n=6$

٧٤-٦ بكم طريقة يمكن اختيار 6 أسئلة من 10 أسئلة ؟ ج : 210

٧٥-٦ كم عدد اللجان المكونة من 3 رجال و 4 نساء يمكن تكوينها من 8 رجال و 6 نساء ؟ ج : 840

٧٦-٦ بكم طريقة يمكن اختيار 2 من الرجال ، 4 سيدات ، 3 أولاد و 3 بنات من 6 من الرجال ، 8 سيدات ، 4 أولاد و 5 بنات إذا كان

(أ) لا توجد أى قيود على الاختيار .

(ب) رجل معين وسيدة معينة يجب اختيارهما ؟

ج : (أ) 42 000 (ب) 7000

٧٧-٦ بكم طريقة يمكن تقسيم 10 أشخاص إلى (أ) مجموعتين مكونتين من 7 أشخاص ، 3 أشخاص (ب) ثلاثة مجموعات

مكونة من 4 أشخاص ، 3 أشخاص ، شخصان ؟ ج : (أ) 120 (ب) 12 600

٧٨-٦ من 5 إحصائيين ، 6 اقتصاديين يراد تكوين لجنة من 3 إحصائيين ، 2 من الاقتصاديين . كم لجنة يمكن تكوينها إذا كان :

(أ) لا توجد قيود على الاختيار .

(ب) 2 معينين من الإحصائيين يجب أن يكونا في اللجنة .

(ج) اقتصادى معين يجب أن يكون في اللجنة . ؟

ج : (أ) 150 (ب) 45 (ج) 100

٧٩-٦ أوجد عدد (أ) التوافيق (ب) التباديل ، المكون كل منها من أربعة حروف والى يمكن تكوينها من الكلمة ^١Tennessee

ج : (أ) 17 (ب) 163

٨٠-٦ أثبت أن $1 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + \dots + (-1)^n {}^nC_n = 0$

تقريب ستيرلينج لـ $n!$:

٨١-٦ بكم طريقة يمكن اختيار 30 مفردة من 100 ؟ ج : 2.95×10^{25}

٨٢-٦ وضح أنه لقيم n الكبيرة ${}_nC_n = 2^{2n}/\sqrt{\pi n}$ تقريباً .

مسائل متنوعة X

٨٣ - ٦ محبت ثلاث ورقات من مجموعة أوراق لعب مكونة من 52 كارت . أوجد احتمال (أ) ورقتان عليهما صورة الولد وورقة عليها صورة الملك (ب) جميع الورقات من نفس النوع (ج) جميع الورقات من مجموعات مختلفة (د) وجود ورقتي آس على الأقل .

ج : (أ) $6/5525$ (ب) $22/425$ (ج) $169/425$ (د) $73/5525$

٨٤ - ٦ أوجد احتمال الحصول على مجموع 7 مرتين على الأقل في رمية زهرة أربعة مرات ؟

ج : $171/1296$

٨٥ - ٦ إذا كان 10% من إنتاج آلة في مصنع إنتاجاً تالفاً ، إذا اختيرت 5 مسامير عشوائياً فاحسب احتمال (أ) أن لا يكون أى منها تالف (ب) وجود مسمار واحد تالف (ج) وجود مساميرين على الأقل تالفين ؟

ج : (أ) 0.59049 (ب) 0.32805 (ج) 0.08866

٨٦ - ٦ (أ) كون مجال العينة لنتائج رميتين لعملة غير متحيزة مستخدماً 1 لتمثل « الصورة » و 0 لتمثل « الكتابة » .

(ب) من مجال العينة أوجد احتمال ظهوره الصورة مرة على الأقل .

(ج) هل يمكن لك تكوين مجال العينة لنتائج ثلاث رميات لعملة ؟ إذا كان ممكناً حدد بمساعدة هذا التكوين احتمال ظهور صورتين على الأقل .

ج : (ب) $3/4$ (ج) $7/8$.

٨٧ - ٦ في استطلاع لرأى 200 ناخب أظهر المعلومات التالية والخاصة بثلاثة مرشحين A, B, C من حزب معين والذين يخوضون الانتخابات للحصول على ثلاثة مقاعد مختلفة .

28 مؤيدين لكل من A, B

122 مؤيدين لـ B أو C ولكن غير مؤيدين لـ A

98 مؤيدين لـ A أو B ولكن غير مؤيدين لـ C

64 مؤيدين لـ C ولكن غير مؤيدين لـ A أو B

42 مؤيدين لـ B ولكن غير مؤيدين لـ A أو C

14 مؤيدين لـ A و C ولكن غير مؤيدين لـ B

كم عدد الناخبين المؤيدين لـ (أ) جميع المرشحين الثلاثة (ب) A بغض النظر عن B أو C .

(ج) B بغض النظر عن A أو C (د) C بغض النظر عن A أو B (هـ) A و B وليس C

(و) مرشح واحد فقط ؟

ج : (أ) 8 (ب) 78 (ج) 86 (د) 102 (هـ) 20 (و) 142

٨٨ - ٦ (أ) أثبت أنه لأي حدثين E_1 و E_2 فإن $\Pr\{E_1 + E_2\} \leq \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\}$ (ب) عم النتيجة التي حصلت عليها في (أ)

٨٩ - ٦ إذا كانت E_1, E_2, E_3 عبارة عن 3 أحداث من المعروف أن واحد منها على الأقل قد وقع . وإذا افترضنا أن أيًا من هذه الأحداث يمكن أن ينتج عنه حدث آخر وليكن A ومن المعروف أن هذا الحدث أيضاً قد وقع . إذا كانت جميع الاحتمالات $\Pr\{E_1\}, \Pr\{E_2\}, \Pr\{E_3\}$ و $\Pr\{A|E_1\}, \Pr\{A|E_2\}, \Pr\{A|E_3\}$ يفترض أنها معلومة أثبت أن

$$\Pr\{E_1|A\} = \frac{\Pr\{E_1\} \Pr\{A|E_1\}}{\Pr\{E_1\} \Pr\{A|E_1\} + \Pr\{E_2\} \Pr\{A|E_2\} + \Pr\{E_3\} \Pr\{A|E_3\}}$$

ويمكن الحصول على نتيجة مشابهة لكل من $\Pr\{E_2|A\}$ و $\Pr\{E_3|A\}$. هذه الصيغة معروفة بإسم « قاعدة بايز أو نظرية بايز » . وهي مفيدة لحساب احتمالات الفروض المختلفة E_1 أو E_2 أو E_3 والتي ينتج عنها الحدث A . والنتيجة السابقة يمكن تعميمها .

٩٠ - ٦ ثلاثة صناديق مجوهرات متماثلة تماماً ولكل صندوق درجان . في كل من أدراج الصندوق الأول ساعة ذهبية . وفي كل من أدراج الصندوق الثاني يوجد ساعة فضية . في أحد أدراج الصندوق الثالث توجد ساعة ذهبية بينما في الدرج الآخر توجد ساعة فضية . اختير صندوق عشوائياً وفتح أحد الأدراج ووجد به ساعة فضية ، ما هو احتمال أن يكون بالدرج الثاني ساعة ذهبية ؟

(ملحوظة : طبق نتيجة المسألة ٨٩ - ٦)

ج : $1/3$

٩١ - ٦ قدر كلا من A و B أن يتقابلا فيما بين الساعة الثالثة والرابعة بعد الظهر على أن لا ينتظر أي منهما الآخر أكثر من 10 دقائق . ما هو احتمال أن يتقابلا .

ج : $11/36$

٩٢ - ٦ اختيرت نقطتان عشوائياً على خط طوله $a > 0$. أوجد احتمال أن تكون الخطوط الثلاثة المكونة من ذلك يمكن أن تكون أضلاع مثلث .

ج : $1/4$

الفصل السابع

توزيعات ذي الحدين ، الطبيعي وبواسون

توزيع ذي الحدين :

إذا كانت p احتمال وقوع حدث ما في أى محاولة وحيدة (وتسمى احتمال النجاح) و $q = 1 - p$ احتمال عدم وقوع الحدث في أى محاولة وحيدة (وتسمى احتمال الفشل) فإن احتمال وقوع الحدث مرات عددها X بالضبط في N محاولة (حدوث X نجاح و $N - X$ فشل) يعطى كالآق :

$$(1) \quad p(X) = {}_N C_X p^X q^{N-X} = \frac{N!}{X!(N-X)!} p^X q^{N-X}$$

حيث $X = 0, 1, 2, \dots$ و $0! = 1$ و $N! = N(N-1)(N-2)\dots 1$ (أنظر الفصل السادس المسألة ٦-٣٤) .

مثال ١ — احتمال الحصول على صورتين بالضبط من 6 رميات لعملة غير متحيزة هو

$${}_6 C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} = \frac{6!}{2!4!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{8}$$

باستخدام (١) بوضع $X = 2$ ، $N = 6$ و $p = q = \frac{1}{2}$.

مثال ٢ — احتمال الحصول على 4 صورة في 6 رميات لعملة غير متحيزة .

$$(2) \quad {}_6 C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-4} = {}_6 C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-3} + {}_6 C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

التوزيع الاحتمال المتقطع (١) يسمى غالبا بتوزيع ذي الحدين حيث أنه لقيم $X = 0, 1, 2, \dots, N$ يقابل الحدود المتتالية لصيغة ذي الحدين أو مفكوك ذي الحدين .

$$(q + p)^N = q^N + {}_N C_1 q^{N-1} p + {}_N C_2 q^{N-2} p^2 + \dots + p^N$$

حيث \dots و ${}_N C_2$ و ${}_N C_1$ و 1 تسمى معاملات ذي الحدين .

$$(q + p)^4 = q^4 + {}_4 C_1 q^3 p + {}_4 C_2 q^2 p^2 + {}_4 C_3 q p^3 + p^4$$

مثال :

$$q^4 + 4q^3 p + 6q^2 p^2 + 4q p^3 + p^4$$

التوزيع (١) يسمى أيضا توزيع برنولى بعد أن اكتشفه جيمس برنولى في نهاية القرن السابع عشر .

بعض خصائص توزيع ذي الحدين مذكورة في الجدول التالي :

جدول ٧ - ١

الوسط	$\mu = Np$
التباين	$\sigma^2 = Npq$
الانحراف المعياري	$\sigma = \sqrt{Npq}$
معامل الالتواء باستخدام العزوم	$\alpha_3 = \frac{q-p}{\sqrt{Npq}}$
معامل التفرطح باستخدام العزوم	$\alpha_4 = 3 + \frac{1-6pq}{Npq}$

مثال : في 100 رمية لعملة غير متحيزة فإن متوسط ظهور الصورة هو $\mu = Np = (100)(\frac{1}{2}) = 50$ وهذا هو الرقم المتوقع لظهور الصورة في 100 رمية لعملة .

$$\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} = 5$$

الانحراف المعياري

التوزيع الطبيعي :

أحد الأمثلة الهامة للتوزيع الاحتمالي المتصل هو التوزيع الطبيعي ، أو المنحنى الطبيعي أو توزيع جاوس ، ويعرف بالمعادلة .

$$(٢) \quad Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)^2/\sigma^2}$$

حيث μ = الوسط و σ = الانحراف المعياري و $\pi = 3.14159 \dots$ ، $e = 2.71828 \dots$

المساحة الكلية المحصورة بين المنحنى (٢) والأحداثي السيني X تساوي واحداً ، وبهذا فإن المساحة تحت المنحنى بين الأحداثيات $X = a$ و $X = b$ حيث $a < b$ ، تمثل احتمال أن تقع X بين a و b ، ويعبر عنها بـ $\Pr\{a < X < b\}$.

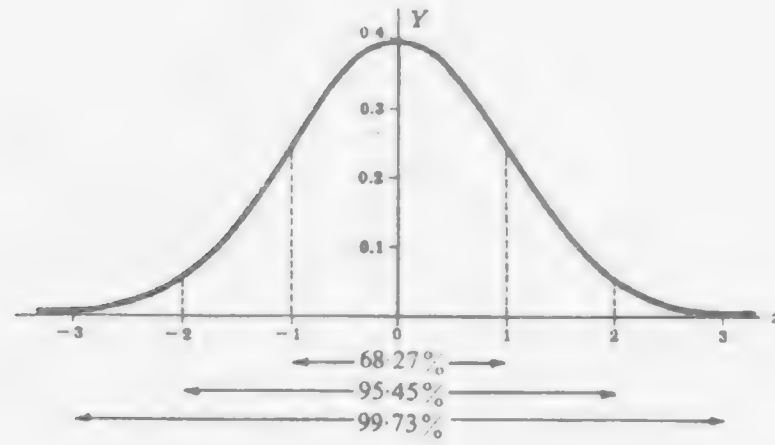
وعندما نعبر عن المتغير X بدلالة الوحدات المعيارية ، $z = (X - \mu)/\sigma$ ، فإن المعادلة (٢) يستبدل بها ما يسمى بالصورة القياسية أو المعيارية .

$$(٤) \quad Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

وفي هذه الحالة فإنه يقال أن z تتوزع توزيعاً معتدلاً متوسطه الصفر وتباينه الوحدة .

الشكل البياني للمنحنى الطبيعي المعياري يظهر في الشكل ١-٧ . في هذه الشكل أوضحنا أن المساحة الواقعة بين $z = -1$ ، $+1$ هي 68.27% وبين $z = -2$ ، $+2$ هي 95.45% وكذلك بين $z = -3$ ، $+3$ هي 99.73% من المساحة الكلية والتي تساوي واحد .

يمثل الجدول في الملحق 11 المساحة تحت المنحنى والمجسورة بين الأحادي $z = 0$ وأي قيمة موجبة لـ z ، ومن هذا الجدول فإن المساحة بين أي نقطتين يمكن الحصول عليها باستخدام تماثل المنحنى حول $z = 0$.



شكل ١-٧

بعض خصائص التوزيع الطبيعي المعرف بالمعادلة (٣) : مذكورة في الجدول ٢-٧

الجدول ٢-٧

الوسط	μ
التباين	σ^2
الانحراف المعياري	σ
معامل الالتواء باستخدام العزوم	$\alpha_3 = 0$
معامل التفرطح باستخدام العزوم	$\alpha_4 = 3$
الانحراف المتوسط	$\sigma\sqrt{2/\pi} = 0.7979$

العلاقة بين توزيع ذى الحدين والتوزيع الطبيعي :

إذا كانت N كبيرة وكلا من p و q ليسا قريبين من الصفر ، فإن توزيع ذى الحدين يمكن تقريبه بصورة جيدة بالتوزيع الطبيعي ذى المتغير المعيارى المعطى بـ $z = \frac{X - Np}{\sqrt{Npq}}$. ويصير التقريب أكثر جودة كلما زادت N ، وفى المالا نهاية تصبح العلاقة مضبوطة . وهذا موضح فى الجدول ١-٧ ، ٢-٧ حيث يتضح أنه عندما تزيد N فإن التواء وتفرطح توزيع ذى الحدين يقترب من التوزيع الطبيعي . ومن الناحية العملية فإن التقريب يعد جيدا إذا كان كل من Np و Nq أكبر من 5 .

توزيع بواسون :

التوزيع الاحتمالى المتقطع

$$(٥) \quad p(X) = \frac{\lambda^X e^{-\lambda}}{X!} \quad (X = 0, 1, 2, \dots)$$

حيث $e = 2.71828 \dots$ ، λ ثابت . مطلق ، يسمى توزيع بواسون ، عند اكتشاف بواسون له فى أوائل القرن التاسع عشر .

ويمكن حساب قيمة $p(X)$ باستخدام الجدول VI فى صفحة ٥٣٨ الذى يعطى قيم $e^{-\lambda}$ لقيم λ المختلفة ، أو باستخدام اللوغاريتمات .

بعض خصائص توزيع بواسون :

بعض خصائص توزيع بواسون معطاة فى الجدول التالى

جدول ٧ - ٣

الوسط	$\mu = \lambda$
التباين	$\sigma^2 = \lambda$
الانحراف المعيارى	$\sigma = \sqrt{\lambda}$
معامل الالتواء باستخدام العزوم	$\alpha_3 = 1/\sqrt{\lambda}$
معامل التفرطح باستخدام العزوم	$\alpha_4 = 3 + 1/\lambda$

العلاقة بين توزيع ذى الحدين وتوزيع بواسون :

في توزيع ذى الحدين (١) ، إذا كانت N كبيرة بينما احتمال وقوع حدث p قريبا من الصفر بحيث تكون $q = (1 - p)$ قريبة من 1 ، فإن الحدث يسمى حدثا نادرا . ومن الناحية العملية فإننا سنعتبر أن الحدث نادر إذا كان عدد المحاولات 50 على الأقل ($N \geq 50$) بينما Np أقل من 5 في هذه الحالات فإن التوزيع ذى الحدين (١) يمكن تقريبه بشكل جيد بتوزيع بواسون (٥) . وهذا يتضح من مقارنة الجداول ٧-١ و ٧-٣ أعلاه ، حيث لو عوضنا عن $\lambda = Np$ و $q \approx 1$ و $p \approx 0$ في الجدول ٧-١ نحصل على النتائج بالجدول ٧-٣ .

وبما أن هناك علاقة بين توزيع ذى الحدين والتوزيع الطبيعي . فإنه يمكن أن نبين أن توزيع بواسون يقترب من التوزيع الطبيعي ذى المتغير المعياري $(X - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ عند تحول λ إلى مالا نهاية .

توزيع كثيرات الحدود :

إذا كانت الأحداث E_1, E_2, \dots, E_K تحدث باحتمالات p_1, p_2, \dots, p_K على الترتيب ، فإن احتمال حدوث E_1, E_2, \dots, E_K مرات عددها على الترتيب X_1, X_2, \dots, X_K هو

$$(٦) \quad \frac{N!}{X_1! X_2! \dots X_K!} p_1^{X_1} p_2^{X_2} \dots p_K^{X_K}$$

$$\text{حيث } X_1 + X_2 + \dots + X_K = N$$

هذا التوزيع والذي يمد تصميما لتوزيع ذى الحدين ، يسمى توزيع كثيرات الحدود حيث (٦) هي الحد العام في مفكوك كثيرات الحدود $(p_1 + p_2 + \dots + p_K)^N$

مثال : إذا قذفت زهرة 12 مرة ، فإن احتمال الحصول على 1, 2, 3, 4, 5, 6 نقطة مرتين بالضبط لكل منها هو

$$\frac{12!}{2! 2! 2! 2! 2! 2!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1925}{559872} = 0.00344$$

العدد المتوقع لوقوع E_1, E_2, \dots, E_K في N محاولة هو Np_1, Np_2, \dots, Np_K على الترتيب .

توفيق توزيع نظري للتوزيع التكرارى لعينة :

إذا كان لدى الشخص بعض الأدلة على شكل توزيع مجتمع معين سواء لمبررات احتمالية أو غيرها ، فإنه غالبا ما يمكن توفيق مثل هذا التوزيع النظري (يسمى أيضا « نموذج » أو توزيعا « متوقعا ») للتوزيع التكرارى لعينة من هذا المجتمع . والطريقة المستخلصة بشكل عام تتضمن استعمال الوسط والانحراف المعياري للعينة لتقدير الوسط والانحراف المعياري للمجتمع . أنظر المسائل ٧-٣١ ، ٧-٣٢ و ٧-٣٤ .

ولاختبار جودة توفيق هذا التوزيع النظرى ، نستخدم اختبار كاي تربيع والمعطى فى الفصل الثانى عشر .
ولمحاولة تقدير ما إذا كان التوزيع الطبيعى يمثل توفيقاً جيداً للبيانات المعطاة ، فإنه من المناسب استخدام ورق رسم بياني المنحنى الطبيعى أو ورق رسم بياني احتمالى كما يسمى أحياناً (أنظر المسألة ٧ - ٣٢) .
توزيع ذى الحدين :

مسائل محلولة

توزيع ذى الحدين :

$$١-٧ \text{ أحسب (أ) } 5! \quad \text{(ب) } \frac{6!}{2!4!} \quad \text{(ج) } {}_8C_3 \quad \text{(د) } {}_7C_5 \quad \text{(هـ) } {}_4C_4 \quad \text{(و) } {}_4C_0$$

الحل

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \quad (أ)$$

$$\frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1)(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15 \quad (ب)$$

$${}_8C_3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1)(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \quad (ج)$$

$${}_7C_5 = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)(2 \cdot 1)} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21 \quad (د)$$

$${}_4C_4 = \frac{4!}{4!0!} = 1 \quad (هـ) \quad \text{(حيث } 0! = 1 \text{ بالتعريف)}$$

$${}_4C_0 = \frac{4!}{0!4!} = 1 \quad (و)$$

٧-٢ عند رمى عملة متوازنة ثلاث مرات أوجد احتمال ظهور الآتى :

(أ) 3 صور (ب) صورتان وكتابة (ج) 2 كتابة ، 1 صورة (د) 3 كتابة

الحل :

الطريقة ١ :

أعتبر أن H تعبر عن « الصورة » و T تعبر عن « الكتابة » وافترض أن الرمز HTH ، على سبيل المثال
يعنى ظهور الصورة فى الرمية الأولى ، الكتابة فى الرمية الثانية ثم الصورة فى الرمية الثالثة .

بما أن هناك أحد الشيتين (الصورة أو الكتابة) يمكن حدوثهما في كل رمية ، فإن هناك $2(2)(2) = 8$ نتيجة ممكنة وهي

HHH, HHT, HTH, HTT, TTH, THT, TTT

بما أن فرص هذه الامكانيات متساوية في الظهور ، فإن احتمال كل هو $1/8$.

(أ) 3 صور (HHH) تحدث مرة واحدة فقط ، وبهذا فإن احتمال ظهور ثلاث صور هو $1/8$.

(ب) 2 صورة وكتابة تحدث ثلاث مرات (HHT, HTH, TTH) وبهذا فإن

$$\Pr \{ 2 \text{ صورة وكتابة} \} = 3/8$$

(ج) 2 كتابة وصورة تحدث ثلاث مرات (HTT و TTH و THT) إذن $\Pr \{ 2 \text{ كتابة وصورة} \} = 3/8$

(د) 3 كتابة (TTT) تحدث مرة واحدة فقط ، إذن $\Pr \{ 3 \text{ كتابة} \} = 1/8$.

الطريقة ٢ : (باستخدام القانون)

$$\Pr \{ 3 \text{ صور} \} = {}^nC_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = (1) \left(\frac{1}{2}\right)(1) = \frac{1}{8} \quad (أ)$$

$$\Pr \{ 2 \text{ صورة وكتابة} \} = {}^nC_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = (3) \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} \quad (ب)$$

$$\Pr \{ 1 \text{ صورة و 2 كتابة} \} = {}^nC_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (3) \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} \quad (ج)$$

$$\Pr \{ 3 \text{ كتابة} \} = {}^nC_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = (1)(1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \quad (د)$$

كذلك يمكن متابعة الحل كما في الفصن السادس . المسألة ٦-١٠ .

٣-٧ في خمس رميات لزهرة طاولة غير متحيزة أوجد احتمال أن يظهر الرقم 3

(أ) صفر من المرات (عدم ظهوره طلاقاً) (ب) مرة واحدة (ج) مرتان

(د) ثلاث مرات (هـ) أربع مرات (و) خمس مرات .

الحل

احتمال ظهور 3 في رمية واحدة $p = 1/6$

احتمال عدم ظهور 3 في رمية واحدة $q = 1 - p = 5/6$. إذن

$$\Pr \{ 3 \text{ ظهور 3 طلاقاً} \} = {}^nC_0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = (1)(1)\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776} \quad (أ)$$

$$\Pr \{ 1 \text{ ظهور 3 مرة واحدة} \} = {}^nC_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = (5) \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{3125}{7776} \quad (ب)$$

$$\Pr \{ 3 \text{ ظهور 3 مرتان} \} = {}^nC_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = (10) \left(\frac{1}{36}\right)\left(\frac{125}{216}\right) = \frac{625}{3888} \quad (ج)$$

$$\Pr \{ 3 \text{ ظهور 3 ثلاث مرات} \} = {}^nC_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = (10) \left(\frac{1}{216}\right)\left(\frac{25}{36}\right) = \frac{125}{3888} \quad (د)$$

$$\Pr (3 \text{ اربع مرات }) = ,C_4 (\frac{1}{8})^4 (\frac{5}{8})^1 = (5)(\frac{1}{128}) (\frac{5}{8}) = \frac{25}{7776} \quad (\Delta)$$

$$\text{Pr (3 ظہور 3 خس مرات)} = {}_5C_3 \left(\frac{1}{8}\right)^3 \left(\frac{5}{8}\right)^0 = (1) \left(\frac{1}{7776}\right) (1) = \frac{1}{7776} \quad (و)$$

لاحظ أن هذه الاحتمالات تمثل حدود مفكوك ذي الحدين

$$\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right)^5 = \left(\frac{5}{6}\right)^5 + {}_5C_1\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right) + {}_5C_2\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^2 + {}_5C_3\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^3 + {}_5C_4\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^4 + \left(\frac{1}{6}\right)^5$$

٧ - اكتب مفكوك ذي الحدين $(q + p)^4$ (١) ، $(q + p)^6$ (ب) ،

الحل :

$$\begin{aligned}(q+p)^4 &= q^4 + 4C_1 q^3 p + 6C_2 q^2 p^2 + 4C_3 q p^3 + p^4 \\ &= q^4 + 4q^3 p + 6q^2 p^2 + 4qp^3 + p^4\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}(q + p)^6 &= q^6 + {}^6C_1 q^5 p + {}^6C_2 q^4 p^2 + {}^6C_3 q^3 p^3 + {}^6C_4 q^2 p^4 + {}^6C_5 q p^5 + p^6 \quad (\text{ب}) \\ &= q^6 + 6q^5 p + 15q^4 p^2 + 20q^3 p^3 + 15q^2 p^4 + 6q p^5 + p^6\end{aligned}$$

المعاملات 1, 4, 6, 4, 1 تسمى معاملات ذى الحدين المقابلة

لـ $N = 4$ وكذلك 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1 تسمى معاملات في الجدين

المقابلة لـ $N = 6$. بكتابة هذه المعاملات لقيم $N = 0, 1, 2, 3, \dots$

کما هو موضح بالشکل ، نحصل على تراتیب تسمى بمثلث باسکال . لاحظ أن

الرقم الأول والأخير في كل صف هو الرقم ١ وأي رقم آخر يمكن الحصول

عليه بجمع الرقمين إلى يمين وإلى يسار هذا الرقم في الصف السابق .

v- هـ في عائلة لها 4 أطفال أوجد احتمال أن يكون بها . (1) ولد على الأقل

(ب) ولد و بنت علی الأقل .

افترض أن احتمال ولادة ولد هو $\frac{1}{2}$

الحل :

$$\Pr (J,) = C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

$$Pr(2 \text{ heads, } 1 \text{ tail}) = {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{4}$$

(1)

$$\text{Pr (ولدين)} = C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$\Pr (Y=4) = C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}$$

$$\Pr(\text{ولد على الأقل}) = \Pr(\text{ولد}) + \Pr(\text{ولدين}) + \Pr(\text{3 أولاد}) + \Pr(\text{4 أولاد})$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{13}{16}$$

طريقة اخرى : $\Pr(\text{عدم وجود ولد}) = 1 - \Pr(\text{ولد على الأقل}) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

(ب) $\Pr(\text{عدم وجود بنت}) = 1 - \Pr(\text{وجود ولد}) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

٧ - ٦ من 2000 عائلة بكل منها 4 أطفال ، ما هو العدد المتوقع للعائلات التي بها (١) على الأقل ولد واحد (ب) ولدان (ج) بنت أو بنتان (د) لا يوجد بها بنات ؟ أرجع إلى المسألة ٧ - ٥ (١)

الحل :

$$(١) \text{ العدد المتوقع للعائلات التي يوجد بها ولد على الأقل } = 2000 \left(\frac{15}{16} \right) = 1875$$

$$(ب) \text{ العدد المتوقع للعائلات التي يوجد بها ولدان } = 2000 \left(\frac{9}{16} \right) = 1125$$

$$\begin{aligned} (ج) \text{ بنت أو بنتان } &= \Pr \{ \text{بنت} \} + \Pr \{ \text{بنتان} \} \\ &= \Pr \{ \text{ولد} \} + \Pr \{ \text{ولدان} \} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{9}{16} = \frac{13}{16} \end{aligned}$$

$$\text{العدد المتوقع للعائلات التي يوجد بها بنت أو بنتان} = 2000 \left(\frac{13}{16} \right) = 1625$$

$$(د) \text{ العدد المتوقع للعائلات التي لا يوجد بها بنات } = 2000 \left(\frac{1}{16} \right) = 125$$

٧ - ٧ إذا كان 20 % من إنتاج آلة لصناعة المسامير هو إنتاج تالف ، أوجد احتمال أن يكون بين 4 مسامير اختيرت عشوائيا (١) 1 (ب) 0 (ج) على الأكثر مسامير تالفة ، ستكون تالفة .

الحل :

$$\text{احتمال وجود مسامير تالفة هو } p = 0.2 \text{ ، ووجود مسامير غير تالفة } q = 1 - p = 0.8$$

$$(١) \Pr \{ \text{مسامير تالفة من 4 مسامير} \} = {}_4C_1 (0.2)^1 (0.8)^3 = 0.4096$$

$$(ب) \Pr \{ \text{عدم وجود أي مسامير تالفة} \} = {}_4C_0 (0.2)^0 (0.8)^4 = 0.4096$$

$$(ج) \Pr \{ \text{وجود مساميرين تالفين} \} = {}_4C_2 (0.2)^2 (0.8)^2 = 0.1536$$

إذن

$$\begin{aligned} \Pr \{ \text{وجود مساميرين تالفين على الأكثر} \} &= \Pr \{ 0 \text{ مسامير تالفة} \} + \Pr \{ 1 \text{ مسامير تالفة} \} \\ &\quad + \Pr \{ 2 \text{ مسامير تالفة} \} \\ &= 0.4096 + 0.4096 + 0.1536 + 0.0272 = 1.0000 \end{aligned}$$

٧ - ٨ إذا كان احتمال أن يتخرج طالب التحق بكلية هو 0.4 . حدد احتمال أن يكون من بين 5 طلبة (١) لا يتخرج أحد (ب) يتخرج واحد على الأقل .

الحل :

$$(١) \Pr \{ \text{لا يتخرج أحد} \} = {}_5C_0 (0.4)^0 (0.6)^5 = 0.07776 \text{ ، أو حوالي } 0.08$$

$$(ب) \Pr \{ \text{يتخرج واحد} \} = {}_5C_1 (0.4)^1 (0.6)^4 = 0.2592 \text{ ، أو حوالي } 0.26$$

$$(ج) \Pr \{ \text{أن لا يتخرج أحد} \} = 1 - \Pr \{ \text{أن يتخرج واحد على الأقل} \} = 1 - 0.2592 = 0.7408 \text{ ، أو حوالي } 0.74$$

٧-٩ ما هو احتمال الحصول على ما مجموعه 9 (١) مرتان ، (ب) على الأقل مرتان في 6 رميات ، لزهرة طاولة ؟

الحل :

كل من الـ 6 طرق التي يمكن أن تقع بها الزهرة الأولى يمكن أن ترتبط بكل من الـ 6 طرق التي يمكن أن تقع بها الزهرة الثانية ، وبهذا يكون هناك $6 \cdot 6 = 36$ طريقة يمكن أن تقع بها الزهرتان . حيث هناك : 1 في الزهرة الأولى ، 1 في الزهرة الثانية ، 1 في الزهر الأولى و 2 في الزهرة الثانية وهكذا ... ، ويرمز لها (1, 2) و (1, 1) من هذه الـ 36 طريقة ، وكلها لها نفس الفرصة في الظهور إذا كانت الزهرتان متوازنتان ، ما مجموعه 9 يحدث في أربع حالات : (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3) . وبهذا يكون احتمال ظهور ما مجموعه 9 في رمية واحدة لزهرتين هو $p = 4/36 = 1/9$ واحتمال عدم الحصول على ما مجموعه 9 في رمية زهرتين $q = 1 - p = 8/9$

$$\Pr (\text{اثنتين 9 في ست رميات}) = {}_6C_2 \left(\frac{1}{9}\right)^2 \left(\frac{8}{9}\right)^4 = \frac{61440}{531441} \quad (1)$$

$$\Pr \{ \text{خمس 9} \} + \Pr \{ \text{أربعة 9} \} + \Pr \{ \text{ثلاثة 9} \} + \Pr \{ \text{اثنتين 9} \} = \Pr \{ \text{وجود اثنتين 9 على الأقل} \}$$

$$\Pr \{ \text{سنة 9} \}$$

$$= {}_6C_2 \left(\frac{1}{9}\right)^2 \left(\frac{8}{9}\right)^4 + {}_6C_3 \left(\frac{1}{9}\right)^3 \left(\frac{8}{9}\right)^3 + {}_6C_4 \left(\frac{1}{9}\right)^4 \left(\frac{8}{9}\right)^2 + {}_6C_5 \left(\frac{1}{9}\right)^5 \left(\frac{8}{9}\right) + {}_6C_6 \left(\frac{1}{9}\right)^6$$

$$= \frac{61440}{531441} + \frac{10240}{531441} + \frac{960}{531441} + \frac{48}{531441} + \frac{1}{531441} + \frac{72689}{531441}$$

طريقة أخرى :

$$\Pr \{ \text{اثنتين 9 على الأقل} \} = 1 - \Pr \{ \text{عدم وجود 9} \} - \Pr \{ \text{واحد 9} \}$$

$$= 1 - {}_6C_0 \left(\frac{1}{9}\right)^0 \left(\frac{8}{9}\right)^6 - {}_6C_1 \left(\frac{1}{9}\right)^1 \left(\frac{8}{9}\right)^5 = \frac{72689}{531441}$$

$$p(X) = {}_N C_X p^X q^{N-X} \quad \text{حيث} \quad \sum_{X=0}^N X^2 p(X) \quad (ب) \quad \sum_{X=0}^N X p(X) \quad (١) \quad \text{١٠-٧ احب}$$

الحل :

$$\sum_{X=0}^N X p(X) = \sum_{X=1}^N X \frac{N!}{X! (N-X)!} p^X q^{N-X} = N p \sum_{X=1}^N \frac{(N-1)!}{(X-1)! (N-X)!} p^{X-1} q^{N-X} \quad (1)$$

$$= N p (q + p)^{N-1} = N p$$

ما أن $q + p = 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^N X^2 p(X) &= \sum_{x=1}^N X^2 \frac{N!}{X! (N-X)!} p^x q^{N-x} = \sum_{x=1}^N [X(X-1) + X] \frac{N!}{X! (N-X)!} p^x q^{N-x} \\
&= \sum_{x=1}^N X(X-1) \frac{N!}{X! (N-X)!} p^x q^{N-x} + \sum_{x=1}^N X \frac{N!}{X! (N-X)!} p^x q^{N-x} \\
&= N(N-1)p^2 \sum_{x=2}^N \frac{(N-2)!}{(x-2)! (N-x)!} p^{x-2} q^{N-x} + Np = N(N-1)p^2 (q+p)^{N-2} + Np \quad (\text{ب}) \\
&= N(N-1)p^2 + Np
\end{aligned}$$

ملحوظة : النتيجة في (١) و (ب) هي القيمة المتوقعة لكل من X^2 و X ويرمز لها $E(X^2)$ و $E(X)$ على الترتيب (أنظر الفصل السادس).

١١-٧ إذا كان متغير له توزيع ذي الحدين ، أوجد (١) وسطه μ (ب) تباينه σ^2

الحل :

$$\mu = \sum_{x=0}^N X p(X) = Np \quad (\text{١})$$

من المسألة ١٠-٧ (١)

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sum_{x=0}^N (X - \mu)^2 p(X) = \sum_{x=0}^N (X^2 - 2\mu X + \mu^2) p(X) = \sum_{x=0}^N X^2 p(X) - 2\mu \sum_{x=0}^N X p(X) + \mu^2 \sum_{x=0}^N p(X) \quad (\text{ب}) \\
&= N(N-1)p^2 + Np - 2(Np)(Np) + (Np)^2(1) = Np - Np^2 = Np(1-p) = Npq
\end{aligned}$$

باستخدام $\mu = Np$ ونتيجة المسألة ١٠-٧ فإننا نستنتج أن الانحراف المعياري للمتغير الذي يتوزع كتوزيع ذي الحدين هو $\sigma = \sqrt{Npq}$.

طريقة أخرى : $E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - [E(X)]^2 = N(N-1)p^2 + Np - N^2p^2 = Np - Np^2 = Npq$
من المسألة ٦-١٢ (١) الفصل السادس .

١٢-٧ إذا كان احتمال وجود مسبار معيب هو 0.1 أوجد

(١) الوسط (ب) الانحراف المعياري ، لتوزيع المسامير المعيبة من مجموع 400 مسبار .

$$(١) \quad \text{الوسط} = Np = 400(0.1) = 40$$

$$(ب) \quad Npq = 400(0.1)(0.9) = 36 \quad \text{التباين وهذا فإن الانحراف المعياري} = \sqrt{36} = 6$$

١٣-٧ أوجد باستخدام المزوم . معاملات (١) الالتواء (ب) التفرطح للتوزيع في المسألة ٧-١٢

الحل

$$(١) \quad \text{معامل الالتواء باستخدام المزوم} = \frac{q-p}{\sqrt{Npq}} = \frac{0.9-0.1}{6} = 0.133$$

وبما أن هذا المقدار موجب فإن التوزيع ملتو إلى اليمين

$$(ب) \quad 3 + \frac{1 - 6pq}{Npq} = 3 + \frac{1 - 6(0.1)(0.9)}{36} = 3.01$$

التوزيع مدبب بشكل بسيط بالمقارنة بالتوزيع الطبيعي (له قمة أعلى نسبياً ، أنظر الفصل الخامس)

التوزيع الطبيعي :

١٤-٧ في امتحان نهائي في الرياضة كان المتوسط 72 والانحراف المعياري 15 . أوجد الدرجات المعيارية (الدرجات مبررا عنها بوحدات من الانحراف المعياري) للطلبة الحاصلين على درجات (أ) 60 (ب) 93 (ج) 72

الحل :

$$(أ) \quad z = \frac{X - \bar{X}}{s} = \frac{60 - 72}{15} = -0.8$$

$$(ب) \quad z = \frac{X - \bar{X}}{s} = \frac{93 - 72}{15} = 1.4$$

$$(ج) \quad z = \frac{X - \bar{X}}{s} = \frac{72 - 72}{15} = 0$$

١٥-٧ بالرجوع إلى المسألة ١٤-٧ أوجد الدرجات المقابلة للدرجات المعيارية (أ) 1 - (ب) 1.6

الحل :

$$(أ) \quad X = \bar{X} + zs = 72 + (-1)(15) = 57$$

$$(ب) \quad X = \bar{X} + zs = 72 + (1.6)(15) = 96$$

١٦-٧ أخبر طالبان بأنهما قد حصلا على درجات معيارية 0.4 - ، 0.8 في امتحان للقدرات في اللغة الانجليزية . فإذا كانت درجتهما هي 64 و 88 على الترتيب ، أوجد الوسط والانحراف المعياري لدرجات الامتحان .

الحل :

$$\text{باستخدام المعادلة } X = \bar{X} + 2s \text{ للطالب الأول}$$

$$(١) \quad 88 = \bar{X} + 0.8s$$

$$(٢) \quad 64 = \bar{X} - 0.4s \text{ وباستخدام الطالب الثاني}$$

وبحل (١) ، (٢) ، معاً نحصل على : الوسط $X = 72$ والانحراف المعياري $s = 20$.

١٧-٧ أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي في كل من الحالات (أ) إلى (ز) التالية . باستخدام الجدول في صفحة ٥٢٢

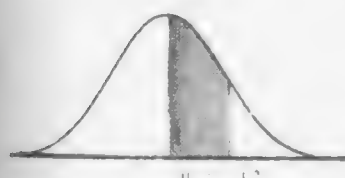
$$(أ) \quad \text{بين } z = 0 \text{ و } z = 1.2$$

في الجدول صفحة ٥٢٨ . أبدأ بالعمود المعنون z حتى تصل إلى الرقم 1.2

ثم اتجه إلى اليمين إلى العمود المعنوي 0

النتيجة 0.3849 هي المساحة المطلوبة وتمثل احتمال أن تقع z بين

صفر و 1.2 ، ويرمز لها بالتميز $\Pr\{0 \leq z \leq 1.2\}$



شكل ٢-٧ (أ)

(ب) بين $z = -0.68$ و $z = 0$.

المساحة المطلوبة = المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.68$ (بالتماثل)
للمصول على المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.68$. انجبه إلى أسفل
في العمود z الممنون حتى تصل إلى الرقم 0.6 ثم انجبه إلى اليمين إلى
العمود الممنون 8 .

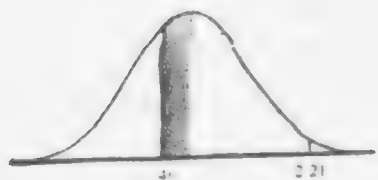


شكل ٧-٢ (ب)

النتيجة 0.2517 هي المساحة المطلوبة وتمثل احتمال أن تقع بين
 $z = -0.68$ و 0 ، ويرمز لها بالتعبير $\Pr \{ -0.68 \leq z \leq 0 \}$

(ج) بين $z = -0.46$ و $z = 2.21$.

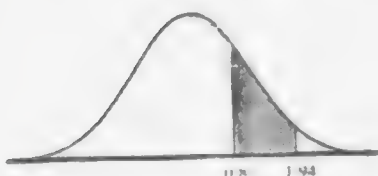
المساحة المطلوبة = (المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.46$)
+ (المساحة بين $z = 0$ و $z = 2.21$)
 $0.1772 + 0.4864 = 0.6636$



شكل ٧-٢ (ج)

(د) بين $z = 0.81$ و $z = 1.94$

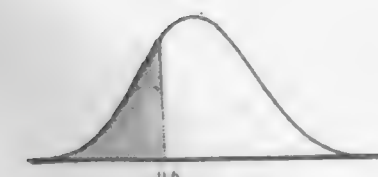
المساحة المطلوبة = (المساحة بين $z = 0$ و $z = 1.94$)
- (المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.81$)
 $0.4738 - 0.2910 = 0.1828$



شكل ٧-٢ (د)

(هـ) إلى يسار $z = 0.6$

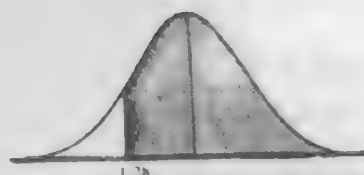
المساحة المطلوبة = (المساحة إلى يسار $z = 0$)
- (المساحة بين $z = -0.6$ و $z = 0$)
= (المساحة إلى يسار $z = 0$)
- (المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.6$)
 $0.2742 = 0.5 - 0.2258$



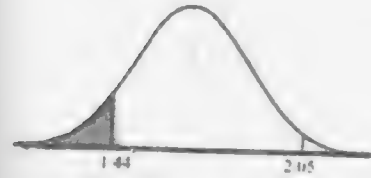
شكل ٧-٢ (هـ)

(و) إلى يمين $z = 1.28$

المساحة المطلوبة = (المساحة بين $z = -1.28$ و $z = 0$)
+ (المساحة إلى يمين $z = 0$)
 $0.8997 = 0.3997 + 0.5$
وهذه مثل $\Pr \{ z \geq -1.28 \}$



شكل ٧-٢ (و)



شكل ٧-٢ (ز)

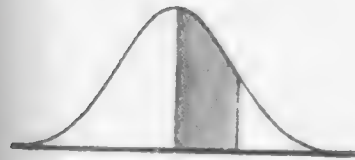
(ز) إلى يمين $z = 2.05$ وإلى يسار $z = -1.44$

المساحة المطلوبة = المساحة الكلية - (المساحة بين $z = 1.44$ و $z = 0$) - (المساحة بين $z = 0$ و $z = 2.05$) .

$$= 1 - 0.4251 - 0.4798$$

$$1 - 0.9049 = 0.0951$$

١٨-٧ حدد قيمة أو قيم z في كل من الحالات من (أ) إلى (ج) ، حيث المساحة تمثل تلك التي تقع تحت المنحنى الطبيعي .

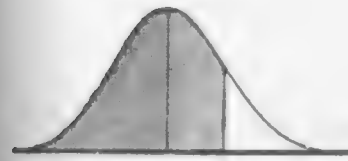


شكل ٧-٢ (أ)

(أ) إذا كانت المساحة بين 0 و z هي 0.3770

في الملحق 11 صفحة ٥٣٣ ، القيمة 0.3770 تتحدد إلى اليمين في الصف المعنون 1.1 وتحت العمود المعنوي 0.6 . وهذا تكون قيمة z المطلوبة هي 1.16 .

ومن التماثل $z = -1.16$ قيمة أخرى . وهذا فإن $z = \pm 1.16$



شكل ٧-٢ (ب)

(ب) المساحة إلى يسار z هي 0.8621

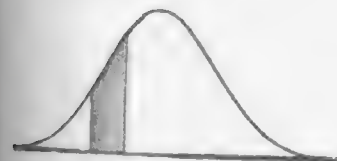
بما أن المساحة أكبر من 0.5 ، فإن z يجب أن تكون موجبة .

المساحة بين 0 و $z = 0.8621 - 0.5 = 0.3621$ ومنها $z = 1.09$

(ج) المساحة بين -1.5 و z هي 0.0217

إذا كانت z موجبة فإن المساحة يجب أن تكون أكبر من المساحة بين -1.5 و 0 ، وهي 0.4332 ، وهذا فإن z يجب أن تكون سالبة .

الحالة ١ : z سالبة ولكن إلى يمين -1.5



شكل ٧-٢ (ج)

المساحة بين -1.5 و z

$$= (\text{المساحة بين } -1.5 \text{ و } 0) - (\text{المساحة بين } 0 \text{ و } z)$$

$$0.0217 = 0.4322 - (\text{المساحة بين } 0 \text{ و } z)$$

إذن المساحة بين 0 و z

$$= 0.4332 - 0.0217 = 0.4115$$

ومنها $z = -1.35$

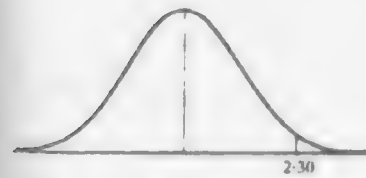
(ب) الأوراق التي طولها أكبر من 185 mm يجب أن يكون مقاييسها على

الأقل 185.5 mm

$$(185.5 - 151) / 15 = 2.30 = \text{معبرا عنها بوحدات معيارية}$$

نسبة الأوراق المطلوبة = (المساحة إلى يمين $z = 2.30$)

$$= (\text{المساحة إلى يمين } z = 0) - (\text{المساحة بين } z = 0 \text{ و } z = 2.30) = 0.5 - 0.4893 = 0.0107$$



شكل ٧ - ٤ (ب)

وبهذا فإن عدد الأوراق التي تكون أطولها أكبر من 185 mm هو $500(0.0107) = 5$.

إذا كانت L تمثل طول ورقة اختيرت عشوائيا ، فإنه يمكن تلخيص النتائج السابقة باستخدام الاحتمال بكتابة .

$$\Pr\{L \geq 185.5\} = 0.0107 \quad \bullet \quad \Pr\{119.5 \leq L \leq 155.5\} = 0.6000$$

٧-٢١ حدد عدد الأوراق في المسألة السابقة التي طولها (أ) أقل من 128 mm (ب) 128 mm ، (ج) أقل من أو يساوي 128 mm .

الحل :

(أ) الأوراق التي يكون طولها أقل من 128 mm يجب أن يكون

مقياسها أقل من 127.5 mm

$$(127.5 - 151) / 15 = -1.57 = \text{معبرا عنها بوحدات قياسية}$$

نسبة الأوراق المطلوبة = (المساحة على يسار $z = -1.57$)

$$= (\text{المساحة على يسار } z = 0) - (\text{المساحة بين } z = -1.57 \text{ و } z = 0) = 0.5 - 0.4418 = 0.0582$$



شكل ٧ - ٥ (أ)

وبهذا فإن عدد الأوراق التي يكون طولها أقل من 128 mm هو $500(0.0582) = 29$.

(ب) الأوراق التي تقاس 128 mm تقع أطولها بين

127.5 mm و 128.5 mm . أنظر الشكل ٧ - ٥ (ب) أدناه .

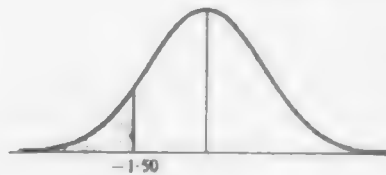
$$127.5 \text{ mm معبرا عنها بوحدات معيارية} = (127.5 - 151) / 15 = -1.57$$

$$128.5 \text{ mm معبرا عنها بوحدات معيارية} = (128.5 - 151) / 15 = -1.50$$

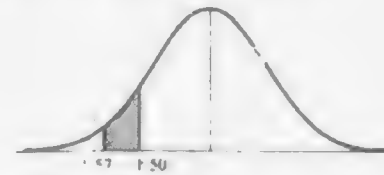
نسبة الأوراق المطلوبة = (المساحة بين $z = -1.50$ و $z = -1.57$)

$$= (\text{المساحة بين } z = -1.57 \text{ و } z = 0) - (\text{المساحة بين } z = -1.50 \text{ و } z = 0) = 0.4418 - 0.4332 = 0.0086$$

وبهذا فإن عدد الأوراق التي لها 128 mm هو $500 (0.0086) = 4$



شكل ٧-٥ (ج)



شكل ٧-٥ (ب)

(ج) الأوراق التي يكون طولها أقل من أو يساوي 128 mm يجب أن يكون مقياسها أقل من 128.5 mm .
أنظر الشكل ٧-٥ (ج) .

$$128.5 \text{ mm معبرا عنها بوحدات معيارية} = -1.50 = (128.5 - 151)/15$$

$$\text{نسبة الأوراق المطلوبة} = (\text{المساحة إلى يسار } z = -1.50)$$

$$(\text{المساحة إلى يسار } z = 0) - (\text{المساحة بين } z = -1.50 \text{ و } z = 0)$$

$$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$$

وبهذا فإن عدد الأوراق التي لها طول 128 mm أو أقل هو $500 (0.0668) = 33$

طريقة أخرى : باستخدام الأجزاء (أ) ، (ب)

عدد الأوراق التي لها طول أقل من أو يساوي 128 mm يساوي (عدد الأوراق التي طولها أقل من 128 mm)

$$+ (\text{عدد الأوراق التي طولها 128 mm}) = 29 + 4 = 33$$

٢٢-٧ كانت الدرجات في امتحان مفاجئ قصير في البيولوجي 0, 1, 2, ..., 10 نقطة ، معتمدا على عدد الاجابات الصحيحة من 10 من أسئلة . وكان متوسط الدرجات 6.7 وانحرافها المعياري هو 1.2 . إذا افترضنا أن الدرجات تتوزع حسب التوزيع الطبيعي ، حدد (أ) النسبة المئوية لعدد الطلبة الذين سجلوا 6 نقط (ب) أكبر درجة سجلها أقل 10% من طلبة الفصل (ج) أقل درجة سجلها أحسن 10% من طلبة الفصل .

الحل :

(أ) لاستخدام التوزيع الطبيعي لبيانات متقطعة ، نجد أنه من الضروري معالجة هذه البيانات كما لو كانت بيانات متصلة . وهذا فإن تسجيل 6 نقط تعتبر كما لو كانت من 5.5 إلى 6.5 نقطة . أنظر الشكل

٧-٦ (أ) .

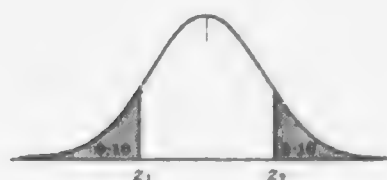
$$5.5 \text{ كوحادات معيارية} = -1.0 = (5.5 - 6.7)/1.2$$

$$6.5 \text{ كوحادات معيارية} = -0.17 = (6.5 - 6.7)/1.2$$

$$\text{النسبة المطلوبة} = (\text{المساحة بين } z = -1 \text{ و } z = -0.17)$$

$$= (\text{المساحة بين } z = -1 \text{ و } z = 0) - (\text{المساحة بين } z = -0.17 \text{ و } z = 0)$$

$$= 0.3413 - 0.0675 = 0.2738 = 27\%$$



شكل ٦-٧ (ب)



شكل ٦-٧ (أ)

(ب) اعتبر أن X_1 هي الدرجة الكبرى المطلوبة و z_1 هي الدرجة معبراً عنها بوحدات معيارية .
من الشكل ٦-٧ (ب) فإن المساحة إلى يسار z_1 هي $0.10 = 10\%$ وهذا فإن (المساحة بين z_1 و 0)
 $= 0.40$ ، و $z_1 = -1.28$ (بشكل قريب جداً) .

إذن $z_1 = (X_1 - 6.7)/1.2 = 1.28$ و $X_1 = 5.2$ أو $X_1 = 5$ إلى أقرب رقم صحيح .

(ج) اعتبر أن X_2 هي الدرجة الصغرى المطلوبة و z_2 هي الدرجة معبراً عنها بوحدات معيارية .
من (ب) ، وبالتأكل ، $z_2 = 1.28$ ، إذن $(X_2 - 6.7)/1.2 = 1.28$ و $X_2 = 8.2$ أو $X_2 = 8$ إلى أقرب رقم صحيح .

٧ - ٢٢ متوسط القطر الداخل في عينة من 200 جلبة مستديرة من إنتاج آلة معينة هو 5.02 mm وانحرافها المعياري 0.05 mm والهدف من استخدام هذه الجلب هو السماح بانحراف في القطر أقصاه من 4.96 إلى 5.08 mm ، وفيما عداً ذلك تعتبر الجلبة معينة . أوجد النسبة المئوية للجلب التالفة في إنتاج هذه الآلة ، مفترضاً أن الأقطار تتوزع توزيعاً طبيعياً .

الحل :

$$4.96 \text{ معبراً عنها بوحدات لمعيارية} = -1.2 = (4.96 - 5.02)/0.05$$

$$5.08 \text{ معبراً عنها بوحدات معيارية} = 1.2 = (5.08 - 5.02)/0.05$$

نسبة الجلب غير التالفة

(المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين $z = -1.2$ و $z = 1.2$)

= (ضعف المساحة بين $z = 0$ و $z = 1.2$)

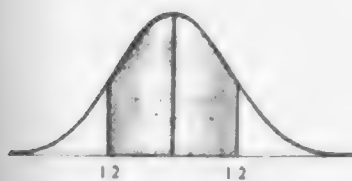
$$= 2(0.3849) = 0.7698$$

أو 77%

وهذا فإن نسبة الجلب التالفة = $100\% - 77\% = 23\%$

لاحظ أنه لو اعتبرنا أن الفترة من 4.96 إلى 5.08 mm تمثل فعلاً الأقطار من 4.955 إلى 5.085 mm

فإن النتيجة السابقة تعدل تعديلاً طفيفاً . وعلى أية حال فإن عشرين عشرين فإن النتيجة لن تختلف .



شكل ٧ - ٧

التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذى الحدين :

٧-٢٤ أوجد احتمال الحصول على ما بين 3 و 6 صورة (6 متضمنة في الفترة) في 10 رميات لعملة متوازنة باستخدام

(أ) توزيع ذى الحدين ، (ب) التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذى الحدين

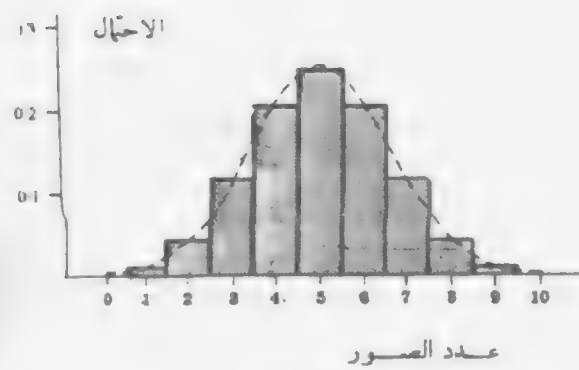
الحل :

$$\Pr \{ \text{صور 3} \} = {}_{10}C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{120}{2^{10}} \quad \Pr \{ \text{صور 5} \} = {}_{10}C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{252}{2^{10}}$$

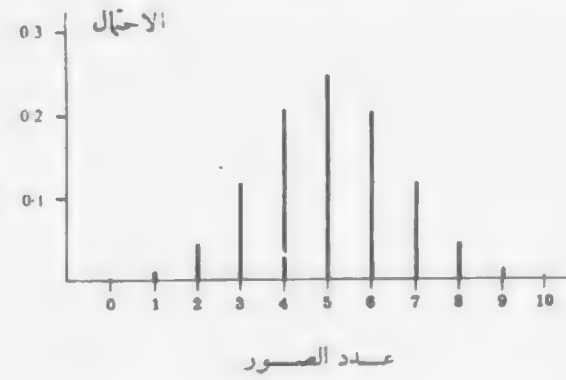
(أ)

$$\Pr \{ \text{صور 4} \} = {}_{10}C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{210}{2^{10}} \quad \Pr \{ \text{صور 6} \} = {}_{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{210}{2^{10}}$$

$$\Pr \{ \text{ما بين 3 و 6 صور بما فيها 6} \} = \frac{120}{2^{10}} + \frac{210}{2^{10}} + \frac{252}{2^{10}} + \frac{210}{2^{10}} = \frac{892}{2^{10}} = 0.7734 \quad \text{إذن}$$



شكل ٧ - ٨ (ب)



شكل ٧ - ٨ (أ)

(ب) توزيع الاحتمال لعدد الصور في 10 رميات لعملة موضح بيانياً في الأشكال ٨ - ٧ (أ) و ٨ - ٧ (ب) أعلاه ،

حيث الشكل ٨ - ٧ (ب) تعامل البيانات كما لو كانت متصلة . والاحتمال المطلوب هو مجموع مساحات المستطيلات

المظلة بالشكل ٨ - ٧ (ب) ويمكن تقريبها بالمساحة تحت المنحنى الطبيعي المقابل والمرسوم بخطوط متقطعة .

باعتبار البيانات متصلة ، فإنه يترتب على ذلك اعتبار من 3 إلى 6 صور مثل من 2.5 إلى 6.5 صورة . كذلك فإن

$$\mu = Np = 10\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \text{ and } \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(10)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = 1.58.$$

$$\text{والآن } 2.5 \text{ معبراً عنها بوحدات معيارية } = -1.58 = (2.5 - 5)/1.58$$

$$\text{و } 6.5 \text{ معبراً عنها بوحدات معيارية } = 0.95 = (6.5 - 5)/1.58$$

$$\text{الاحتمال المطلوب} = (\text{المساحة بين } z = -1.58 \text{ و } z = 0.95)$$

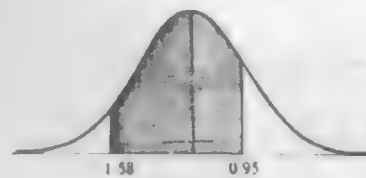
$$= (\text{المساحة بين } z = -1.58 \text{ و } z = 0) + (\text{المساحة بين } z = 0 \text{ و } z = 0.95)$$

$$= 0.4429 + 0.3289 = 0.7718$$

والذي يقارن بشكل جيد مع القيمة الحقيقية 0.7734 الذي حصلنا عليه

في الجزء (أ) .

وتزداد درجة الدقة لقيم N الأكبر .



شكل ٧ - ٩

٧-٢٥ عملة متوازنة قذفت 500 مرة . أوجد احتمال أن عدد الصور لن يختلف عن 250
(أ) بأكثر من 10 (ب) بأكثر من 30

الحل :

$$\mu = Np = (500)(\frac{1}{2}) = 250 \quad \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(500)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} = 11.18$$

(أ) المطلوب هو احتمال أن يكون عدد الصور يقع بين 240 و 260 أو ، إذا اعتبرنا أن البيانات متصلة ، يقع بين 239.5 و 260.5 .

$$239.5 \text{ معبراً عنها بوحدات معيارية } = -0.94 = (239.5 - 250)/11.18$$

$$260.5 \text{ معبراً عنها بوحدات معيارية } = 0.94$$

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين $z = -0.94$ و $z = 0.94$)

$$= 2(0.3264) = 0.6528 = (z = 0.94 \text{ و } z = 0 \text{ ضعف المساحة بين } z = 0.94 \text{ و } z = 0)$$

(ب) الاحتمال المطلوب هو أن يقع عدد الصور بين 220 و 280 أو ، إذا اعتبرنا أن البيانات متصلة ، بين 219.5 و 280.5

$$219.5 \text{ معبراً عنها بوحدات معيارية } = -2.73 = (219.5 - 250)/11.18$$

$$280.5 \text{ معبراً عنها بوحدات معيارية } = 2.73$$

الاحتمال المطلوب = (ضعف المساحة بين $z = -2.73$ و $z = 0$)

$$2(0.4968) = 0.9936$$

ومن هذا يتضح أنه يمكن أن تكون على درجة كبيرة من الثقة أن عدد الصور لن يختلف عن القيمة المتوقعة (250) بأكثر من 30 . أما إذا حدث أن كان عدد الصور المعنى هو 280 . فإننا نعتقد اعتقاداً قوياً بأن العملة متحيزة أى مشوشة .

٧-٢٦ قذفت زهرة 120 مرة . أوجد احتمال أن يظهر الوجه 4 :

(أ) 18 مرة أو أقل (ب) 14 مرة أو أقل . مفترضاً أن الزهرة غير منحيرة .

الحل :

احتمال ظهور الوجه الذى عليه الرقم 4 هو $p = \frac{1}{6}$ ، واحتمال عدم ظهوره هو $q = \frac{5}{6}$

(أ) الاحتمال المطلوب هو أن يظهر الوجه 4 بين 0 و 18 مرة . وهذا بالضبط يساوى

$${}_{120}C_{18}(\frac{1}{6})^{18}(\frac{5}{6})^{102} + {}_{120}C_{17}(\frac{1}{6})^{17}(\frac{5}{6})^{103} + \dots + {}_{120}C_0(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^{120}$$

وبما أن العمل المطلوب فى الحساب عمل شاق ، فإننا نستخدم التقريب باستخدام المنحنى الطبيعي .

وإذا اعتبرنا أن البيانات مصصلة ، ينتج عن ذلك أن ظهور الوجه 4 بين 0 إلى 18 مرة يمكن اعتباره مثل ظهور هذا الوجه بين 0.5 — إلى 18.5 . كذلك

$$\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(120)(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})} = 4.08 \quad \text{و} \quad \mu = Np = 120(\frac{1}{6}) = 20$$

$$\text{إذن } -0.5 \text{ معبراً عنها بوحدات معيارية} = -5.02 = (-0.5 - 20)/4.08$$

$$18.5 \text{ معبراً عنها بوحدات معيارية} = -0.37$$

$$\text{الاحتمال المطلوب} = (\text{المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين } z = -5.02 \text{ و } z = -0.37)$$

$$= (\text{المساحة بين } z = 0 \text{ و } z = -5.02) - (\text{المساحة بين } z = 0 \text{ و } z = -0.37)$$

$$0.5 - 0.1443 = 0.3557$$

(ب) خطوط الحل كما في (أ) ، مستخدمين 14 بدلاً من 18

$$\text{إذن } -0.5 \text{ بوحدات معيارية} = 5.02 ، 14.5 \text{ بوحدات معيارية} = 1.35 = (14.5 - 20)/4.08$$

$$\text{الاحتمال المطلوب} = (\text{المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين } z = -5.02 \text{ و } z = -1.35)$$

$$= (\text{المساحة بين } z = 0 \text{ و } z = -5.02) - (\text{المساحة بين } z = 0 \text{ و } z = -1.35)$$

$$0.5 - 0.4115 = 0.0885$$

ومن هذا فإنه لو كررنا عينات كل منها مكون من 120 رمية لزهرة ، فإن الوجه 4 يظهر 14 مرة أو أقل في حوالى 1/10 من هذه العينات .

توزيع بواسون :

٧-٢٧ عشرة في المائة من الأدوات المنتجة في عملية صناعية معينة هي أدوات تالفة . أوجد احتمال أن يكون في 10 من هذه الأدوات وحدتان تالفتان بالضبط باستخدام (أ) توزيع ذى الحدين (ب) تقريب بواسون لتوزيع ذى الحدين .

الحل :

$$\text{احتمال وجود أداة تالفة} = p = 0.1$$

$$\text{Pr} \{ 2 \text{ أداة تالفة من } 10 \} = {}_{10}C_2(0.1)^2(0.9)^8 = 0.1937 \text{ or } 0.19 \quad (\text{أ})$$

$$\lambda = Np = 10(0.1) = 1 \quad (\text{ب})$$

$$\text{Pr} \{ 2 \text{ أداة تالفة من } 10 \} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{(1)^2 e^{-1}}{2!} = \frac{e^{-1}}{2} = \frac{1}{2e} = 0.1839$$

$$\text{أو } 0.18 ، \text{ باستخدام } e = 2.718$$

بشكل عام فإن التقريب يعتبر جيداً إذا كانت $p \leq 0.1$ و $\lambda = Np \leq 5$.

٢٨-٧ إذا كان احتمال أن يمانى شخص من رد فعل سيء عند حقنه بمصل معين هو 0.001 ، أوجد احتمال أنه من 2000 شخص (أ) 3 بالضبط (ب) أكثر من شخصين ، سيمانون من رد فعل سيء .

الحل :

$$\lambda = np (2000)(0.001) = 2 \quad \text{حيث} \quad \Pr \{ X \text{ شخص يمانى من رد فعل سيء} \} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{2^x e^{-2}}{x!}$$

$$\Pr \{ 3 \text{ أشخاص سيمانون من رد فعل سيء} \} = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = \frac{4}{3e^2} = 0.180 \quad (أ)$$

$$\Pr \{ 0 \text{ سيمانى} \} = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = \frac{1}{e^2} \quad (ب)$$

$$\Pr \{ 1 \text{ سيمانى} \} = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = \frac{2}{e^2}$$

$$\Pr \{ 2 \text{ سيمانى} \} = \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = \frac{2}{e^2}$$

$$\Pr \{ 0 \text{ أو } 1 \text{ أو } 2 \text{ سيمانون} \} = 1 - \Pr \{ \text{أكثر من شخصين سيمانون} \}$$

$$= 1 - (1/e^2 + 2/e^2 + 2/e^2) = 1 - 5/e^2 = 0.323.$$

لاحظ أنه طبقا لتوزيع ذي الحدين فإن الاحتمالات المطلوبة هي :

$${}_{2000}C_3 (0.001)^3 (0.999)^{1997} \quad (أ)$$

$$1 - \{ {}_{2000}C_0 (0.001)^0 (0.999)^{2000} + {}_{2000}C_1 (0.001)^1 (0.999)^{1999} + {}_{2000}C_2 (0.001)^2 (0.999)^{1998} \} \quad (ب)$$

والتي من الصعب حساب قيمتها مباشرة .

$$p(X) = \frac{(0.72)^x e^{-0.72}}{x!} \quad \text{٢٩-٧ إذا كان توزيع بواسون معطى كالآتي :}$$

$$\text{أوجد (أ) } p(0) \quad (ب) p(1) \quad (ج) p(2) \quad (د) p(3)$$

الحل :

$$p(0) = \frac{(0.72)^0 e^{-0.72}}{0!} = \frac{(1)e^{-0.72}}{1} = e^{-0.72} = 0.4868 \quad (أ)$$

$$p(1) = \frac{(0.72)^1 e^{-0.72}}{1!} = 0.72 e^{-0.72} = (0.72)(0.4868) = 0.3505 \quad (ب)$$

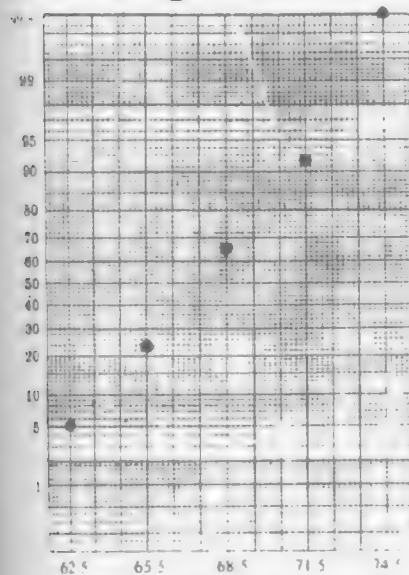
$$p(2) = \frac{(0.72)^2 e^{-0.72}}{2!} = \frac{(0.5184)e^{-0.72}}{2} = (0.2592)(0.4868) = 0.1262 \quad (ج)$$

$$p(2) = \frac{0.72}{2} p(1) = (0.36)(0.3505) = 0.1262 \quad \text{طريقة أخرى :}$$

$$p(3) = \frac{(0.72)^3 e^{-0.72}}{3!} = \frac{0.72}{3} p(2) = (0.24)(0.1262) = 0.0303 \quad (د)$$

٣٢-٧ استخدام ورق رسم بياني احتمالي لتحديد ما إذا كان التوزيع التكراري المذكور بالجدول ٢ - ١ صفحة ٤٥ . من الممكن تقريبه بصورة جيدة من التوزيع الطبيعي .

التكرار المتجمع النسبي (%)



الوزن (kg)

شكل ٧ - ١٠

الحل :

الجدول ٧ - ٥

الوزن (kg)	التكرار المتجمع النسبي (%)
أقل من 62.5	5.0
أقل من 65.5	23.0
أقل من 68.5	65.0
أقل من 71.5	92.0
أقل من 74.5	100.0

٣٣-٧ وفق منحنى طبيعي لبيانات الجدول ٢ - ١ . صفحة

الحل :

جدول ٧ - ٦

الوزن (kg)	الحدود الفئات X	z لحدود الفئات	المساحة تحت المنحنى الطبيعي من 0 إلى z	المساحة لكل فئة	التكرار المتوقع	التكرار المشاهد
60-62	59.5-62.5	2.72	0.4967	0.0413	4.13 or 4	5
63-65	62.5-65.5	-1.70	0.4554	0.2068	20.68 or 21	18
66-68	65.5-68.5	0.67	0.2486	0.3892	38.92 or 39	42
69-71	68.5-71.5	0.36	0.1406	0.2771	27.71 or 28	27
72-74	71.5-74.5	1.39	0.4177	0.0743	7.43 or 7	8
		2.41	0.4920			

$$\bar{X} = 67.45 \text{ kg. } s = 2.92 \text{ kg}$$

يمكن تنظيم الحل كما في الجدول ٧ - ٦ . عند حساب z لحدود الفئات ، نستخدم $z = (X - \bar{X})/s$ حيث \bar{X} الوسط \bar{X} والانحراف المعياري s حصلنا عليهما من المسألة ٣ - ٢٢ ، الفصل الثالث والمسألة ٤ - ١٧ الفصل الرابع على الترتيب .

في العمود الرابع من اليسار ، المساحات تحت المنحنى الطبيعي من 0 إلى z حصلنا عليها باستخدام الجدول في الملحق II ، صفحة ٥٣٣ . ومنها نحصل على المساحات تحت المنحنى الطبيعي بين القيم المتتالية z كما في العمود الخامس . وهذه نحصل عليها بطرح المساحات المتتالية في العمود الرابع عندما تكون قيم z المقابلة لها نفس الإشارة ، وبالإضافة عندما تكون قيم z لها إشارة مختلفة (والتي حدثت مرة واحدة في الجدول) . والسبب في ذلك يبدو واضحاً من الشكل البياني .

بضرب القيم في العمود الخامس من اليسار (والذي يمثل التكرارات النسبية) بالتكرار الكلي (في هذه الحالة 100)
ينتج عنه التكرارات المتوقعة كما في العمود السادس . حيث يشاهد أنها تتفق مع التكرارات الفعلية أو الملاحظة والموضحة
بالعمود الأخير .

وإذا أردنا ، فإنه يمكن تعديل الانحراف المعياري باستخدام معامل تصحيح شبرد (أنظر المسألة ٤ - ٢١
(أ) ، الفصل الرابع) .

« جودة التوفيق » لهذا التوزيع سوف تدرس في المسألة ١٢ - ١٣ ، الفصل الثاني عشر .

٧-٣٤ الجدول ٧ - ٧ يبين عدد الأيام f في فترة 50 يوماً والتي حدث خلالها X حادث سيارة في مدينة معينة . وفق
توزيع بواسون لهذه البيانات .

الحل :

متوسط عدد الحوادث هو

جدول ٧ - ٧

عدد الحوادث X	عدد الأيام f
0	21
1	18
2	7
3	3
4	1

المجموع 50

$$\lambda = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{(21)(0) + (18)(1) + (7)(2) + (3)(3) + (1)(4)}{50} = \frac{45}{50} = 0.90$$

وهذا ، طبقاً لتوزيع بواسون

$$\Pr \{ X \text{ حادث} \} = \frac{(0.90)^X e^{-0.90}}{X!}$$

الجدول ٧ - ٨ يبين احتمالات 0, 1, 2, 3, 4 حادث كما حصلنا عليها من توزيع بواسون السابق ، مقروناً
بالعدد المتوقع أو النظري لعدد الأيام والتي وقع خلالها X حادثة (حصلنا عليه بضرب الاحتمالات المقابلة في 50) .

ولتسهيل المقارنة كتب في العمود الأخير العدد الفعلي للأيام

جدول ٧ - ٨

عدد الحوادث X	$\Pr \{ X \text{ حادثة} \}$	العدد المتوقع للأيام	العدد الفعلي للأيام
21	20.33 or 20	0.4066	0
18	18.30 or 18	0.3659	1
7	8.24 or 8	0.1647	2
3	2.47 or 2	0.0494	3
1	0.56 or 1	0.0111	4

لاحظ أن توفيق توزيع بواسون للبيانات المعطاة يمد توفيقاً جيداً .

لتوزيع بواسون الحقيقي ، التباين $\sigma^2 = \lambda$. وحساب التباين للتوزيع المعطى نجد أنه 0.97 . وهذا يقارن
شكل مقبول مع قيمة λ وهي 0.90 ، ويمكن اعتبار ذلك دليلاً آخر للملاءمة لتوزيع بواسون كتقريب لبيانات العينة .

مسائل اضافية

توزيع ذي الحدين :

٣٥-٧ احسب قيمة (أ) $7!$ (ب) $10!/(6!4!)$ (ج) ${}_9C_5$ (د) ${}_{11}C_8$ (هـ) ${}_6C_1$
ج : (أ) 5040 (ب) 210 (ج) 126 (د) 165 (هـ) 9

٣٦-٧ أوجد مفكوك (أ) $(q + p)^7$ ، (ب) $(q + p)^{10}$

ج : (أ) $p^7 + 7qp^6 + 21q^2p^5 + 35q^3p^4 + 35q^4p^3 + 21q^5p^2 + 7q^6p + p^7$

(ب) $p^{10} + 10qp^9 + 45q^2p^8 + 120q^3p^7 + 210q^4p^6 + 252q^5p^5 + 210q^6p^4 + 120q^7p^3 + 45q^8p^2 + 10q^9p + p^{10}$

٣٧-٧ في رمية عملة متوازنة 6 مرات أوجد احتمال ظهور (أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3 (هـ) 4 (و) 5 صورة

ج : (أ) $1/64$ (ب) $3/32$ (ج) $15/64$ (د) $5/16$ (هـ) $15/64$ (و) $3/32$

٣٨-٧ في رمية واحدة لت عملة غير متحيزة أوجد احتمال ظهور (أ) 2 أو أكثر صورة (ب) أقل من 4 صور

ج : (أ) $57/64$ (ب) $21/32$

٣٩-٧ إذا كانت X تعبر عن عدد الصور في رمية واحدة لأربع عملات متوازنة ،

أوجد (أ) $\Pr\{X = 3\}$ (ب) $\Pr\{X < 2\}$ (ج) $\Pr\{X \leq 2\}$ (د) $\Pr\{1 < X \leq 3\}$

ج : (أ) $1/4$ (ب) $5/16$ (ج) $11/16$ (د) $5/8$

٤٠-٧ في 800 عائلة بكل منها 5 أطفال ، ماهو عدد الأسر المتوقع أن يكون بها (أ) 3 أولاد (ب) 5 بنات

(ج) 2 أو 3 أولاد . مفترضاً أن : جنس وجود بنت أو ولد احتمال متساو .

ج : (أ) 250 (ب) 25 (ج) 500

٤١-٧ أوجد احتمال الحصول على ما مجموعه 11 مرة واحدة ، (ب) مرتان ، في رميتين لزهريتين متوازنتين .

ج : (أ) $17/162$ (ب) $1/324$

٤٢-٧ أوجد احتمال الحصول على 9 بالضبط مرة واحدة في 3 رميات لزهريتين

ج : $64/243$

٤٣-٧ أوجد احتمال تخمين الإجابة الصحيحة على 6 أسئلة على الأقل من 10 أسئلة في امتحان « خطأ - صواب » .

ج : $193/512$

٧-٤ : مندوب تأمين باع بوالص تأمين إلى 5 أشخاص ، جميعهم في نفس العمر وفي صحة جيدة . طبقاً لجداول التأمين فإن احتمال بقاء شخص على قيد الحياة له هذه المواصفات 30 عاماً تالياً هو $2/3$. أوجد احتمال أنه في خلال 30 عاماً يبقى على قيد الحياة .

- (أ) كل الـ 5 رجال (ب) على الأقل 3 رجال (ج) رجلان فقط (د) على الأقل رجل واحد .
ج (أ) $32/243$ (ب) $192/243$ (ج) $40/243$ (د) $242/243$

٧-٥ : احسب (أ) الوسط (ب) الانحراف المعياري

(ج) معامل الالتواء باستخدام العزوم (د) معامل التفرطح باستخدام العزوم . لتوزيع ذى الحدين حيث $p = 0.7$ و $N = 60$. من النتيجة التي تحصل عليها .

- ج : (أ) 42 (ب) 3.550 (ج) 0.1127 (د) 2.927

٧-٦ : وضع أنه إذا كان توزيع ذى الحدين حيث $N = 100$ متماثل ، فإن معامل التفرطح باستخدام العزوم هو 2.98 .

٧-٧ : احسب (أ) $\Sigma(X - \mu)^3 p(X)$ ، (ب) $\Sigma(X - \mu)^4 p(X)$ لتوزيع ذى الحدين

- ج (أ) $Npq(q-p)$ (ب) $3N^2p^2q^2 + Npq(1 - 6pq)$

٧-٨ : برهن الصيغة المذكورة في صفحة ١٩٦ لمعاملات الالتواء والتفرطح باستخدام العزوم .

التوزيع الطبيعي :

٧-٩ : في امتحان بلاحصاء كان الوسط 78 والانحراف المعياري 10

- (أ) أوجد الدرجات المعيارية لطلابين درجاتهما 93 و 62
(ب) أوجد درجات طالبين درجاتهما المعيارية 0.6 - و 1.2
ج : (أ) 1.5 و 1.6 - (ب) 72 و 90

٧-١٠ : أوجد (أ) الوسط (ب) الانحراف المعياري في امتحان كانت الدرجات به 70 و 88 مقابلة للدرجات المعيارية

0.6 - و 1.4 على الترتيب .

- ج (أ) 4 75 (ب) 9

٧-١١ : أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين (أ) $z = -1.20$ و $z = 2.40$

(ب) $z = 1.23$ و $z = 1.87$ (ج) $z = -2.35$ و $z = -0.50$

- ج : (أ) 0.8767 (ب) 0.0786 (ج) 0.2991

٥٧-٧ أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي (أ) إلى يسار $z = -1.78$ (ب) إلى يسار $z = 0.56$
 (ج) إلى يمين $z = -1.45$ (د) المقابلة لـ $z \geq 2.16$ (هـ) المقابلة لـ $-0.80 \leq z \leq 1.53$
 (و) إلى يسار $z = -2.52$ وإلى يمين $z = 1.83$
 ج : (أ) 0.0375 (ب) 0.7123 (ج) 0.9265 (د) 0.0154 (هـ) 0.7251 (و) 0.0395

٥٨-٧ إذا كانت z تتوزع توزيعاً طبيعياً متوسطة 0 وتباينه 1 ، أوجد (أ) $\Pr\{z \geq -1.64\}$
 (ب) $\Pr\{-1.96 \leq z \leq 1.96\}$ (ج) $\Pr\{|z| \geq 1\}$
 ج : (أ) 0.9495 (ب) 0.9500 (ج) 0.6826

٥٩-٧ أوجد احتمال z بحيث تكون (أ) المساحة إلى يمين z هي 0.2266 (ب) المساحة إلى يسار z هي 0.0314
 (ج) المساحة بين -0.23 و z هي 0.5722 (د) المساحة بين 1.15 و z هي 0.0730
 (هـ) المساحة بين z و $-z$ هي 0.9000
 ج : (أ) 0.75 (ب) -1.86 (ج) 2.08 (د) 0.849 أو 1.625 (هـ) ± 1.645

٥٥-٧ أوجد z_1 إذا كان $\Pr\{z \geq z_1\} = 0.84$ ، حيث يتوزع z توزيعاً طبيعياً متوسطة 0 وتباينه 1 .
 ج : 0.995

٥٦-٧ أوجد إحداثيات المنحنى الطبيعي عند (أ) $z = 2.25$ (ب) $z = -0.32$ (ج) $z = -1.18$
 ج : (أ) 0.0317 (ب) 0.3790 (ج) 0.1989

٥٧-٧ إذا كانت أوزان 300 طالباً تتوزع توزيعاً طبيعياً متوسطة 68.0 kg وانحرافه المعياري هو 3.0 kg كم عدد
 الطلبة الذين تكون أوزانهم (أ) أكبر من 72 kg (ب) أقل من أو يساوي 64 kg
 (ج) بين 65 و 71 kg (متضمنة 71) (د) مساوية 68 kg
 مفترضاً أن القياسات مسجلة إلى أقرب كيلوجرام .
 ج : (أ) 20 (ب) 36 (ج) 227 (د) 40

٥٨-٧ إذا كانت أوزان رولمان بلي تتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط 0.6140 newtons وانحراف معياري 0.0025 newtons ،
 حدد النسبة المئوية لرولمان البلي الذي يكون وزنه (أ) بين 0.610 و 0.618 newtons (متضمنة 0.618) ،
 (ب) أكبر من 0.617 newtons (ج) أقل من 0.608 newtons (د) مساو 0.615 newtons
 ج : (أ) 93% (ب) 8.1 (ج) 0.47% (د) 15%

٥٩-٧ إذا كان متوسط الدرجات في امتحان نهائي هو 72 والانحراف المعياري 9 . إذا كان الـ 10% الأول من الطلبة
 يحصلون على تقدير A . ما هي أدنى درجة يمكن أن يحصل عليها الطالب بحيث يحصل أيضاً على A ؟

ج : 84

٦٥-٧ إذا كانت مجموعة من القياسات تتوزع توزيعاً طبيعياً ، ما هي النسبة المئوية فيها والتي تختلف عن الوسط (أ) بأكثر من نصف الانحراف المعياري (ب) أقل من ثلاثة أرباع الانحراف المعياري .

ج : (أ) 61.7% (ب) 54.7%

٦١-٧ إذا كان \bar{X} الوسط الحسابي و S الانحراف المعياري لمجموعة من القياسات تتوزع توزيعاً طبيعياً ، ما هي النسبة المئوية للقياسات التي تقع (أ) داخل المدى $(\bar{X} \pm 2s)$ ، (ب) خارج المدى $(\bar{X} \pm 1.2s)$ (ج) أكبر من $(\bar{X} - 1.5s)$ ؟

ج : (أ) 95.4% (ب) 23.0% (ج) 93.3%

٦٢-٧ في المسألة السابقة أوجد قيمة الثابت a بحيث تكون النسبة المئوية في الحالات (أ) داخل المدى $(\bar{X} \pm as)$ هي 75%

(ب) أقل من $(\bar{X} - as)$ هي 22%

ج : (أ) 1.15 (ب) 0.77

التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذى الحدين :

٦٣-٧ في 200 رمية لعملة أوجد احتمال ما يلي (أ) بين 80 و 120 صورة بما فيها الرقان 80 و 120

(ب) أقل من 90 صورة (ج) أقل من 85 أو أكبر من 115 صورة . (د) 100 صورة بالضبط .

ج : (أ) 0.9962 (ب) 0.0687 (ج) 0.0286 (د) 0.0558

٦٤-٧ أوجد احتمال أن يخمن طالب تخميناً صحيحاً الإجابة على (أ) 12 أو أكثر من 20 (ب) 24 أو أكثر من 40 سؤالاً في امتحان « خطأ - صواب » .

ج : (أ) 0.2511 (ب) 0.1342

٦٥-٧ أنه ينتج مسامير 10% منها تالف . أوجد احتمال أنه في عينة عشوائية مكونة من 400 مسامير من انتاج هذه الآلة سيكون هناك

(أ) على الأكثر 30 (ب) بين 30 و 50 (ج) بين 35 و 45 (د) 55 أو أكثر مسامير تالف .

ج : (أ) 0.0567 (ب) 0.9198 (ج) 0.6404 (د) 0.0079

٦٦-٧ أوجد احتمال الحصول على أكثر من 25 « سبعة » في 100 رمية لزهرفي طاولة متوازنتين .

0.0089

توزيع بواسون :

٦٧-٦ إذا كان 3% من المبات الكهربائية المنتجة في شركة معينة هي لمبات تالفة ، أوجد احتمال أن يظهر في عينة من 100 لمبة (أ) 0 (ب) 1 ، (ج) 3 (د) 4 (هـ) 5 لمبة تالفة .

ج : (أ) 0.04979 (ب) 0.1494 (ج) 0.2241 (د) 0.1680 (هـ) 0.1008

٦٨-٦ في المسألة السابقة ، أوجد احتمال وجود (أ) أكثر من 5 (ب) بين 1 و 3 (ج) أقل من أو يساوي 2 لمبة تالفة .

ج : (أ) 0.0838 (ب) 0.5976 (ج) 0.4232

٦٩-٦ صندوق يحتوى على بلية حمراء وسبع بليات بيضاء . سحب بلية من الصندوق وبجمل لونها . وأعيدت مرة أخرى إلى الصندوق وخلطت البليات خلطاً جيداً . باستخدام (أ) توزيع ذى الحدين (ب) توزيع بواسون كتقريب لتوزيع ذى الحدين ، أوجد احتمال في 8 من هذه السحبات يتم سحب كرة حمراء مرات بالضبط .

ج : (أ) 0.056 (ب) 0.06131

٧٠-٦ طبقاً لإحصاءات المكتب القوي للإحصاءات الحيوية ، إدارة الصحة والتعليم والخدمات الاجتماعية الأمريكية ، فإن متوسط حوادث الفرق العارضة في السنة بالولايات المتحدة هي 3.0 لكل 100 000 من السكان . في مدينة تعداد سكانها 200 000 أوجد احتمال أن يكون بها .

(أ) 0 (ب) 2 (ج) 6 (د) 8 (هـ) بين 4 و 8 (و) أقل من 3 حالات غرق عارضة في السنة .

ج : (أ) 0.00248 (ب) 0.04462 (ج) 0.1607 (د) 0.1033 (هـ) 0.6964 (و) 0.0620

٧١-٦ بين الساعة 2 p.m. والساعة 4 p.m. ، كان متوسط عدد طلبات المكالمات التليفونية في الحقيقة في لوحة تليفونات شركة معينة هو 2.5 . أوجد احتمال أنه خلال دقيقة معينة سيكون هناك (أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3 (هـ) 4 أو أقل (و) أكثر من 6 طلبات مكالمات .

ج : (أ) 0.08208 (ب) 0.2052 (ج) 0.2565 (د) 0.2138 (هـ) 0.8911 (و) 0.0142

توزيع كثرات الحدود :

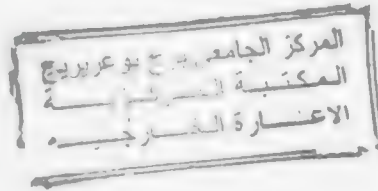
٧٢-٦ زهرة متوازنة قذفت 6 مرات . أوجد احتمال ظهور (أ) 1 «واحد» ، 2 «اثنان» ، 3 «ثلاثة»

(ب) كل جانب يظهر مرة واحدة فقط .

ج : (أ) 5/3888 (ب) 5/324

٧٣-٦ صندوق يحتوى على عدد كبير من البلى ألوانه أحمر وأبيض وأزرق وأصفر بنسبة (أصفر) 1 : (أزرق) 2 : (أبيض) 3 : (أحمر) 4 . في 10 سحبات أوجد احتمال أن تكون مكونة من (أ) 4 أحمر ، 3 أبيض ، 2 أزرق ، 1 أصفر (ب) 8 أحمر و 2 أصفر .

ج : (أ) 0.000348 (ب) 0.000295



٧٤-٧ أوجد احتمال عدم الحصول على 1 أو 2 أو 3 في أربع رميات لزهرة متوازنة .
ج : $3/8$

توفيق البيانات باستخدام توزيعات نظرية :

٧٥-٧ وفق توزيع ذي الحدين للبيانات التالية .

X	0	1	2	3	4
f	30	62	46	10	2

$$p(X) = {}^nC_X (0.32)^X (0.68)^{n-X}$$

ج : التكرارات المتوقعة هي 32, 60, 43, 13, 2 على الترتيب .

٧٦-٧ باستخدام ورق الرسم البياني الاحتمال حدد ما إذا كانت بيانات المسألة ٣-٥٩ بالفصل الثالث يمكن تقريبها بدقة بالتوزيع الطبيعي .

٧٧-٧ وفق توزيع طبيعي لبيانات المسألة ٣-٥٩ بالفصل الثالث .

ج : التكرارات المتوقعة 0.6 and 2.7, 7.6, 13.7, 15.9, 12.0, 5.5, 1.7 على الترتيب .

٨٧-٧ وفق توزيع طبيعي لبيانات المسألة ٣-٦١ ، الفصل الثالث .

ج : التكرارات المتوقعة 1.0 and 3.1, 9.4, 21.1, 36.6, 49.0, 50.2, 39.5, 23.9, 11.1, 4.0, 1.1 على الترتيب .

٧٩-٧ وفق توزيع بواسون لبيانات المسألة ٧-٥٧ وقارن ذلك بالتوفيق الذي حصلت عليه باستخدام توزيع ذي الحدين .

ج : التكرارات المتوقعة 4.7 and 14.6, 34.2, 53.4, 41.7 على الترتيب .

٨٥-٧ في 01 وحدات من وحدات الفرسان بالجيش البروسي كان عدد

X	0	1	2	3	4
f	109	65	22	3	1

الوفيات الناتجة من رفعة حصان في كل وحدة على مدى 20 سنة من

1875 — 1894 كما هو مبين بالجدول .

وفق توزيع بواسون لهذه البيانات .

ج : $p(X) = \frac{(0.61)^X e^{-0.61}}{X!}$ التكرارات المتوقعة هي 0.7, 4.1, 20.2, 66.3, 108.7 على الترتيب .

الفصل الثامن

مبادئ نظرية العينات

نظرية العينات :

نظرية العينات هي دراسة للعلاقة الموجودة بين مجتمع والعينات المسحوبة من هذا المجتمع . وهذه لها أهمية كبيرة من كثير في الأمور . على سبيل المثال فإنها مفيدة في تقدير الكميات غير المعلومة للمجتمع (مثل متوسط المجتمع ، تباينه ، . . وغير ذلك) . والتي تسمى بمعالم المجتمع أو باختصار ، المعالم ، وذلك من معرفة الكميات المقابلة لها في العينة (مثل متوسط العينة ، تباينها ، . . وغير ذلك) ، والتي تسمى بالإحصائيات المستخرجة من العينة أو باختصار إحصائيات . وسوف تدرس مشاكل التقدير في الفصل التاسع .

وتفيد نظرية العينات في تحديد ما إذا كانت الاختلافات المشاهدة بين عينتين ترجع إلى تقلبات الصدفة أو إلى اختلافات ممنوية فعلاً . هذه الأسئلة ، على سبيل المثال ، تظهر عند اختبار مصل جديد لعلاج مريض معين أو عند تقرير ما إذا كانت عملية صناعية معينة أحسن من عملية أخرى . إجابات هذه الأسئلة متضمنة في استخدام ما يسمى بالاختبارات الممنوية والفروض والتي لها أهميتها في نظرية اتخاذ القرارات . وهذه سوف تدرس في الفصل العاشر .

وبشكل عام ، فإن دراسة الاستدلال الخاص بالمجتمع باستخدام عينات مسحوبة منه ، مع المؤشرات الخاصة بدرجة الاستدلال باستخدام نظرية الاحتمال ، يسمى بالاستدلال الإحصائي .

المعاينة العشوائية • الأرقام العشوائية :

لضمان أن تكون الاستنتاجات المعتمدة على نظرية العينات والاستدلال الإحصائي سليمة ، فإن العينات يجب أن تختار بحيث تكون ممثلة للمجتمع . وتسمى دراسة طرق المعاينة والمشاكل المتصلة بها بتصميم التجارب .

أحد طرق الحصول على عينة ممثلة هو استخدام أسلوب يسمى بالمعاينة العشوائية . والتي طبقاً لها تكون لكل مفردة المجتمع نفس الفرصة في أن تكون ضمن العينة . أحد الأساليب في الحصول على عينة عشوائية هو إعطاء رقم لكل مفردة في المجتمع وتكتب هذه الأرقام على قطع صغيرة من الورق ، وتوضع في وعاء وتصحب الأرقام من هذا الوعاء ، على أن يراعى أن تخلط هذه الأرقام خلطاً جيداً قبل كل عملية سحب . ويمكن إحلال هذه الطريقة بطريقة أخرى باستخدام جداول الأرقام العشوائية (انظر صفحة ٥٣٩) والتي سمحت خصيصاً لهذا الغرض . انظر المسألة ٨-٦ .

المعاينة بأرجاع وبدون أرجاع :

في سحب رقم من الوعاء ، فإنه يكون لنا الخيار في إرجاع هذا الرقم أو عدم إرجاعه قبل إجراء السحب التالية . في حالة الأول فإن الرقم يمكن أن يظهر مرات أخرى ، بينما في الطريقة الثانية يمكن أن يظهر الرقم مرة واحدة فقط . في العينات التي يمكن أن

نختار فيها مفردات المجتمع أكثر من مرة تسمى بالمعاينة بإرجاع ، بينما إذا كانت المفردة في المجتمع لا يمكن اختيارها أكثر من مرة فتسمى المعاينة بدون إرجاع .

المجتمعات إما تكون محدودة أو غير محدودة . فعلى سبيل المثال ، لو سحبنا كرات سحباً متتالياً بدون إرجاع من وعاء يحتوي على 100 كرة فإننا نعاين ، أو نسحب عينة من مجتمع محدود ، بينما لو قذفنا عملة 50 مرة وحسبنا عدد الصور ، فإننا نعاين من مجتمعاً غير محدود .

في المجتمع المحدود حيث تسحب العينة مع الإرجاع يمكن اعتباره من الناحية النظرية ، مجتمعاً غير محدود حيث أن أي عدد من العينات يمكن سحبه بدون أن يستنفد المجتمع . لأغلب الأغراض العملية ، يمكن اعتبار المعاينة من مجتمع محدود ولكنه كبير مثل المعاينة من مجتمع غير محدود .

توزيعات المعاينة :

أعتبر كل العينات الممكنة ذات الحجم N والتي يمكن سحبها من مجتمع معين (أما بإرجاع أو بدون إرجاع) . من كل عينة يمكننا حساب إحصائية ، مثل الوسط الحسابي . الانحراف المعياري ، وغيرها . والذي سيختلف من عينة إلى أخرى . وهذه الطريقة نحصل على توزيع الإحصائية الذي يسمى توزيع المعاينة لهذه الإحصائية .

على سبيل المثال لو كانت الإحصائية المستخدمة هي الوسط الحسابي للعينة ، فإن توزيعها يسمى توزيع العينة للأوساط أو توزيع المعاينة للوسط الحسابي . وب نفس الصورة ، يمكن أن نحصل على توزيعات المعاينة للانحراف المعياري ، التباين ، الوسيط ، النسب ، وغيرها .

ولكل توزيع معاينة ، يمكن أن نحسب له الوسط الحسابي ، الانحراف المعياري ، وغير ذلك . وهذا يمكن أن نتحدث عن الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للأوساط الحسابية ، وغيرها .

توزيع المعاينة للأوساط :

إذا افترضنا أن كل العينات الممكنة ذات الحجم N سحبت بدون إرجاع من مجتمع محدود حجمه $N_p > N$. وإذا رمزنا لوسط الحسابي لتوزيع المعاينة بالرمز μ_x ولانحرافه المعياري بالرمز σ_x والوسط الحسابي للمجتمع بالرمز μ والانحراف المعياري بالرمز σ ، فإن

$$(1) \quad \mu_x = \mu \quad , \quad \sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}}$$

إذا كان المجتمع غير محدود أو كان السحب بإرجاع ، فإن النتيجة السابقة تختصر . إلى

$$(2) \quad \mu_x = \mu \quad , \quad \sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

ولقيم N الكبيرة ($N \geq 30$) فإن توزيع المعاينة للأوساط يتوزع تقريباً كالتوزيع الطبيعي بمتوسط μ_x وانحراف معياري σ_x وذلك بصرف النظر عن المجتمع (مادام متوسط تباين المجتمع محدودين و كان حجم المجتمع ضعف حجم العينة على الأقل) .

من

من كثير في
غير ذلك)
تباينها ،
كل التقدير في

تلافات معنوية
ن عملية صناعية
في لها أهميتها في

حصة بدرجة دقة

أن تختار بحيث

كل مفردة المجتمع
مفردة في المجتمع ،
راعى أن تخلط هذه
العشوائية (أنظر

لية . في حالة الأولى
العينات التي يمكن أن

هذه النتيجة للمجتمعات غير المحدودة هي حالة خاصة من نظرية النهاية المركزية المعروفة في النظرية المتقدمة للاحتيال والتي تثبت أن دقة التقريب تزداد كلما زادت N . وهذه يشار إليها أحياناً بأن توزيع المعاينة يؤل إلى التوزيع الطبيعي .

في الحالة التي يتوزع فيها المجتمع توزيعاً طبيعياً ، فإن توزيع المعاينة للأوساط يتوزع أيضاً توزيعاً طبيعياً حتى ولو كانت N صغيرة (بمعنى $N < 30$) .

توزيع المعاينة لنسب :

افترض مجتمعاً غير محدود وأن احتمال وقوع حدث (تسمى نجاحه) هو p بينما احتمال وعدم وقوعه هو $q = 1 - p$. على سبيل المثال يمكن أن يكون المجتمع هو كل الرميات الممكنة لعملة متوازنة حيث احتمال الحدث « صورة » هو $p = 1/2$.

اعتبر جميع العينات الممكنة ذات الحجم N والمسحوبة من هذا المجتمع ، ولكل عينة حدد نسبة النجاح P . في حالة العملة P هي نسبة ظهور الصورة في N رمية . ثم نحصل توزيع المعاينة للنسب حيث متوسط μ_p وانحرافه المعياري σ_p معطيان بالمعادلتين .

$$(٢) \quad \sigma_p = \sqrt{\frac{pq}{N}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \quad , \quad \mu_p = p$$

والذي يمكن الحصول عليها من (٢) بكتابة $\mu = p$ و $\sigma = \sqrt{pq}$.

لقيم N الكبيرة ($N \geq 30$) يقرب توزيع المعاينة بشكل كبير من التوزيع الطبيعي . لاحظ أن المجتمع يتوزع توزيع ذي الحدين :

المعادلة (٣) صالحة أيضاً للمجتمعات المحدودة حيث المعاينة بإرجاع .

وبالنسبة للمجتمعات المحدودة حيث المعاينة بدون ارجاع فإن المعادلات (٢) تستبدل بالمعادلات (١) حيث $\mu = p$ و $\sigma = \sqrt{pq}$.

لاحظ أن المعادلات (٢) يمكن الحصول عليها بصورة أسهل بقسمة الوسط الحسابي والانحراف المعياري (Np و \sqrt{Npq}) لتوزيع ذي الحدين على N (أنظر الفصل السابع) .

توزيع المعاينة للفروق والمجموع :

افترض أننا قد أعطينا مجتمعين . لكل عينة حجمها N_1 مسحوبة من المجتمع الأول احسب الإحصائية S_1 . وهذا ينتج توزيع المعاينة للإحصائية S_1 التي وسطها الحسابي μ_{S_1} وانحرافها المعياري σ_{S_1} . كذلك ، لكل عينة حجمها N_2 مسحوبة من المجتمع الثاني نحسب لها الإحصائية S_2 . وهذا ينتج توزيع المعاينة للإحصائية S_2 التي وسطها الحسابي μ_{S_2} وانحرافها المعياري σ_{S_2} . ومن جميع التوافيق الممكنة لهذه العينات يمكن الحصول على توزيع الفرق ، $S_1 - S_2$ ، والذي يسمى توزيع المعاينة للفرق بين الإحصائيتين . ويرمز للوسط الحسابي لتوزيع المعاينة هذا بالرمز $\mu_{S_1-S_2}$ ، وانحرافه المعياري بالرمز $\sigma_{S_1-S_2}$ ، ويعرفان بالمعادلتين :

$$(١) \quad \mu_{S_1-S_2} = \mu_{S_1} - \mu_{S_2} \quad , \quad \sigma_{S_1-S_2} = \sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2}$$

وهذا تحت شرط أن العينات المختارة لاتعتمد بأى طريقة على بعضها ، بمعنى ، أن العينات مستقلة .

إذا كانت S_1 و S_2 هي الأوساط الحسابية للعينات من المجتمعين ، والتي سوف نرمز لها بالرموز \bar{X}_1 و \bar{X}_2 ، فإن توزيع المعاينة للفرق بين الأوساط المجتمعات غير المحدودة والتي وسطها وانحرافها المعياري هي على الترتيب μ_1, σ_1 و μ_2, σ_2 له وسط حسابي وانحراف معياري معرف كالآتي :

$$(٥) \quad \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\sigma_{\bar{X}_1}^2 + \sigma_{\bar{X}_2}^2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}} \quad , \quad \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$$

باستخدام المعادلة (٢) . وهذه النتيجة صالحة للمجتمعات المحدودة إذا كان السحب بارجاع . ويمكن الحصول على نتائج مشابهة للمجتمعات المحدودة عندما تكون المعاينة بدون ارجاع باستخدام المعادلات (١) .

ويمكن الحصول على نتائج مقابلة لتوزيع المعاينة للفروق بين النسب من مجتمعين يتوزعان توزيع ذي الحدين بمعالم p_1, q_1 و p_2, q_2 على الترتيب .

في هذه الحالة S_1 و S_2 تقابل نسب النجاح ، P_1 و P_2 والمعادلات (٤) تعطى النتائج .

$$(٦) \quad \sigma_{P_1 - P_2} = \sqrt{\sigma_{P_1}^2 + \sigma_{P_2}^2} = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{N_1} + \frac{p_2 q_2}{N_2}} \quad , \quad \mu_{P_1 - P_2} = \mu_{P_1} - \mu_{P_2} = p_1 - p_2$$

إذا كانت كل من N_1 و N_2 كبيرة ($N_1, N_2 \geq 30$) فإن توزيع المعاينة للفرق بين الأوساط أو النسب يكون قريباً جداً من التوزيع الطبيعي .

وقد يكون من المفيد أحياناً الحديث عن توزيع المعاينة لمجموع إحصائيتين .

ويعطى المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع بالمعادلتين .

$$(٧) \quad \sigma_{S_1 + S_2} = \sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2} \quad , \quad \mu_{S_1 + S_2} = \mu_{S_1} + \mu_{S_2}$$

مفترضتين أن البيانات مستقلة .

الخطأ المعياري :

الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة لإحصائية يسمى غالباً بالخطأ المعياري . .

في الجداول ٨ - ١ أدرجنا الأخطاء المعيارية لتوزيعات المعاينة لإحصائيات مختلفة تحت شرط المعاينة العشوائية من مجتمع غير محدود (أو كبير جداً) أو المعاينة بدون ارجاع من مجتمع محدود . كذلك أدرجنا ملاحظات خاصة بالشروط التي يجب توافرها حتى تكون النتائج صحيحة وتعليقات أخرى لها صلة بالموضوع .

الكميات $\mu, \sigma, p, \mu_r, \bar{X}, P, m_r$ تعبر على الترتيب (مقروءة من الشمال إلى اليمين) عن الوسط الحسابي ، الانحراف المعياري ، النسبة ، العزم الرأسي حول الوسط الحسابي وذلك للمجتمع ثم الوسط الحسابي والانحراف المعياري ، النسبة ، العزم الرأسي حول الوسط الحسابي للمينة .

ومن الملاحظ أنه إذا كان حجم العينة N كبير بدرجة كافية ، فإن توزيعات المعاينة ستكون التوزيع الطبيعي أو قريباً من التوزيع الطبيعي .

ل والتي تثبت

يحيا حتى ولو

$q = 1 -$

هو $p = 1/2$

حالة العملة ،

بأن بالمعادلتين .

(٢) σ_1

ع يتوزع توزيع

حيث $\mu = p$

\sqrt{Npq} و Np

S_1 . وهذا ينتج

بها N_2 مسحوبة

وانحرافها σ_{S_2}

S_1 ، والتي

وانحرافه المعياري

(٤) μ_2

ولهذا السبب تعرف الطريقة بطريقة العينات ذات الحجم الكبير . ولكن عندما تكون $N < 30$ فإن العينات تسمى بالعينات الصغيرة . وسوف تدرس نظرية العينات الصغيرة أو النظرية الدقيقة العينات ، كما تسمى أحياناً .

وعندما تكون معالم المجتمع مثل σ, p, μ, \dots غير معلومة فإنه يمكن تقديرها بدقة بالمقادير المحسوبة من العينة ، بالتعويض $s = \sqrt{N/(g-1)s^2}$, P and m , إذا كان حجم العينة كبيراً بصورة كافية .

جداول ٨ - ١

الخطأ المعياري لبعض توزيعات المعاينة

توزيع المعاينة	الخطأ المعياري	ملاحظة خاصة
الأوساط	$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$	هذه صحيحة للعينات الصغيرة والكبيرة . توزيع المعاينة للأوساط يقترب من التوزيع الطبيعي عندما تكون $N \geq 30$ حتى ولو كان المجتمع غير طبيعي $\mu_x = \mu$ وهو متوسط المجتمع في جميع الحالات .
النسب	$\sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} = \sqrt{\frac{pq}{N}}$	الملاحظات التي ذكرت في الأوساط تنطبق هنا كذلك . $\mu_p = p$ في جميع الحالات .
الانحرافات المعيارية :	$\sigma_s = \frac{\sigma}{\sqrt{2N}}$ (١) $\sigma_s = \sqrt{\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{4N\mu_2}}$ (٢)	لقيم $N \geq 100$ ، فإن توزيع المعاينة له σ يكون قريباً جداً من التوزيع الطبيعي σ_s المعطاة في (١) سليمة إذا كان المجتمع طبيعي (أو قريب من التوزيع الطبيعي) . وإذا كان التوزيع غير طبيعي فإن (٢) يمكن استخدامها . لاحظ أن (٢) تختصر لتصبح (١) عندما تكون $\mu_2 = \sigma^2$ و $\mu_4 = 3\sigma^4$ ، وهذا صحيح عندما يكون المجتمع طبيعياً . عندما تكون $N \geq 100$ ، فإن $\mu = \sigma$ بشكل قريب جداً .
الوسيط	$\sigma_{med.} = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2N}} = \frac{1.2533\sigma}{\sqrt{N}}$	لقيم $N \geq 30$ ، فإن توزيع المعاينة للوسيط يكون قريباً جداً من التوزيع الطبيعي . النتيجة المعطاة صحيحة فقط إذا كان المجتمع طبيعياً (أو طبيعياً بصورة تقريبية) . $\mu_{med} = \mu$.

توزيع المعاينة	الخطأ المعياري	ملاحظة خاصة
الربيع الأول والربيع الثالث	$\sigma_{a_1} = \sigma_{a_3} = \frac{1.3626\sigma}{\sqrt{N}}$	الملاحظات التي أبديت على الوسيط تنطبق هنا كذلك . تقرب من الربيع الأول والثالث للمجتمع . لاحظ أن $\sigma_{a_3} = \sigma_{med}$.
المئينات	$\sigma_{D_1} = \sigma_{D_9} = \frac{1.7094\sigma}{\sqrt{N}}$ $\sigma_{D_2} = \sigma_{D_8} = \frac{1.4288\sigma}{\sqrt{N}}$ $\sigma_{D_3} = \sigma_{D_7} = \frac{1.3180\sigma}{\sqrt{N}}$ $\sigma_{D_4} = \sigma_{D_6} = \frac{1.2680\sigma}{\sqrt{N}}$	الملاحظات التي أبديت على الوسيط تنطبق هنا كذلك μD_1 و μD_2 تقرب بدرجة كبيرة من العشير الأول ، والثاني .. للمجتمع لاحظ أن $\sigma_{D_5} = \sigma_{med}$.
نصف المدى الطبيعي	$\sigma_a = \frac{0.7867\sigma}{\sqrt{N}}$	الملاحظات التي أبديت على الوسيط تنطبق هنا كذلك . μQ تقرب بدرجة كبيرة من نصف المدى الربيعي للمجتمع .
التباين :	$\sigma_{s^2} = \sigma^2 \sqrt{\frac{2}{N}}$ (١) $\sigma_{s^2} = \sqrt{\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{N}}$ (٢)	الملاحظات التي أبديت على الانحراف المعياري تنطبق كذلك . لاحظ أن (٢) ينتج عنها (١) إذا كان المجتمع طبيعياً . $\mu s_2^2 = \sigma^2(N-1)/N$ والذي يقرب بدرجة كبيرة من σ^2 لقيم N الكبيرة .
معاملات الاختلاف	$\sigma_v = \frac{v}{\sqrt{2N}} \sqrt{1+2v^2}$	هنا $v = \sigma/\mu$ هو معامل اختلاق المجتمع . النتيجة المعطاة تكون صحيحة إذا كان التوزيع طبيعي أو قريب من الطبيعي و كانت $N \geq 100$.

مسائل محلولة

توزيع العينات للأوساط :

٨ - ١ يتكون مجتمع من فئة أرقام ١١, ٨, ٦, ٣, ٢ . اختبر كل العينات الممكنة التي يكون حجمها اثنين والتي يمكن
مجموع الإرجاع من هذا المجتمع . أوجد (أ) متوسط المجتمع . (ب) الانحراف المعياري للمجتمع ، (ج) متوسط توزيع
المعاينة للأوساط ، (د) الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للأوساط ، أي ، الخطأ المعياري للأوساط .

تسمى

التحديد

التوزيع
ان المجتمع

للات

تنطبق هنا

س يكون

في (١)

التوزيع

(٢) يمكن

(١) عندما

عندما يكون

و μ بشكل

نة الوسيط

نتيجة المعطاة

بصورة

 $\mu_{med} = \mu$

الحل :

$$\mu = \frac{2+3+6+8+11}{5} = \frac{30}{5} = 6.0 \quad (أ)$$

$$\sigma^2 = \frac{(2-6)^2 + (3-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (11-6)^2}{5} = \frac{16+9+0+4+25}{5} = 10.8, \text{ and } \sigma = 3.29. \quad (ب)$$

(ج) هناك 5(5) عينة ذات الحجم اثنين يمكن سحبها مع الإرجاع (بما أن كلا من الأرقام الخمسة التي يمكن سحبها في المرة الأولى يمكن أن يقرن بأي من الخمسة الأرقام الخمسة في السحب الثانية) . وهذه هي

(2, 2)	(2, 3)	(2, 6)	(2, 8)	(2, 11)
(3, 2)	(3, 3)	(3, 6)	(3, 8)	(3, 11)
(6, 2)	(6, 3)	(6, 6)	(6, 8)	(6, 11)
(8, 2)	(8, 3)	(8, 6)	(8, 8)	(8, 11)
(11, 2)	(11, 3)	(11, 6)	(11, 8)	(11, 11)

والأوساط المقابلة لها هي :

2.0	2.5	4.0	5.0	6.5
2.5	3.0	4.5	5.5	7.0
4.0	4.5	6.0	7.0	8.5
5.0	5.5	7.0	8.0	9.5
6.5	7.0	8.5	9.5	11.0

(١)

والوسط الحسابي لتوزيع المعاينة للأوساط هو

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{\text{متوسط أوساط العينة في (1) أعلاه}}{25} = \frac{150}{25} = 6.0$$

وهذا يوضح حقيقة أن $\mu_{\bar{x}} = \mu$

(د) التباين $\sigma_{\bar{x}}^2$ لتوزيع المعاينة للأوساط نحصل عليه بطرح الوسط من كل رقم في (١) ، وتربيع الناتج ، وجمع الـ 25 رقم الذي حصلنا عليه والقسم على 25 تكون النتيجة النهائية .

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = 135/25 = 5.40 \quad \text{حيث} \quad \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{5.40} = 2.32$$

وهذا يوضح حقيقة أنه في المجتمعات المحدودة والمتضمنة المعاينة بإرجاع (أو في المجتمعات غير المحدودة) ،

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma^2/N \quad \text{وحيث أن الجانب الأيمن هو } 10.8/2 = 5.40 \text{ ، نتيجة مطابقة للقيمة أعلاه .}$$

٨ - ٢ حل المسألة ٨ - ١ في حالة المعاينة بدون إرجاع .

الحل :

كافي (أ) و (ب) في المسألة ٨ - ١ ، $\sigma = 3.29$ و $\mu = 6$.

(ج) هناك $10C_2 = 10$ عينة حجم كل منها اثنين يمكن سحبها بدون إرجاع (هذا يعني أننا نسحب رقماً ثم بعد ذلك نسحب رقماً آخر يختلف عن الرقم الأول) من هذا المجتمع ، كل وجه التعديد .

(2, 3), (2, 6), (2, 8), (2, 11), (3, 6), (3, 8), (3, 11), (6, 8), (6, 11), (8, 11)

اختيار (2, 3) ، كل سبيل المثال ، يعتبر مثل اختيار (3, 2) .

الأوساط المقابلة لهذه العينات هي

$$2.5, 4.0, 5.0, 6.5, 4.5, 5.5, 7.0, 7.0, 8.5, 9.5$$

ووسط توزيع المعاينة للأوساط هو

$$\mu_x = \frac{2.5 + 4.0 + 5.0 + 6.5 + 4.5 + 5.5 + 7.0 + 7.0 + 8.5 + 9.5}{10} = 6.0$$

بوضح الحقيقة أن $\mu_x = \mu$

(ج) تبين توزيع المعاينة للأوساط هو

$$\sigma_x^2 = \frac{(2.5 - 6.0)^2 + (4.0 - 6.0)^2 + (5.0 - 6.0)^2 + \dots + (9.5 - 6.0)^2}{10} = 4.05, \text{ and } \sigma_x = 2.01$$

$$\frac{10.8}{2} \left(\frac{5-2}{5-1} \right) = 4.05 \quad , \quad \text{حيث أن الجانب الأيمن يساوي} \quad \sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{N} \left(\frac{N_p - N}{N_p - 1} \right) \quad \text{وهذا يوضح أن}$$

كما حصلنا عليه أعلاه .

(١)

٨ - ٣ افترض أن أوزان 3000 طالب في جامعة يتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط 68.0 kg وانحراف معياري 3.0 kg . إذا سميت 80 عينة كل منها مكونة من 25 طالباً ، ماهو الوسط المتوقع والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للوسط إذا كانت المعاينة (أ) بإرجاع (ب) بدون إرجاع ؟

الحل :

بمع

عدد العينات ذات الحجم 25 والذي يمكن الحصول عليها نظرياً من مجموعة من 3000 طالب مع الإرجاع هو $(3000)^{25}$ وبدون إرجاع $3000C_{25}$ ، وهو عدد أكبر من 80 . وهذا فإننا لم نحصل على توزيع المعاينة تحقيقاً للأوساط ولكن نحصل على توزيع معاينة تجريبي . ورغماً عن ذلك ، فبما أن عدد العينات كبير ، فإننا نتوقع أن يكون هناك اتفاق بين توزيعي المعاينة . وبهذا فإن المتوسط المتوقع والانحراف المعياري سيكونان قريبين من نظائرها في التوزيع النظري . وبهذا نحصل على

$$\mu_x = \mu = 68.0 \text{ kg and } \sigma_x = \sigma/\sqrt{N} = 3/\sqrt{25} = 0.6 \text{ kg} \quad (أ)$$

$$\mu_x = \mu = 68.0 \text{ kg and } \sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}} = \frac{3}{\sqrt{25}} \sqrt{\frac{3000 - 25}{3000 - 1}} \quad (ب)$$

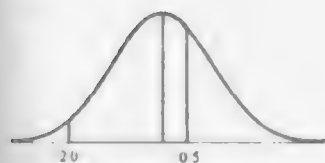
والذي يختلف قليلاً من 0.6 kg ويمكن بذلك اعتباره لجميع الأغراض العملية مثل نظير في حالة المعاينة بإرجاع . هذا ويمكن أن نتوقع أن توزيع المعاينة التجريبي للأوساط يتوزع بشكل تقريبي كالتوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي 68.0 kg وانحرافه المعياري 0.6 kg .

٨ - ٤ في كم من عينات المسألة ٨ - ٣ نتوقع أن نجد الوسط الحسابي (أ) بين 66.8 kg و 68.3 kg (ب) أقل من 66.4 kg ؟

الحل :

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{\bar{X} - 68.0}{0.6} \quad \text{الوسط } \bar{X} \text{ لعينة معبراً عنه بوحدات معيارية في هذه الحالة يعطى بـ}$$

ذلك



(أ) 66.8 معبراً عنها بوحدة معيارية =

$$(66.8 - 68.0) / 0.6 = -2.0$$

68.3 معبراً عنها بوحدة معيارية =

$$(68.3 - 68.0) / 0.6 = 0.5$$

نسبة العينات التي أوسطها بين 66.8 kg و 68.3 kg

= (المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين $z = -2.0$ و $z = 0.5$) =

= (المساحة بين $z = -2$ و $z = 0$) +

(المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.5$) =

$$0.4772 + 0.1915 = 0.6687$$

وبهذا يكون العدد المتوقع للعينات = $53 = (80)(0.6687)$

(ب) 66.4 معبراً عنها بوحدة معيارية =

$$(66.4 - 68.0) / 0.6 = -2.67$$

نسبة العينات أوسطها أقل من 66.4 kg

= (المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى يسار $z = -2.67$) =

= (المساحة إلى يسار $z = 0$) - (المساحة بين $z = -2.67$ و

$z = 0$)

$$0.5 - 0.4962 = 0.0038$$

وبهذا يكون العدد المتوقع للعينات = 0 أو $0.304 = (80)(0.0038)$

٨ - خمسة كرة حديدية متوسطها 5.02 N وانحرافها المعياري 0.30 N ، في عينة عشوائية من 100 كرة حديدية اختيرت من هذه المجموعة أو وجد احتمال أن تكون أوزانها مجتمعة (أ) بين 496 N و 500 N (ب) أكثر من 510 N.

الحل :

لتوزيع المعاينة للأوساط $\mu_{\bar{x}} = \mu = 5.02$ N

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}} = \frac{0.30}{\sqrt{100}} \sqrt{\frac{500 - 100}{500 - 1}} = 0.027$$

(أ) الوزن المجمع سوف يقع بين 496 N و 500 N إذا كان

متوسط وزن الـ 100 كرة يقع بين 4.96 N و 5.00

= 4.96 بوحدة معيارية =

$$(4.96 - 5.02) / 0.027 = -2.22$$

= 5.00 بوحدة معيارية =

$$(5.00 - 5.02) / 0.027 = -0.74$$



الاحتمال المطلوب :

$$= (\text{المساحة بين } z = - 2.22 \text{ و } z = - 0.74) - (\text{المساحة بين } z = - 2.22 \text{ و } z = 0)$$

$$= 0.4868 - 0.2704 = 0.2164$$

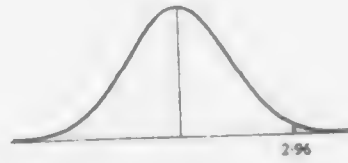
(ب) الوزن المجمع سوف يزيد عن 510 N إذا كان متوسط وزن الـ 100 كرة يتجاوز 5.10 N بوحدة معيارية =

$$(5.10 - 5.02) / 0.227 = 2.96$$

الاحتمال المطلوب :

$$= (\text{المساحة إلى يمين } z = 2.96) - (\text{المساحة يمين } z = 0)$$

$$= (\text{المساحة بين } z = 0 \text{ و } z = 2.6) - 0.5 - .4985 = 0.0015$$



أى أن هناك 3 فرص فقط من 2000 في الحصول على عينة من 100 كرة وزنها المجمع يتجاوز 5.10 N.

الأرقام العشوائية :

٨ - ٦ (أ) وضع كيف يمكن اختيار 30 عينة عشوائية حجم كل منها 4 طلبة (بارجاع) من جدول الأوزان في صفحة ٥ ؛ باستخدام الأرقام العشوائية .

(ب) أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للأوساط في (أ) .
(ج) قارن النتيجة في (ب) بالقيم النظرية ، اشرح أى اختلافات بين الإثنين .

الحل :

جدول ٨ - ٢

الوزن (kg)	التكرار	رقم المعاينة
60-62	5	00-04
63-65	18	05-22
66-68	42	23-64
69-71	27	65-91
72-74	8	92-99

(أ) استخدام عديدين لترقيم كل من المساحة طالب

00, 01, 02, ... 99 (أنظر الجدول ٨ - ٢)

وهذا فإن الـ 5 طلبة الذين تكون أوزانهم

60-62 kg يرقموا 00-04 ، والـ 18 طالب

الذين تكون أوزانهم 63-65 kg يرقموا 05-22

وهكذا ورقم كل طالب يسمى برقم المعاينة .

ثم نقوم بسحب رقم المعاينة من جدول الأرقام

العشوائية (صفحة ٥٣٩) . من الصف الأول نجد

الأرقام 51, 77, 27, 46, 40 وغيرها والتي نستهملها

كأرقام معاينة ، وكل منها ينتج وزن طالب معين .

مثلا 51 تقابل وزن طالب في الفئة 68 kg — 66 وتأخذ 67 kg (مركز الفئة) .
كذلك 46, 27, 77 ينتج عنها أوزان 67 kg, 67, 70. هذا الأسلوب نحصل على الجدول ٨ - ٣ والذي
يبين رقم المعاينة المسحوب ، الأوزان المقابلة له ومتوسط الوزن من الـ 30 عينة . ويجب أن نشير أنه على الرغم
من أننا عند استخدامنا لجدول الأرقام العشوائية بدأنا بالصف الأول فإنه من الممكن أن نبدأ من أى مكان
وأن نستخدم أى نمط خاص في استعمال الجدول .

جدول ٨ - ٣

رقم المعاينة المسحوب	الأوزان المقابلة	متوسط الوزن	رقم المعاينة المسحوب	الأوزان المقابلة	متوسط الوزن
16. 11, 64, 55, 58	64, 67, 67, 67	66.25	1. 51, 77, 27, 46	67, 70, 67, 67	67.75
17. 70, 56, 97, 43	70, 67, 73, 67	69.25	2. 40, 42, 33, 12	67, 67, 67, 64	66.25
18. 74, 28, 93, 50	70, 67, 73, 67	69.25	3. 90, 44, 46, 62	70, 67, 67, 67	67.75
19. 79, 42, 71, 30	70, 67, 70, 67	68.50	4. 16, 28, 98, 93	64, 67, 73, 73	69.25
20. 58, 60, 21, 33	67, 67, 64, 67	66.25	5. 58, 20, 41, 86	67, 64, 67, 70	67.00
21. 75, 79, 74, 54	70, 70, 70, 67	69.25	6. 19, 64, 08, 70	64, 67, 64, 70	66.25
22. 06, 31, 04, 18	64, 67, 61, 64	64.00	7. 56, 24, 03, 32	67, 67, 61, 67	65.50
23. 67, 07, 12, 97	70, 64, 64, 73	67.75	8. 34, 91, 83, 58	67, 70, 70, 67	68.50
24. 31, 71, 69, 88	67, 70, 70, 70	69.25	9. 70, 65, 68, 21	70, 70, 70, 64	68.50
25. 11, 64, 21, 87	64, 67, 64, 70	66.25	10. 96, 02, 13, 87	73, 61, 64, 70	67.00
26. 03, 58, 57, 93	61, 67, 67, 73	67.00	11. 76, 10, 51, 08	70, 64, 67, 64	66.25
27. 53, 81, 93, 88	67, 70, 73, 70	70.00	12. 63, 97, 45, 39	67, 73, 67, 67	68.50
28. 23, 22, 96, 79	67, 64, 73, 70	68.50	13. 05, 81, 45, 93	64, 70, 67, 73	68.50
29. 98, 56, 59, 36	73, 67, 67, 67	68.50	14. 96, 01, 73, 52	73, 61, 70, 67	67.75
30. 08, 15, 08, 84	64, 64, 64, 70	65.50	15. 07, 82, 54, 24	64, 70, 67, 67	67.00

جدول ٨ - ٤

وسط العينة	الحزم	f	u	fu	fu ²
64.00	/	1	-4	-4	16
64.75		0	-3	0	0
65.50	//	2	-2	-4	8
66.25	/// /	6	-1	-6	6
67.00	////	4	0	0	0
67.75	////	4	1	4	4
68.50	/// //	7	2	14	28
69.25	///	5	3	15	45
70.00	/	1	4	4	16
		$\Sigma f = N = 30$		$\Sigma fu = 23$	$\Sigma fu^2 = 128$

(ب) الجدول ٨ - ٤ يوضح التوزيع التكرارى للوسط الحسابى للأوزان في العينات والذي حصلنا عليه في (أ) .
هذا هو توزيع المعاينة للأوساط . الوسط الحسابى والانحراف المعياري نحصل عليهما باستخدام طريقة الترميز
المشار إليها في الفصل الثالث والرابع

$$\text{الوسط الحسابى} = A + cd = A + \frac{c \Sigma fu}{N} = 67.00 + \frac{(0.75)(23)}{30} = 67.58 \text{ kg}$$

$$\text{الانحراف المعياري} = c \sqrt{u^2 - d^2} = c \sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2} = 0.75 \sqrt{\frac{128}{30} - \left(\frac{23}{30}\right)^2} = 1.41 \text{ kg}$$

(ج) الوسط النظري لتوزيع المعاينة للأوساط ، والمعطى : μ_p ، يجب أن يساوى وسط المجتمع μ والذي يساوى 67.45 kg (أنظر المسألة ٢ - ٢٢ الفصل الثالث) وهذا يتفق مع القيمة 67.58 kg التي حصلنا عليها في المسألة (ب) .

الانحراف المعياري النظري (الخطأ المعياري) لتوزيع المعاينة للأوساط ، والمعروف بـ σ_p ، يجب أن يساوى σ/\sqrt{N} ، وحيث أن الانحراف المعياري للمجتمع $\sigma = 2.92$ kg ، وبما أن $\sigma/\sqrt{N} = 2.92/\sqrt{4} = 1.46$ kg فإن هذا يتفق مع القيمة 1.41 kg والتي حصلنا عليها في الجزء (ب) .

الفروق ترجع إلى حقيقة أن هناك 30 عينة فقط تم اختبارها وأن حجم هذه العينة يعتبر صغيراً .

توزيع المعاينة للنسب :

٨ - ٧ في 120 رمية لعملة متوازنة أوجد احتمال (أ) بين 40% و 60% ستكون صور (ب) $\frac{5}{8}$ أو أكثر ستكون صور .

الحل :

نعتبر أن الـ 120 رمية للعملة كمية من المجتمع غير المحدود المكونة من جميع الرميات الممكنة للعملة . في هذا المجتمع تكون احتمال الصورة $p = \frac{1}{2}$ واحتمال البكثابة $q = 1 - p = \frac{1}{2}$

(أ) المطلوب هو أن يكون الصور في الـ 120 رمية بين 48 و 72 و $(40\% \times 120) = 48$ و $(60\% \times 120) = 72$. سنسير في الحل كما في الفصل السابع ، باستخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين . وبما أن عدد الصور هو متغير متقطع ، فإننا نطلب احتمال أن يقع عدد الصور بين 47.5 و 72.5 .

$$\mu = Np = 120(\frac{1}{2}) = 60, \text{ and } \sigma = \sqrt{Nqp} = \sqrt{(120)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} = 5.48.$$

$$47.5 \text{ بوحدهات معيارية} = -2.28 = (47.5 - 60)/5.48$$

$$72.5 \text{ بوحدهات معيارية} = 2.28 = (72.5 - 60) / 5.48$$

الاحتمال المطلوب :

$$= (\text{المساحة تحت المنحنى المعتدل بين } z = -2.28$$

$$\text{و } z = 2.28) .$$

$$= 2 \times (\text{المساحة بين } z = 0 \text{ و } z = 2.28)$$

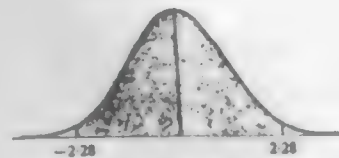
$$= 2(0.4887) = 0.9774$$

طريقة أخرى :

$$\mu_p = p = \frac{1}{2} = 0.50, \sigma_p = \sqrt{pq/N} = \sqrt{\frac{1}{4}/120} = 0.0456.$$

$$40\% \text{ مبراً عنها بوحدهات معيارية} = -2.19 = (0.40 - 0.50)/0.0456$$

$$60\% \text{ مبراً عنها بوحدهات معيارية} = 2.19 = (0.60 - 0.50)/0.0456$$



الفتة (.
٢ - والتي
أنه كل الرقم
في أي مكان

مأينة

بـ

16.	11, 6
17.	70, 5
18.	74, 2
19.	79, 4
20.	58, 6
21.	75, 7
22.	06, 3
23.	67, 0
24.	31, 7
25.	11, 6
26.	03, 51
27.	53, 8
28.	23, 2
29.	98, 54
30.	08, 12

في (أ) .
ريقة الترميز

للمبارى

وبهذا فإن الاحتمال المطلوب هو المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين $(z = -2.19$ و $z = 2.19)$ $= 2(0.4857) = 0.9714$

على الرغم من أن هذه النتيجة دقيقة إلى رقمين عشريين ، ولكنها لا تتفق بالضبط حيث أننا لم نستخدم الحقيقة وهي أن النسب في الواقع متغير متقطع . ولأخذ ذلك في الاعتبار نطرح $\frac{1}{2N} = \frac{1}{2(120)}$ من 0.40

ونضيف $\frac{1}{2N} = \frac{1}{2(120)}$ إلى 0.60 . وبهذا فإن النسب المطلوبة معبراً عنها بوحدة قياسية هي ، معلومة أن $1/240 = 0.00417$

$$\frac{0.40 - 0.00417 - 0.50}{0.0456} = -2.28 \quad \text{and} \quad \frac{0.60 + 0.00417 - 0.50}{0.0456} = 2.28$$

وبهذا نصل إلى اتفاق مع الطريقة الأولى .

لاحظ أن $(0.40 - 0.00417)$ و $(0.60 + 0.00417)$ تقابل النسب $47.5/120$ و $72.5/120$ في الطريقة الأولى أعلاه .

$$\begin{aligned} \text{(ب) باستخدام الطريقة الثانية في (أ) ، نجد معلومة أن } 1/8 = 0.6250 \\ = \frac{0.6250 - 0.00417 - 0.50}{-0.0456} = 2.65 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{الاحتمال المطلوب} &= (\text{المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى اليمين من } z=2.65) \\ &= (\text{المساحة إلى اليمين من } z=0) - (\text{المساحة بين } z=0 \text{ و } z=2.65) \\ &= 0.5 - 0.4960 = 0.0040 \end{aligned}$$

٨ - ٨ قام كل شخص من مجموعة مكونة من 500 شخص يقذف عملة متوازنة 120 مرة . ما هو العدد المتوقع للأشخاص الذين يقررون أن

(أ) بين 40% و 60% من رمياتهم أظهرت الصورة ؟

(ب) $1/8$ أو أكثر من رمياتهم أظهرت الصورة ؟

الحل :

هذه المسألة لها علاقة وثيقة بالمسألة السابقة . نعتبر هنا أن هناك 500 عينة ، حجم كل منها 120 ، مسحوبة من مجتمع غير محدود يمثل جميع الرميات الممكنة للعملة .

(أ) الجزء (أ) من المسألة ٨ - ٧ يوضح أنه في جميع العينات الممكنة ، والتي تتكون كل منها من 120 رمية لعملة ، فإنه يمكن أن نتوقع أن نجد 97.74% حيث تكون نسبة ظهور الصورة فيها يقع بين 40% و 60% في 500 عينة يمكن أن نتوقع وجود حوالي 97.74% من 500 أو 489 عينة لها هذه الخاصية . ويترتب على ذلك أن حوالي 489 شخص من المتوقع أن يقرروا أن تجربتهم عنها ما بين 40% إلى 60% صورة .

وجدير بالملاحظة أن $500 - 489 = 11$ شخص من المتوقع أن يقرروا أن نسبة الصورة لا تقع بين 40% و 60% . مثل هؤلاء الأشخاص قد ينتهون إلى عملياتهم غير متوازنة على الرغم من أنها ليست كذلك . وهذا النوع من الخطأ هو الخطأ الذي تظهر كلما تعاملنا مع الاحتمالات .

(ب) بنفس المبررات كما في (أ) ، ننتج أن $2 = (0.0040)(500)$ شخص سوف يقررون أن $8/8$ أو أكثر من رمياتهم ينتج عنها ظهور الصورة .

٨-٩ وجد أن 2% من الأدوات المنتجة بواسطة إحدى الآلات تالفة . ما هو احتمال أن يكون في شحنة مكونة من 400 وحدة من هذه الأدوات (أ) 2% أو أكثر (ب) 3% أو أقل يظهر أنها تالفة .

الحل :

$$\mu_p = p = 0.02 \text{ and } \sigma_p = \sqrt{pq/N} = \sqrt{0.02(0.98)/400} = 0.14/20 = 0.007$$

(أ) باستخدام التصحيح للمتغيرات المتقطعة ، $1/2N$ ، أن $1/800 = 0.00125$ فإننا نحصل على

$$= \frac{0.03 - 0.00125 - 0.02}{0.007} = 1.25 \text{ معبراً عنها بوحدات قياسية } = 0.03 - 0.00125 - 0.02$$

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى يسار $z = 1.25$) $0.1056 = z$

وإذا لم يستخدم التصحيح فإن ما كنا سنحصل عليه هو 0.0764 .

طريقة أخرى :

عدد الأدوات التالفة = 12 = (3% من 400) . بافتراض أن المتغير متصل ، فإن 12 أو أكثر من الأدوات تعني 11.5 أو أكثر .

$$\bar{X} = (2\% \text{ of } 400) = 8, \text{ and } \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(400)(0.02)(0.98)} = 2.8.$$

إذن 11.5 بوحدات معيارية = $1.25 = (11.5 - 8)/2.8$ ، وكما سبق فإن الاحتمال المطلوب هو 0.1056

$$(ب) (0.02 + 0.00125) = 0.02125 \text{ معبراً عنها بوحدات قياسية } = \frac{0.02 + 0.00125 - 0.02}{0.007} = 0.18$$

الاحتمال المطلوب = « المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى اليسار من $z = 0.18$ » $0.500 + 0.0714 = 0.5714$

وإذا لم يستخدم التصحيح فإن ما كنا سنحصل عليه هو 0.5000

الطريقة الثانية في الجزء (أ) يمكن أيضاً استخدامها .

٨-١٠ أظهرت نتيجة الانتخابات أن مرشحاً معيناً قد حصل على 46% من الأصوات . في مجموعة مكونة من (أ) 200 ،

(ب) 1000 شخص اختبروا بصورة عشوائية من مجتمع الناخبين أوجد احتمال أنها سوف تظهر أغلبية في الأصوات هذا المرشح .

الحل :

$$\mu_p = p = 0.46 \text{ and } \sigma_p = \sqrt{pq/N} = \sqrt{0.46(0.54)/200} = 0.0352 \quad (أ)$$

وبما أن $1/2N = 1/400 = 0.0025$ ، فإن الأغلبية تظهر في العينة إذا كانت النسبة في صالح المرشح هي $0.5025 = (0.50 + 0.0025)$ أو أكثر . (هذه النسبة يمكن الحصول عليها كذلك بالتحقق أن 101 أو أكثر تعبر عن أغلبية ولكن لو أردنا التعبير عن ذلك كتغير متصل فنعتبره 100.5 ، وبهذا فإن النسبة هي $100.5/200 = 0.4025$)

$$\begin{aligned} \text{إذن } 0.5025 \text{ معبراً عنها بوحدات معيارية} &= (0.5025 - 0.46)/0.0352 = 1.21 \\ \text{الاحتمال المطلوب} &= \text{« المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى اليمين } (z = 1.21) \\ &= 0.5000 - 0.3869 = 0.1131 \end{aligned}$$

$$\mu_p = p = 0.46, \sigma_p = \sqrt{pq/N} = \sqrt{0.46(0.54)/1000} = \quad (ب)$$

$$\begin{aligned} 0.5025 \text{ معبراً عنها بوحدات معيارية} &= (0.5025 - 0.46)/0.0158 = 2.69 \\ \text{الاحتمال المطلوب} &= \text{« المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى اليمين } (z = 2.69) \\ &= 0.5000 - 0.4964 = 0.0036 \end{aligned}$$

توزيع المعاينة لفرق والمجموع :

٨-١١ إذا كان U_1 متغيراً يعبر عن أى عنصر من عناصر المجتمع 3, 7, 8 وكان U_2 متغيراً يعبر عن عناصر المجتمع 2, 4 احسب (أ) μ_{U_1} (ب) μ_{U_2} (ج) $\mu_{U_1 - U_2}$ (د) σ_{U_1} (هـ) σ_{U_2} (و) $\sigma_{U_1 - U_2}$

الحل :

$$\mu_{U_1} = U_1 \text{ متوسط المجتمع} = \frac{1}{4}(3 + 7 + 8) = 6 \quad (أ)$$

$$\mu_{U_2} = U_2 \text{ متوسط المجتمع} = \frac{1}{2}(2 + 4) = 3 \quad (ب)$$

(ج) المجتمع المكون من الفروق بين أى عنصر من U_1 وأى عنصر من U_2 هو

$$\begin{array}{ccc|ccc} 3 & - & 2 & 7 & - & 2 & 8 & - & 2 & & 1 & - & 5 & 6 \\ 3 & - & 4 & 7 & - & 4 & 8 & - & 4 & \text{or} & 1 & - & 3 & 4 \end{array}$$

$$\mu_{U_1 - U_2} \text{ (} U - U \text{) متوسط} = \frac{1 + 5 + 6 + (-1) + 3 + 4}{6} = 3 \quad \text{إذن}$$

$$\mu_{U_1 - U_2} = \mu_{U_1} - \mu_{U_2} \quad \text{وهذا يوضح الصيغة العامة}$$

$$\sigma_{U_1}^2 \text{ تباين المجتمع} = U_1 \dots \frac{(3 - 6)^2 + (7 - 6)^2 + (8 - 6)^2}{3} = \frac{14}{3}, \text{ or } \sigma_{U_1} = \sqrt{\frac{14}{3}} \quad (د)$$

$$\sigma_{U_2}^2 \text{ تباين المجتمع} = U_2 \dots \frac{(2 - 3)^2 + (4 - 3)^2}{2} = 1, \text{ or } \sigma_{U_2} = 1 \quad (هـ)$$

$$= \frac{(1-3)^2 + (5-3)^2 + (6-3)^2 + (1-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2}{6} = \frac{17}{3}, \text{ or } \sigma_{U_1, U_2} = \sqrt{\frac{17}{3}} \text{ (ج)}$$

$$\sigma_{U_1, U_2} = (U_1 - U_2) \text{ تباين المجتمع} =$$

وهذا يوضح الصيغة العامة للعينات المستقلة $\sigma_{U_1, U_2} = \sqrt{\sigma_{U_1}^2 + \sigma_{U_2}^2}$ كما هو موضح في الأجزاء من (د) و (هـ)

الخ المرشح
أن 101
النسبة هي

٨ - ١٢ إذا كان متوسط العمر الانتاجي للمبات كهربائية من إنتاج المصنع A هو 1400 ساعة وانحرافها المعياري 200 ساعة، بينما تلك التي ينتجها المصنع B فإن متوسط عمرها الانتاجي هو 1200 وانحرافها المعياري 100. إذا سحبت عينة عشوائية مكونة من 125 لمبة من كل مصنع وتم اختبارها، ماهو احتمال أن يكون متوسط العمر الانتاجي للمبات A على الأقل (أ) 160 ساعة (ب) 250 ساعة أطول من العمر الانتاجي للمبات B ؟

الحل :

اعتبر أن \bar{X}_A تمبر عن متوسط العمر الإنتاجي للمينة A و \bar{X}_B تمبر عن متوسط العمر الانتاجي للمينة B إذن

$$\begin{array}{ccccccc} \mu_{\bar{X}_A, \bar{X}_B} & \mu_{\bar{X}_A} & \mu_{\bar{X}_B} & 1400 & 1200 & 200 h \\ \sigma_{\bar{X}_A, \bar{X}_B} & \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{N_A} + \frac{\sigma_B^2}{N_B}} & = & \sqrt{\frac{(100)^2}{125} + \frac{(200)^2}{125}} & = & 20 h \end{array}$$

مع 4, 2

المتغير المعياري الفرق بين وسطين هو

$$z = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_{\bar{X}_A, \bar{X}_B})}{\sigma_{\bar{X}_A, \bar{X}_B}} = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - 200}{20}$$

والذي يقدر بصورة كبيرة من التوزيع الطبيعي .

$$(أ) \text{ فرق الـ } 160 \text{ ساعة بوحدات معيارية} = -2 = (160 - 200)/20$$

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى يمين $z = -2$)

$$= 0.500 + 0.4772 = 0.9772$$

$$(ب) \text{ فرق الـ } 250 \text{ ساعة بوحدات معيارية} = 2.50 = (250 - 200)/20$$

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى يمين $z = 2.50$)

$$= 0.5000 - 0.4938 = 0.0062$$

($\sigma_{U_1}^2$)

٨ - ١٣ كرة مصبوبة من الزنك من نوع معين تزن 0.50 N بانحراف معياري 0.02 N في مجموعتين، بكل منها 1000 كرة ماهو احتمال أنهما سوف يختلفان في الوزن بأكثر من 2N.

($\sigma_{U_2}^2$)

الحل :

اعتبر أن \bar{X}_1 تعبر عن متوسط وزن الكرة من المجموعة الأولى و \bar{X}_2 تعبر عن متوسط وزن الكرة في المجموعة الثانية . إذن

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} &= \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = 0.50 - 0.50 = 0 \\ \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} &= \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}} = \sqrt{\frac{(0.02)^2}{1000} + \frac{(0.02)^2}{1000}} = 0.000895 \end{aligned}$$

المتغير المعياري للفرق بين وسطين هو $z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0}{0.000895}$ ، يقتر ب بشكل كبير من التوزيع الطبيعي .

اختلاف مقداره $2N$ في المجموعتين يكافئ فرقاً مقداره $2/1000 = 0.002$ في الأوساط . وهذا يمكن

أن يحدث في حالة أما إذا كانت $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq 0.002$ أو $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq -0.002$ ، بمعنى ،

$$z \leq \frac{-0.002 - 0}{0.000895} = -2.23 \quad \text{أو} \quad z \geq \frac{0.002 - 0}{0.000895} = 2.23$$

إذن

$$\Pr\{z \geq 2.23 \text{ or } z \leq -2.23\} = \Pr\{z \geq 2.23\} + \Pr\{z \leq -2.23\} = 2(0.5000 - 0.4871) = 0.0258$$

٨ - ١٤ A و B يلعبان مباراة في « الصورة أو الكتابة » ، حيث يقوم كل منهم برمي 50 عملة A . سوف يكسب المباراة إذا ظهر في رمياته 5 صور أو أكثر من تلك التي حصل عليها B ، وبخلاف ذلك يكسب B . حدد نسبة المضاربة ضد A أن يكسب أي مباراة معينة .

الحل :

إذا كانت P_A تعبر عن نسبة الصورة التي حصل عليها A و P_B تعبر عن نسبة الصورة التي حصل عليها B .

إذا افترضنا أن العملات كلها غير متحيزة ، فإن احتمال ظهور الصورة p هو $1/2$. إذن

$$\mu_{P_A - P_B} = \mu_{P_A} - \mu_{P_B} = 0 \quad \text{and} \quad \sigma_{P_A - P_B} = \sqrt{\sigma_{P_A}^2 + \sigma_{P_B}^2} = \sqrt{\frac{pq}{N_A} + \frac{pq}{N_B}} = \sqrt{\frac{2(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}{60}} = 0.10$$

المتغير المعياري للفرق بين نسبتين هو $z = (P_A - P_B - 0)/0.10$.

باعتبار أن المتغير متغير مستمر ، فإن 5 أو أكثر صورة تعبر عن 4.5 أو أكثر صورة ، بحيث أن الفرق بين النسب يجب أن يكون $4.5/50 = 0.09$ أو أكثر . بمعنى أن z أكبر من أو يساوي

$$(z \geq 0.9) \quad \text{أو} \quad (0.09 - 0)/0.10 = 0.9$$

وا احتمال ذلك هو المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى يمين $z = 0.9$ ، والتي تساوي

$$(0.5000 - 0.3159) = 0.1841$$

وهذا تكون نسبة المضاربة ضد A أن يكسب هي $0.1841 : 0.8159 = 0.1841 : (1 - 0.1841)$

أي 4.43 إلى 1 .

٨ - ١٥ قيست مسافتان فكانتا 27.3 mm بانحراف معياري (خطأ معياري) قدره 0.16 mm و 15.6 mm بانحراف معياري (خطأ معياري) قدره 0.08 mm .

حدد الوسط الحسابي والانحراف المعياري (أ) للمجموع (ب) للفرق بين المسافتين .

الحل :

إذا عبرنا عن المسافتين بالرمز D_1 و D_2 إذن

$$\begin{aligned} \mu_{D_1+D_2} &= \mu_{D_1} + \mu_{D_2} = 27.3 + 15.6 = 42.9 \text{ mm} \\ \sigma_{D_1+D_2} &= \sqrt{\sigma_{D_1}^2 + \sigma_{D_2}^2} = \sqrt{(0.16)^2 + (0.08)^2} = 0.18 \text{ mm} \\ \mu_{D_1-D_2} &= \mu_{D_1} - \mu_{D_2} = 27.3 - 15.6 = 11.7 \text{ mm} \\ \sigma_{D_1-D_2} &= \sqrt{\sigma_{D_1}^2 + \sigma_{D_2}^2} = \sqrt{(0.16)^2 + (0.08)^2} = 0.18 \text{ mm} \end{aligned} \quad \begin{matrix} (أ) \\ \\ (ب) \end{matrix}$$

٨ - ١٦ نوع معين من اللمبات الكهربائية لها عمر إنتاجي 1500 ساعة وانحرافها المعياري 150 ساعة . تم توصيل ثلاث لمبات معاً بحيث إذا احترقت إحداها ، فإن الأخيرتين سيحترقان أيضاً . افترض أن العمر الإنتاجي يتوزع توزيعاً طبيعياً ، ماهو احتمال أن تستمر الإضاءة (أ) على الأقل 5000 ساعة (ب) 4200 ساعة على الأكثر ؟

الحل :

افترض ان الأعمار الإنتاجية هي L_1, L_2, L_3 . إذن

$$\begin{aligned} \mu_{L_1+L_2+L_3} &= \mu_{L_1} + \mu_{L_2} + \mu_{L_3} = 1500 + 1500 + 1500 = 4500 \text{ hours} \\ \sigma_{L_1+L_2+L_3} &= \sqrt{\sigma_{L_1}^2 + \sigma_{L_2}^2 + \sigma_{L_3}^2} = \sqrt{3(150)^2} = 260 \text{ hours} \end{aligned}$$

(أ) 5000 ساعة معبراً عنها بوحدة معيارية $= (5000 - 4500)/260 = 1.92$.

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى يمين $z = 1.92$)

$$= 0.5000 - 0.4726 = 0.0274$$

(ب) 4200 ساعة معبراً عنها بوحدة معيارية $= (4200 - 4500)/260 = -1.15$.

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى يمين $z = -1.15$)

$$= 0.5000 - 0.3749 = 0.1251$$

مسائل متنوعة

٨ - ١٧ بالرجوع إلى المسألة ٨ - ١ أوجد (أ) الوسط الحسابي لتوزيع المعاينة للبيانات ، (ب) الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للبيانات أي ، الخطأ المعياري للبيانات .

المسألة

يتم

لذا يمكن

Pr:

يكتب ،
عدد نسبة

لن حصل

$$\mu_{P_A - P_B} = \mu_{P_A}$$

الفرق بين

$$(1 - 0)$$

الحل :

(أ) تباينات المعاينة المقابلة لكل من الـ 25 عينة في المسألة ٨ - ١ هي

0	0.25	4.00	9.00	20.25
0.25	0	2.25	6.25	16.00
4.00	2.25	0	1.00	6.25
9.00	6.25	1.00	0	2.25
20.25	16.00	6.25	2.25	0

متوسط توزيع المعاينة للتباينات هو

$$\mu_{s^2} = \frac{\text{مجموع كل التباينات في الجدول أعلاه}}{25} = \frac{135}{25} = 5.40$$

وهذا يوضح حقيقة أن $\sigma^2/N = (N-1)\mu_{s^2}$ ، حيث أن $N = 2$ و $\sigma^2 = 10.8$ (أنظر المسألة ٨ - ١) ، الجانب الأيسر هو $1/2(10.8) = 5.4$.

النتيجة تظهر تفضيل تعريف التباين المصحح للعينات مثل $s^2 = \frac{N}{N-1} \mu_{s^2}$.

وهذا يؤدي إل أن $\mu_{s^2} = \sigma^2$ (أنظر أيضاً الملاحظات صفحة ١١٤) . ويجب ملاحظة أن تباين المجتمع يجب أن يعرف كما عرفناها سابقاً ولكن التصحيح يتم على تباين العينة).

(ب) تباين توزيع المعاينة للتباينات μ_{s^2} نحصل عليه بطرح الوسط 5.40 من كل من الـ 25 رقم في الجدول السابق ، تربيع هذه الأرقام ، ثم جمعها ، ثم قسمة الناتج على 25 . وهذا $\sigma_{s^2}^2 = 575.75/25 = 23.03$ or $\sigma_{s^2} = 4.80$

٨ - ١٨ حل المعادلة السابقة إذا كان السحب بدون إرجاع .

الحل :

(أ) هناك 10 عينات تبايناتها مغطاة بالأرقام أعلى (أو أسفل) قطر الأصفار في جدول المسألة ٨ - ١٧ (أ) . إذن

$$\mu_{s^2} = \frac{0.25 + 4.00 + 9.00 + 20.25 + 2.25 + 6.25 + 16.00 + 1.00 + 6.25 + 2.25}{10} = 6.75$$

وهذه حالة خاصة من النتيجة العامة $\mu_{s^2} = \left(\frac{N_p}{N_0-1}\right)\left(\frac{N-1}{N}\right)\sigma^2$ التي يمكن إثباتها بوضع $N_p = 5$ ،

$N = 2$ و $\sigma^2 = 10.8$ في الجانب الأيمن من μ_{s^2} لنحصل على $\mu_{s^2} = (1/2)(1/2)(10.8) = 6.75$

(ب) لإطرح 6.75 من كل من الـ 10 أرقام أعلى قطر الأصفار في المسألة ٨ - ١٧ (أ) ، تربيع هذه الأرقام ، بالجمع والقسمة على 10 نحصل على $\sigma_{s^2}^2 = 39.675$ or $\sigma_{s^2} = 6.30$

٨ - ١٩ إذا كان الانحراف المعياري لأوزان مجتمع كبير جداً من الذكور هو 10.0 kg . سمحت من هذا المجتمع عينات حجم كل منها 200 من الذكور ، وحسب الانحراف المعياري للأوزان في كل عينة . أوجد

(أ) الوسط الحسابي ، (ب) الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للانحراف المعياري .

الحل :

من الممكن أن نعتبر أن المعاينة آما من مجتمع غير محدود أو بدون إرجاع من مجتمع محدود . من صفحة ٢٣٠ نحصل على :

(أ) متوسط توزيع المعاينة للانحراف المعياري $\mu_s = \sigma = 10.0 \text{ kg}$.

(ب) الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للانحراف المعياري $\sigma_s = \sigma/\sqrt{2N} = 10/\sqrt{400} = 0.50 \text{ kg}$.

٨ - ٢٠ ما هي النسبة المئوية للعينات في المسألة السابقة التي لها انحراف معياري

(أ) أكبر من 11.0 kg (ب) أقل من 8.8 kg ؟

الحل :

توزيع المعاينة للانحراف المعياري يمكن تقريبه بالتوزيع الطبيعي الذي متوسطه 10.0 kg وانحرافه المعياري 0.50 kg .

(أ) 11.0 kg معبراً عنها بوحدات معيارية $= 2.0 = (11.0 - 10.0)/0.50$. المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى يمين $z = 2.0$ هي $0.0228 = (0.5 - 0.4772)$ وهذا فإن النسبة المطلوبة هي 2.3% .

(ب) 8.8 kg معبراً عنها بوحدات معيارية $= -2.4 = (8.8 - 10.0)/0.50$. المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى يسار $z = -2.4$ هي $0.0082 = (0.5 - 0.4918)$ وهذا فإن النسبة المطلوبة هي 0.8% .

مسائل إضافية

توزيع المعاينة للأوساط :

٨ - ٢١ يتكون مجتمع من أربعة أرقام 3, 7, 11, 15 . اعتبر كل العينات الممكنة ذات الحجم إثنين والتي يمكن سحبها بدون إرجاع من هذا المجتمع .

أوجد (أ) متوسط المجتمع ، (ب) الانحراف المعياري للمجتمع ، (ج) متوسط توزيع المعاينة للأوساط ، (د) الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للأوساط .

أثبت (ج) ، (د) مباشرة من (أ) و (ب) باستخدام صيغة ملائمة .

ج : (أ) 0.9 (ب) 4.47 (ج) 9.0 (د) 3.16

٨ - ٢٢ حل المسألة ٨ - ٢١ إذا كانت المعاينة بدون إرجاع .

ج : (أ) 9.0 (ب) 4.47 (ج) 9.0 (د) 2.58

$$\sigma^2 = 10$$

ن المجتمع يجب

قم في الجدول

١٧ - (أ) .

$$\mu_{s2} = 0$$

$$Np = 5$$

$$\mu_{s2} = (2)$$

، تربيع هذه

ع عينات حجم

٨ - ٢٣ وزن 1500 كرة حديدية يتوزع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي 22.40 newtons وانحرافه المعياري 0.048 newtons . سمحت 300 عينة حجم كل منها 36 من هذا المجتمع ، أوجد المتوسط المتوقع والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للأوساط إذا كانت المعاينة (أ) بإرجاع (ب) بدون إرجاع .
ج : (أ) $\mu_x = 22.40 \text{ N}, \sigma_x = 0.008 \text{ N}$ (ب) $\mu_x = 22.40 \text{ N}, \sigma_x =$

٨ - ٢٤ حل المسألة ٨ - ٢٣ إذا كان المجتمع مكوناً من 72 من الكرات الحديدية .
ج : (أ) $\mu_x = 22.4 \text{ N}, \sigma_x = 0.008 \text{ N}$ (ب) $\mu_x = 22.4 \text{ N}, \sigma_x = 0.0057 \text{ N}$

٨ - ٢٥ في المسألة ٨ - ٢٣ كم من العينات العشوائية أوساطها (أ) بين 22.39 N و 22.41 N (ب) أكبر من 22.42 N (ج) أقل من 22.37 N (د) أقل من 22.38 N أو أكبر من 22.41 N ؟
ج : (أ) 237 (ب) 2 (ج) لا يوجد (د) 34

٨ - ٢٦ لمبات من نوع معين من إنتاج إحدى الشركات متوسط عمرها الإنتاجي 800 h وانحرافها المعياري 60 h . في عينة عشوائية مكونة من 10 لمبة أخذت من المجموعة ، أوجد احتمال أن يكون متوسط عمرها الإنتاجي (أ) بين 790 و 810 h ، (ب) أقل من 785 h ، (ج) أكبر من 820 h (د) بين 770 و 830 h .
ج : (أ) 0.4972 (ب) 0.1587 (ج) 0.0918 (د) 0.9544

٨ - ٢٧ حل المسألة ٨ - ٢٦ إذا أخذت عينة من 64 لمبة . اشرح الفروق .
ج : (أ) 0.8164 (ب) 0.0228 (ج) 0.0038 (د) 1.0000

٨ - ٢٨ إذا كان متوسط وزن طرود مرسله إلى أحد المتاجر هو 300 N وانحرافها المعياري 50 N . اختير 25 طرداً بصورة عشوائية ووضعت في مصعد لرفعها ما هو احتمال أن وزن الطرود سوف يتجاوز حدود الامان المحددة للمصعد والمقررة بـ 8200 N ؟
ج : 0.0026

الأرقام العشوائية :

٨ - ٢٩ حل المسألة ٨ - ٦ باستخدام مجموعات مختلفة من الأرقام العشوائية واختيار (أ) 15 ، (ب) 30 ، (ج) 45 ، (د) 60 عينة حجم كل منها 4 ، مع الإرجاع .
قارن بالنتائج النظرية في كل حالة .

٨ - ٣٠ حل المسألة ٨ - ٢٩ باختيار عينات ذات الحجم (أ) 2 (ب) 8 ، بإرجاع بدلا من 4 .

٨ - ٣١ حل المسألة ٨ - ٦ إذا كانت المعاينة بدون إرجاع . قارن بالنتائج النظرية .

٨ - ٣٢ (أ) اشرح كيفية اختيار 30 عينة حجم كل منها 2 من التوزيع بالمسألة ب - ٦١ الفصل الثالث .
(ب) احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للأوساط الذي حصلت عليه وقارن بالنتائج النظرية .

٨ - ٣٣ حل المسألة السابقة باستخدام عينات حجمها 4 .

توزيع المعاينة للنسب :

٨ - ٣٤ أوجد احتمال أن يكون بين 400 طفل سوف يولدون (أ) أقل من 40% سيكونوا أولاداً (ب) بين 43% و 57% سيكونون بنات . (ج) أكبر من 54% سيكونون أولاداً . مفترضاً احتمالات متساوية لولادة الأولاد والبنات .

ج : (أ) 0.0019 (ب) 0.9596 (ج) 0.1151

٨ - ٣٥ من بين 1000 عينة بكل منها 200 طفل ، في كم تتوقع أن تجد

(أ) أقل من 40% أولاد (ب) بين 40% و 60% بنات (ج) 53% أو أكثر بنات

ج : (أ) 2 (ب) 996 (ج) 218

٨ - ٣٦ حل المسألة ٨ - ٣٤ : إذا كانت العينة 100 بدلا من 200 طفل ووضح الفروق في النتائج .

ج : (أ) 0.0179 (ب) 0.8664 (ج) 0.1841

٨ - ٣٧ إناء يحتوي على 80 بلية منها 60% لونها أحمر و 40% لونها أبيض . من بين 50 عينة كل منها مكون من 20 بلية سميت بإرجاع من الإناء ، كم من العينات نتوقع أن تتكون من (أ) عدد متساو من البلى الأحمر والأبيض (ب) 12 لونها أحمر و 8 لونها أبيض (ج) 8 لونها أحمر و 12 لونها أبيض (د) 10 أو أكثر من البلى الأبيض ؟

ج : (أ) 6 (ب) 9 (ج) 2 (د) 12

٨ - ٣٨ صمم تجربة تهدف إلى توضيح الإجابة على المسألة ٨ - ٣٧ . بدلا من البلى الأحمر والأبيض يمكنك استخدام قطع من الورق حيث الرمز R أو W مكتوب حسب النسب الصحيحة . ماهو الخطأ الذي يمكن أن ينتج عن استخدام مجموعتين من العملات ؟

٨ - ٣٩ أرسل مصنع 1000 طرد يتكون كل منها من 100 لمبة كهربائية إذا كانت 5% من اللمبات تالفة حسب التوزيع الطبيعي . ماهو عدد الطرود التي تتوقع أن يكون بها (أ) أقل من 90 لمبة صالحة (ب) 98 أو أكثر من لمبة صالحة .

ج : (أ) 6 (ب) 125

توزيع المعاينة لفروق والمجموع :

٨ - ٤٠ A و B ينتجان نوعين من الكابلات ، متوسط مقاومتها للكسر هو 4000 N و 4500 N وانحرافاتها المياريّة 300 N و 200 N على الترتيب . إذا اختير 100 كابل من إنتاج A و 50 كابل من إنتاج B ، ماهو احتمال أن يكون متوسط مقاومتها للكسر لكابلات B .

(أ) على الأقل 600 N أكبر من A . (ب) على الأقل 450 N أكبر من A ؟

ج : (أ) 0.0077 (ب) 0.8869

٨ - ٤١ ماهو الاحتمالات في المسألة ٨ - ٤٠ : إذا كان 100 كابل من النوعين قد تم اختيارهما ؟ ضع في الاعتبار الفروق.

ج : (أ) 0.0028 (ب) 0.9172

٨ - ٤٢ متوسط درجات طلبية في امتحان قدرات هو 72 نقطة وانحرافها المعياري 8 نقط . في مجموعتين من الطلبة ، مكونة من 28 و 36 طالباً على الترتيب ، ماهو احتمال أن تختلف في متوسط درجاتها (أ) 3 أو أكثر نقطة (ب) 6 أو أكثر نقطة (ج) بين 2 و 5 نقطة ؟

ج : (أ) 0.2150 (ب) 0.0064 (ج) 0.4504

لمبارى
انحراف

22.42

في عينة
830 h

25 طرداً
دقة للصمود

(ج) 45

نتائج النظرية.

٨ - ٤٣ وعاء يحتوي على 60 بل أحمر و 40 بل أبيض . مجموعتان تتكون كل منهما من 30 من البيل بحيث بإرجاع من الوعاء وتم تسجيل ألوانهما . ما هو احتمال أن تكون المجموعتان مختلفتين عن بعض ب 8 أو أكثر من البيل الأحمر ؟
ج : 0.0482

٨ - ٤٤ حل المسألة ٨ - ٤٣ إذا كانت المعاينة بدون إرجاع في كل مجموعة
ج : 0.0136

٨ - ٤٥ أظهرت نتائج الانتخابات أن مرشحاً معيناً حصل على 65% من الأصوات . في عيشتين عشوائيتين ، تتكون كل منها من 200 ناخب ، أوجد احتمال أن النتائج تشير إلى أكثر من 10% اختلاف في النسب التي صوتت لصالح المرشح .
ج : 0.0316

٨ - ٤٦ إذا كانت U_1 و U_2 مجموعتين من الأرقام في المسألة ٨ - ١١ أثبت أن (أ) $\mu_{U_1 + U_2} = \mu_{U_1} + \mu_{U_2}$
(ب) $\sigma_{U_1 + U_2} = \sqrt{\sigma_{U_1}^2 + \sigma_{U_2}^2}$

٨ - ٤٧ ثلاث مجموعات من الكتل وزنت فكانت متوسطاتها 62.34 kg ، 35.97 ، 20.48 وانحرافاتها المعيارية 0.54 kg ، 0.46 ، 0.21 على الترتيب . أوجد (أ) الوسط الحسابي (ب) الانحراف المعياري للأوزان
ج : (أ) 118.79 kg (ب) 0.74 kg

٨ - ٤٨ متوسط تيار بطارية هو 15.0 فولت وانحرافها المعياري 0.2 فولت . إذا وصلت أربع من هذه البطاريات على التوالي ما هو احتمال أن يكون المتوسط المجمع لتيارها هو 60.8 فولت أو أكثر ؟
ج : 0.0228

مسائل متنوعة

٨ - ٤٩ مجتمع يتكون من 7 أرقام متوسطها 40 وانحرافها المعياري 3 . إذا سحبت عينة حجمها 5 من المجتمع وحسب تباين كل عينة ، أوجد متوسط توزيع المعاينة للتباينات إذا كانت المعاينة (أ) بإرجاع (ب) بدون إرجاع .
ج : (أ) 7.2 (ب) 8.4

٨ - ٥٠ لمبات من نوع معين من إنتاج إحدى الشركات متوسط عمرها الإنتاجي 900 h وانحرافها المعياري 80 h . أرسلت الشركة 1000 مجموعة بكل مجموعة 100 لمبة . في كم مجموعة من الممكن أن نتوقع أن (أ) أن يزيد متوسط العمر الإنتاجي عن 910 h ، (ب) الانحراف المعياري يتجاوز 95 h ؟ ماهي الفروض التي يجب وضعها ؟
ج : (أ) 106 (ب) 4

٨ - ٥١ في المسألة ٨ - ٥٠ إذا كان وسيط العمر الإنتاجي هو 900 h في كم من المجموعات نتوقع أن يتجاوز وسيط العمر الإنتاجي 910 h ؟ قارن إجابتك بالمسألة ٨ - ٥٠ (أ) وفسر النتائج .
ج : 159

٨ - ٥٢ في امتحان عام تتوزع الدرجات توزيعاً طبيعياً بمتوسط 72 وانحراف معياري 8 . (أ) أوجد أقل درجة في الـ 20% الأوائل (ب) في عينة عشوائية من 100 طالب أوجد احتمال أن تكون أقل درجة في الـ 20% الأوائل أقل من 76 .
ج : (أ) 78.7 (ب) 0.0090

الفصل التاسع

نظرية التقدير الاحصائية

تقدير المعالم :

في الفصل الأخير شاهدنا كيف يمكن استخدام نظرية العينات للحصول على معلومات عن عينات مسحوبة بصورة عشوائية من مجتمع معلوم . ومن وجهة النظر العملية ، قد يكون أكثر أهمية أن يكون لدينا القدرة على استقاط المعلومات الخاصة بالمجتمع باستخدام عينات مسحوبة من هذا المجتمع . مثل هذه المشاكل يتم دراستها في إطار الاستدلال الاحصائي ، والذي يستخدم أساسيات نظرية العينات .

أحد المشاكل المهمة في الاستدلال الاحصائي هو تقدير معالم المجتمع أو باختصار المعالم (مثل متوسط المجتمع ، التباين ،) من احصائيات العينة المقابلة أو باختصار الاحصائيات (مثل متوسط العينة ، تباينها ،) .

وسوف نقوم بدراسة هذه المشكلة في هذا الفصل .

التقديرات غير المتحيزة :

إذا كان متوسط توزيع المعاينة الاحصائية يساوي معلمة المجتمع المقابلة ، فإن الاحصائية تسمى مقدرًا غير متحيزًا للمعلمة ، بخلاف ذلك يسمى مقدرًا متحيزًا . القيمة المقابلة لمثل هذه الاحصائية تسمى تقديرات غير متحيزة أو متحيزة على الترتيب .

مثال ١ : متوسط توزيع المعاينة للأوساط $\mu_X = \mu$ ، متوسط المجتمع (أنظر صفحة ٢٢٨) . بهذا فإن متوسط العينة \bar{X} هو تقدير غير متحيز لمتوسط المجتمع μ .

مثال ٢ : متوسط توزيع المعاينة للتباينات $\mu_{s^2} = \frac{N-1}{N} \sigma^2$ ، حيث σ^2 تباين المجتمع و N هو حجم

العينة (أنظر صفحة ٢٣٠) . بهذا فإن تباين العينة s^2 هو تقدير متحيز لتباين المجتمع σ^2 .

باستخدام التباين المعدل $s^2 = \frac{N}{N-1} \mu_{s^2}$ نجد أن $\mu_{s^2} = \sigma^2$ بحيث أن s^2 هو تقدير غير متحيز لـ σ^2 . ومع ذلك فإن $\hat{\sigma}$ بعد تقديرًا متحيزًا لـ σ .

وباستخدام تعبير التوقع (انظر الفصل السادس) يمكن القول بأن الاحصائية غير متحيزة إذا كان توقعها يساوي معلمة المجتمع المقابلة لها . بهذا فإن \bar{X} و s^2 هما غير متحيزين حيث أن $E\{\bar{X}\} = \mu$ و $E\{s^2\} = \sigma^2$.

التقدير الكفوء :

إذا كان توزيع المعاينة لاحصائيتين هما نفس الوسط الحسابي (أو التوقع) ، فإن الاحصائية ذات التباين الأقل تسمى مقدر كفوء للوسط الحسابي بينما الاحصائية الأخرى تسمى مقدر غير كفوء . القيمة المقابلة للاحصائية تسمى تقدير كفوء أو تقدير غير كفوء على الترتيب .

ن كل منها
ح المرشح .

١٤٧

المعاينة
ي للأوزان

طاريات على

تباين كل

٤ . أرسلت
وسط العمر

وسيط العمر

أقل درجة
في ٢٠ %

إذا اعتبرنا جميع الاحصائيات التي يكون توزيع المعاينة لها نفس الوسط الحسابي ، فإن الاحصائية ذات التباين الأقل تسمى أحيانا التقدير الأكثر كفاءة أو التقدير الأحسن لهذا الوسط .

مثال : توزيع المعاينة للوسط الحسابي والوسيط كلاهما له نفس الوسط الحسابي ، بالتحديد وسط المجتمع . ولكن

تباين توزيع المعاينة للأوساط أقل من تباين توزيع المعاينة للوسيطات (أنظر صفحة ٢٣٠) . وبذلك فإن متوسط العينة يعطي تقديرا كفواً لمتوسط المجتمع ، بينما وسيط العينة يعطي تقديرا غير كفوء له .

ومن بين جميع الاحصائيات التي تقدر متوسط المجتمع ، فإن متوسط العينة يعطي تقديرا أكثر كفاءة .

من الناحية العملية قد نستخدم تقدير غير كفوء نظرا للسهولة النسبية التي نحصل بها على بعض هذه التقديرات .

التقدير بنقطة والتقدير بفترة . المأمونية :

إذا قدرت معلمة المجتمع برقم واحد فهذا يسمى بتقدير المعلمة بنقطة . تقدير معلمة المجتمع المعطى برقين والذي يمكن اعتبار أن المعلمة تقع بينهما يسمى بتقدير بفترة لهذه المعلمة .

التقديرات بفترة تشير إلى معنوية أو دقة التقدير وبالتالي تفضل عن التقدير بنقطة .

مثال : إذا ذكرنا أن مسافة قيست وكانت 5.28 mm ، فإننا نمطي تقدير بنقطة . ومن الناحية الأخرى إذا

ذكرنا أن المسافة هي 5.28 ± 0.03 mm أي أن المسافة تقع بين 5.25 mm و 5.31 mm ، فإننا نمطي تقديرا بفترة . التعبير عن الخطأ أو الثقة في التقدير يسمى بالمأمونية .

تقدير فترة الثقة لمعالم المجتمع :

أعتبر أن μ_s نمر عن الوسط الحسابي لتوزيع المعاينة للاحصائية S ، σ_s الانحراف المعياري (الخطأ المعياري) لها ، فإذا كان توزيع المعاينة للاحصائية S تتوزع بشكل تقريبي كالتوزيع الطبيعي (والذي يعد صحيحا لكثير من الاحصائيات كاسبق أن رأينا إذا كان حجم العينة $N \geq 30$) فإننا يمكن أن نتوقع أن نجد قيمة معلمة للاحصائية S تقع في الفترات

$$\mu_s - \sigma_s \text{ to } \mu_s + \sigma_s, \mu_s - 2\sigma_s \text{ to } \mu_s + 2\sigma_s \text{ or } \mu_s - 3\sigma_s \text{ to } \mu_s + 3\sigma_s$$

حوالي 68.27%, 95.45% and 99.73% مرة على الترتيب

وبالمثل فإنه يمكننا أن نتوقع أن نجد أو يمكن أن نكون على ثقة من الحصول على μ_s في الفترات $S + \sigma_s, S - 2\sigma_s \text{ to } S + 2\sigma_s \text{ or } S - 3\sigma_s \text{ to } S + 3\sigma_s$ حوالي 68.27%, 95.45% and 99.73% مرة على الترتيب .

ولهذا السبب نسمى الفترات 68.27%, 95.45% and 99.73% بفترات الثقة لتقدير μ_s . حدود هذه الفترات ($S \pm \sigma_s, S \pm 2\sigma_s, S \pm 3\sigma_s$) تسمى الـ 99.73% ، 95.45% و 68.27% حدود الثقة أو كما تسمى أحيانا حدود الطمأنينة .

كذلك ، $S \pm 1.96\sigma_s$ و $S \pm 2.58\sigma_s$ هما 95% ، 99% (أو 0.95 ، 0.99) حدود ثقة لـ S . نسبة الثقة تسمى أحيانا مستوى الثقة . الأرقام 1.96, 2.58, في حدود الثقة تسمى معاملات الثقة أو القيم الحرجة ويرمز لها بالرمز z_c . من مستوى الثقة يمكن أن نحصل على معاملات الثقة ، والمكس . في الجدول ٩ - ١ نمطي قيم z المقابلة

القيم المختلفة لمستويات الثقة المستخدمة في الحياة العملية . لمستويات الثقة غير الموجودة بالجدول ، نحصل على قيم z_c من جداول مساحات المنحنى الطبيعي (أنظر المسألة ٩ - ٧) .

جدول ٩-١

مستوى الثقة	99.73%	99%	98%	96%	95.45%	95%	90%	80%	68.27%	50%
z_c	3.00	2.58	2.33	2.05	2.00	1.96	1.645	1.28	1.00	0.6745

تقدير فترة الثقة للأوساط :

إذا كانت الاحصائية S هي متوسط العينة \bar{X} ، فإن حدود الثقة بنسبة 95 % لتقدير متوسط المجتمع μ تعرف بـ $\bar{X} \pm 1.96\sigma_{\bar{X}}$ ونسبة 99 % هي $\bar{X} \pm 2.58\sigma_{\bar{X}}$ وبشكل أكثر عمومية ، فإن حدود الثقة تعرف بـ $\bar{X} \pm z_c\sigma_{\bar{X}}$ حيث z_c ، والذي يعتمد على مستوى الثقة الميمن المطلوب ، يمكن قراءته من الجدول أعلاه . باستخدام قيم $\sigma_{\bar{X}}$ الذي حصلنا عليه في الفصل الثامن ، فإن حدود الثقة لمتوسط المجتمع يعطى كما يلي :

$$(١) \quad \bar{X} \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

في حالة ما إذا كانت المعاينة من مجتمع غير محدود أو إذا كانت المعاينة باراجاع من مجتمع محدود . كما يعرف كما يلي :

$$(٢) \quad \bar{X} \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}}$$

إذا كانت المعاينة بدون ارجاع من مجتمع محدود حجمه N_p .

بشكل عام فإن الانحراف المعياري للمجتمع σ يكون غير معروف ، وللمحصل على حدود الثقة السابقة نستخدم التقدير من العينة \hat{s} أو s . ويمكن اثبات أنها مرضية على أساس أن $N \geq 30$. ولكن لقيم $N < 30$ ، فإن التقريب غير جيد ، ويجب استخدام نظرية العينات الصغيرة (أنظر الفصل الحادى عشر) .

فترة الثقة للنسب :

إذا كانت الاحصائية S هي نسبة « النجاح » في عينة حجمها N مسحوبة من مجتمع ذى حدين حيث P هي نسبة النجاح (احتمال النجاح) ، فإن حدود الثقة لـ p تعطى بالمعادلة $P \pm z_c\sigma_p$ حيث P هي نسبة النجاح في عينة حجمها N باستخدام قيم σ_p التي حصلنا عليها في الفصل الثامن ، فإن حدود الثقة لنسب المجتمع تعطى كما يلي :

$$(٣) \quad P \pm z_c \sqrt{\frac{pq}{N}} = P \pm z_c \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$$

في حالة ما إذا كانت المعاينة من مجتمع غير محدود أو إذا كانت المعاينة باراجاع من مجتمع محدود . وتعطى كما يلي :

$$(٤) \quad P \pm z_c \sqrt{\frac{pq}{N}} \sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}}$$

اين الأقل

ولكن

وبذلك

له

امة

كن اعتبار

الأخرى إذا

، 5.31 n

ارى (لها

يات كما سبق

في الفترات

بل الترتيب

هذه الفترات

تسمى أحيانا

د ثقة لـ S.

القيم الحرجة

يم z والمقابلة

إذا كانت المعاينة بدون ارجاع من مجتمع محدود حجمه N_p .

لحساب حدود الثقة هذه فيمكن استخدام تقدير العينة P لقيمة p ، والتي يمكن استخدامها بشكل مرضي لقيم $N \geq 30$.
طريقة أكثر دقة للحصول على حدود الثقة في هذه الحالة مطابقة في المسألة ٩-١٢ .

فترات الثقة للفروق والمجموع :

إذا كانت S_1 و S_2 احصائيتين من عينة توزيع معاينتها يقترب من التوزيع الطبيعي ، فإن حدود الثقة للفروق بين معالم المجتمع المقابلة لـ S_1 و S_2 تعطى كما يلي :

$$(٥) \quad S_1 - S_2 \pm z_c \sigma_{S_1 - S_2} = S_1 - S_2 \pm z_c \sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2}$$

بينما حدود الثقة لمجموع معالم المجتمع هي

$$(٦) \quad S_1 + S_2 \pm z_c \sigma_{S_1 + S_2} = S_1 + S_2 \pm z_c \sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2}$$

وذلك بافتراض أن العينات مستقلة (أنظر الفصل الثامن) .

على سبيل المثال ، حدود الثقة للفروق بين متوسطات مجتمعين ، في حالة ما إذا كان المجتمع غير محدود ، تعطى كما يلي :

$$(٧) \quad \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm z_c \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm z_c \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}$$

حيث يرمز للمتوسط والانحراف المعياري وحجم العينة الأولى بالرموز \bar{X}_1 ، σ_1 ، N_1 على الترتيب وفي العينة الثانية بالرموز \bar{X}_2 و σ_2 و N_2 على الترتيب .

وبنفس الطريقة ، فإن حدود الثقة للفروق بين النسب في مجتمعين ، حيث المجتمعات غير محدودة ، تعطى كما يلي :

$$(٨) \quad P_1 - P_2 \pm z_c \sigma_{P_1 - P_2} = P_1 - P_2 \pm z_c \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{N_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{N_2}}$$

حيث P_1 و P_2 هي نسب العينتين ، N_1 و N_2 حجم العينتين المسحوبتين من المجتمعين ، p_1 و p_2 هي النسب في المجتمعين (مقدرة بالنسب P_1 و P_2) .

فترة الثقة للانحرافات المعيارية :

$N \geq 30$

حدود الثقة للانحراف المعيارى σ لمجتمع يتوزع حسب التوزيع الطبيعي كما هي مقدرة من عينة انحرافها المعيارى s ، تعطى كما يلى :

$$(٩) \quad s \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{2N}} = s \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{2N}}$$

فروق بين

باستخدام الجدول ٨-١ صفحة (٢٢٠) . لحساب حدود الثقة هذه تستخدم s أو S كتقدير لـ σ .

الخطا المحتمل :

(٥)

حدود الثقة 50% لمعلم المجتمع المقابلة للاحصائية S تعطى بالصورة $S \pm 0.6745\sigma_S$. الكية $0.6745\sigma_S$ تعرف بأنها الخطأ المحتمل للتقدير .

(٦)

مسائل محلولة

للتقديرات غير المتحيزة والكفوء :

١-٩ أعط أمثلة لمقدرات (أو تقديرات) تكون (١) غير متحيزة وكفوء (ب) غير متحيزة وغير كفوء ، (ج) متحيزة وغير كفوء .

يل :

الحل :

(٧)

(١) متوسط العينة \bar{X} وتباين العينة المعدل $s^2 = \frac{N}{N-1} s^2$ مثالان لهذه الحالة .

(ب) وسيط العينة واحصائية العينة $(Q_1 + Q_3)/2$ حيث Q_1 الربيع الأدنى و Q_3 الربيع الأعلى للعينة مثالان لهذه الحالة . كلا الاحصائيتين تقديرات غير متحيزة لمتوسط المجتمع ، حيث أن أن متوسط توزيع المعاينة لهما هو متوسط المجتمع .

وفى العينة

(ج) الانحراف المعيارى للعينة s ، الانحراف المعيارى المعدل $\hat{\sigma}$ ، الانحراف المتوسط ، نصف المدى الربيعى أربعة أمثلة لهذه الحالة .

(٨)

٢-٩ عينة من خمسة قياسات لقطر جسم كروى سجلت بواسطة عالم كالاتى :

$$6.37 \text{ mm} , 6.37 , 6.37 , 6.36 , 6.37$$

هى النسب

أوجد تقديرات غير متحيزة وكفوء (١) للمتوسط الحقيقى (ب) لتباين الحقيقى .

الحل :

(أ) التقدير غير المتحيز والكفوء للمتوسط الحقيقي (متوسط المجتمع) =

$$= \bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{6.33 + 6.37 + 6.36 + 6.32 + 6.37}{5} = 6.35 \text{ mm}$$

(ب) التقدير غير المتحيز والكفوء للتباين الحقيقي (تباين المجتمع) =

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{N}{N-1} \sigma^2 = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N-1} \\ &= \frac{(6.33 - 6.35)^2 + (6.37 - 6.35)^2 + (6.36 - 6.35)^2 + (6.32 - 6.35)^2 + (6.37 - 6.35)^2}{5-1} \\ &= 0.00055 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

لاحظ أن $s = \sqrt{0.00055} = 0.023$ هو تقدير للانحراف المعياري الحقيقي ولكن هذا التقدير ليس

غير متحيز ولا كفوء .

٣-٩ افترض أن أوزان المسألة طالب في جامعة XYZ تمثل عينة عشوائية للأوزان من مجموع طلبة الكلية البالغ عددهم 1546 في هذه الجامعة . أوجد تقديرات غير متحيزة وكفوء (أ) للوسط الحقيقي (ب) للتباين الحقيقي .

الحل :

(أ) من المسألة ٣-٢٢ الفصل الثالث :

التقدير غير المتحيز والكفوء للوسط الحقيقي للأوزان $\bar{X} = 67.45 \text{ kg}$

(ب) من المسألة ٤-١٧ الفصل الرابع :

$$s^2 = \frac{N}{N-1} \sigma^2 = \frac{100}{99} (8.5275) = 8.6136$$

بهذا فإن $s = \sqrt{8.6136} = 2.93$ لاحظ أنه بما أن N كبيرة فإنه لا يوجد فرق أساسي بين s^2

و s^2 أو بين s و s

لاحظ أننا لم نستخدم معامل شيرد للتصحيح في حالة التجميع . ولأخذ هذا في الاعتبار فيجب أن نأخذ $s = 2.79$ في الصيغ أعلاه (أنظر المسألة ٤-٢١ ، الفصل الرابع) .

٤-٩ أوجد تقديرا غير متحيز وكفوءا للوسط الحقيقي لأقطار الجسم الكروي في المسألة ٩-٢ .

الحل :

الوسيط هو مثال لتقدير غير متحيز وغير كفوء لمتوسط المجتمع . وسيط الخمس قياسات مرقبة حسب قيمها هو 6.36 .

تقدير فترات الثقة لأوساط المجتمع :

٤-٣ أوجد (أ) 95 % (ب) 99 % فترات ثقة لتقدير متوسط أوزان الطلبة في جامعة XYZ بالمسألة ٣-٩ .

الحل :

(أ) الـ 95 % حدود الثقة هي $\bar{X} \pm 1.96\sigma/\sqrt{N}$

باستخدام $\bar{X} = 67.45 \text{ kg}$ ، $\hat{\sigma} = 2.93 \text{ kg}$ (أنظر المسألة ٣-٩) ، حدود الثقة هي $(2.93/\sqrt{100}) \pm 1.96$ أو $67.45 \pm 0.57 \text{ kg}$ وبهذا فإن الـ 95 % فترة ثقة لمتوسط المجتمع μ هي 66.88 إلى 68.02 kg ، والذي يمكن التعبير عنها كالاتي $66.88 < \mu < 68.02$.

وبهذا يمكن القول بأن احتمال أن يقع متوسط المجتمع بين 66.88 و 68.02 kg هو حوالي 95 % أو 0.95 وبالرمز نكتب .

$\Pr \{ 66.88 < \mu < 68.02 \} = 0.95$. وهذا يساوي القول بأننا 95 % واثقين بأن متوسط المجتمع (أو المتوسط الحقيقي) يقع بين 66.88 و 68.02 kg .

(ب) الـ 99 % حدود الثقة هي $\bar{X} \pm 2.58\sigma/\sqrt{N} = \bar{X} \pm 2.58s/\sqrt{N} = 67.45 \pm 2.58(2.93/\sqrt{100}) = 67.45 \pm 0.76 \text{ kg}$

وبهذا فإن الـ 99 % فترة ثقة لمتوسط المجتمع μ هي من 66.69 إلى 68.21 kg ، والتي يمكن التعبير عنها بـ $66.69 < \mu < 68.21$.

للحصول على فترات الثقة السابقة ، فإننا افترضنا أن المجتمع غير محدود أو على درجة من الكبر بحيث يمكن أن نعتبره مثلاً حالة المعاينة مع الإرجاع . للمجتمعات المحدودة حيث المعاينة بدون إرجاع ، يجب أن نستخدم

$$\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}} \quad \text{بدلاً من} \quad \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

يساوي أساساً 1.0 ، بحيث لا تكون هناك حاجة

لإستخدامه . أما إذا استخدم فإن حدود الثقة أعلاه تصبح $67.45 \pm 0.73 \text{ kg}$ ، 67.45 ± 0.56 على الترتيب .

٤-٢ قراءات اوزان عينة عشوائية حجمها 200 من رولمان البلى مصنوعة في آلة معينة خلال أسبوع واحد أظهرت متوسط 0.824 N وانحرافاً معيارياً 0.042 N . أوجد (أ) 95 % (ب) 99 % حدود ثقة لمتوسط الوزن لجميع رولمان البلى .

الحل :

(أ) الـ 95 % حدود ثقة هي

$$\bar{X} \pm 1.96\sigma/\sqrt{N} = \bar{X} \pm 1.96s/\sqrt{N} = 0.824 \pm 1.96(0.042/\sqrt{200}) = 0.824 \pm 0.0058 \text{ N, or } 0.824 \pm 0.006 \text{ N.}$$

مها هو 6.36 .

تقدير ليس

م 1546 و
نقى .

ج = ٣

اسمى بين 2

خذ 2.79 s

(ب) الـ 99 % حدود ثقة هي

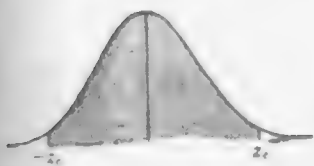
$$\bar{X} \pm 2.58\sigma/\sqrt{N} = \bar{X} \pm 2.58s/\sqrt{N} = 0.824 \pm 2.58(0.042/\sqrt{200}) = 0.824 \pm 0.0077 N, \text{ or } 0.824 \pm 0.008 N.$$

لاحظ أننا افترضنا أن الانحراف المعياري المذكور هو الانحراف المعياري المعدل $\hat{\sigma}$. أما إذا كان الانحراف المعياري هو s ، فإننا سنستخدم $s = \sqrt{N/(N-1)}s = \sqrt{200/199}s$ والتي يمكن أن نعتبرها مثل s لجميع الأغراض العملية. وبشكل عام، لنقم $N \geq 30$ يمكن أن نفترض s و $\hat{\sigma}$ متساويتين من الناحية العملية.

٧-٩ أوجد (أ) 98 % (ب) 90 % (ج) 99.73 % حدود ثقة لمتوسط وزن رولمان البلى في المسألة ٦-٩.

الحل :

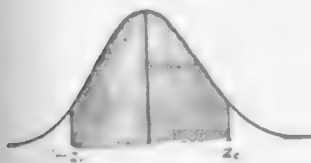
(أ) اعتبر $z = z_c$ بحيث تكون المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى اليمين هي 1 % . وبالتماثل المساحة إلى يسار $z = -z_c$ هي أيضا 1 % بحيث تكون المساحة المظللة هي 98 % من المساحة الكلية .



وبما أن المساحة الكلية تحت المنحنى تساوى واحد فإن المساحة من $z = 0$ إلى $z = z_c$ هي 0.49 ، وبذلك فإن $z_c = 2.33$ وهذا فإن حدود الثقة 98 % هي

$$\bar{X} \pm 2.33\sigma/\sqrt{N} = 0.824 \pm 2.33 (0.042/\sqrt{200}) = 0.824 \pm 0.0069 N.$$

(ب) المطلوب هو z_c بحيث تكون المساحة من $z = 0$ إلى $z = z_c$ هي 0.45 ، إذن $z_c = 1.645$



وبهذا فإن حدود الثقة 90 % هي

$$\bar{X} \pm 1.645\sigma/\sqrt{N} = 0.824 \pm 1.645(0.042/\sqrt{200}) = 0.824 \pm 0.0049 N$$

(ج) حدود الثقة 99.73 % هي

$$\bar{X} \pm 3\sigma/\sqrt{N} = 0.824 \pm 3(0.042/\sqrt{200}) = 0.824 \pm 0.0089 N$$

٨-٩ لقياس زمن رد الفعل ، قدر عالم سيكولوجى الانحراف المعياري بـ 0.05 ثانية . ماهو حجم العينة من القياسات بحيث تكون (أ) 95 % ، (ب) 99 % واثقين أن خطأ تقديره لن يتجاوز 0.01 ثانية ؟

الحل :

(أ) حدود الثقة 95 % هي $\bar{X} \pm 1.96\sigma/\sqrt{N}$ وخطأ التقدير هو $1.96\sigma/\sqrt{N}$. إذا أخذنا $\sigma = s = 0.05$ ثانية ، فإن هذا الخطأ يساوى 0.01 ثانية إذا كانت $(1.96)(0.05)/\sqrt{N} = 0.01$ أى $\sqrt{N} = (1.96)(0.05)/0.01$ أو $N = 96.04$. وبهذا فإننا سنكون على ثقة بدرجة 95 % بأن خطأ التقدير سيكون أقل من 0.01 إذا كانت N تساوى 97 أو أكبر .

طريقة أخرى : $\frac{(1.96)(0.05)}{\sqrt{N}} < 0.01$ if $\frac{\sqrt{N}}{(1.96)(0.05)} > \frac{1}{0.01}$ or $\sqrt{N} \geq \frac{(1.96)(0.05)}{0.01} = 9.8$.

إذن $N \geq 96.04$ أو $N \geq 97$.

(ب) إلى 99 % حدود الثقة هي $\bar{X} \pm 2.58\sigma/\sqrt{N}$. إذن $(2.58)(0.05)/\sqrt{N} = 0.01$ أو $N = 166.4$.
وهذا ستكون على ثقة بدرجة 99 % بأن خطأ التقدير سيكون أقل من 0.01 إذا كانت N تساوى 167 أو أكبر .

٩-٩ عينة عشوائية من 50 من درجات الرياضة مسحوبة من 200 درجة أظهرت متوسطا 75 وانحرافا معياريا 10 .

(أ) ما هي إلى 95 % حدود الثقة لتقديرات وسط إلى 200 درجة

(ب) بأي درجة ثقة يمكن القول بأن متوسط إلى 200 درجة هو 75 ± 1 ؟

الحل :

(أ) بما أن حجم المجتمع ليس كبيرا بالمقارنة بحجم العينة ، فيجب أن نعدل لمراعاة ذلك .

وهذا فإن إلى 95 % حدود ثقة هي

$$\bar{X} \pm 1.96\sigma_{\bar{X}} = \bar{X} \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}} = 75 \pm 1.96 \frac{(10)}{\sqrt{50}} \sqrt{\frac{200 - 50}{200 - 1}} = 75 \pm 2.4$$

(ب) حدود الثقة يمكن أن تمثل بما يلي :

$$\bar{X} = z_c \sigma_{\bar{X}} = \bar{X} \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}} = 75 \pm z_c \frac{10}{\sqrt{50}} \sqrt{\frac{200 - 50}{200 - 1}} = 75 \pm 1.23z_c$$

وبما أن هذه يجب أن تساوى 75 ± 1 ، فإن $1.23z_c = 1$ أو $z_c = 0.81$. المساحة تحت المنحنى الطبيعي من $z = 0$ إلى $z = 0.81$ هي 0.2910 ، وهذا فإن درجة الثقة المطلوبة هي

$$2(0.2910) = 0.582 \text{ أو } 58.2\%$$

تقديرات فترات الثقة للنسب :

٩-١٠ في استطلاع للرأى العام بالعينة سمحت عينة عشوائية حجمها 100 من جميع الناخبين في حي معين حيث دلت على أن 55 % منهم في صالح مرشح معين . أوجد (أ) 95 % (ب) 99 % (ج) 99.73 % حدود ثقة للنسبة بين جميع الناخبين المؤيدين لهذا المرشح .

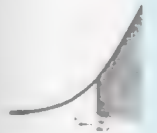
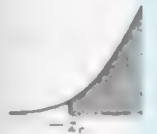
$$\bar{X} \pm 2.58\sigma$$

الانحراف

ماثل و

ة العملية .

ة ٩-٦ .



القياسات

إذا أخذنا

$$(1.96)(0)$$

95 % بأن

الحل :

(١) 95 % حدود الثقة للنسبة p للمجتمع هي :

$$P \pm 1.96\sigma_p = P \pm 1.96\sqrt{p(1-p)/N} = 0.55 \pm 1.96\sqrt{(0.55)(0.45)/100} = 0.55 \pm 0.10$$

حيث استخدمنا النسبة P لتقدير p .

$$(ب) 99 \% \text{ حدود ثقة للنسبة } p \text{ هي : } 0.55 \pm 2.58\sqrt{(0.55)(0.45)/100} = 0.55 \pm 0.13$$

$$(ج) 99.73\% \text{ حدود ثقة للنسبة } p \text{ هي : } 0.55 \pm 3\sqrt{(0.55)(0.45)/100} = 0.55 \pm 0.15$$

لمحصل على طريقة أكثر دقة حل هذه المسألة . أنظر المسألة ١٢-٩ .

٩-١١ ما هو حجم العينة التي يجب أخذها من الناخبين في المسألة ٩-١٠ بحيث تكون (١) 95 % (ب) 99.73 % ، واثقين من أن المرشح المعطى سوف يختار من مرشحين اثنين .

الحل :

$$P \pm z_c\sqrt{p(1-p)/N} = 0.55 \pm z_c\sqrt{(0.55)(0.45)/N} = 0.55 \pm 0.50z_c/\sqrt{N}$$

حيث استخدمنا التقدير $P = p = 0.55$ على أساس بيانات المسألة ٩-١٠ وبما أن المرشح سينجح فقط إذا حصل على أكثر من 50 % من أصوات المجتمع ، فإننا نطلب أن تكون $0.50z_c/\sqrt{N}$ أقل من 0.05 .

$$(١) \text{ لـ } 95 \% \text{ ثقة ، } 0.50z_c/\sqrt{N} = 0.50(1.96)/\sqrt{N} < 0.05 \text{ ، عندما تكون } N = 384.2 \text{ ، فإن } N \text{ يجب أن تساوى } 385 \text{ على الأقل .}$$

$$(ب) \text{ لـ } 99.73 \% \text{ ثقة ، } 0.50z_c/\sqrt{N} = 0.50(3)/\sqrt{N} < 0.05 \text{ ، عندما تكون } N = 900 \text{ ، فإن } N \text{ يجب أن تساوى } 901 \text{ على الأقل .}$$

طريقة أخرى :

$$1.50/\sqrt{N} < 0.05 \text{ عندما تكون } \sqrt{N}/1.50 > 1/0.05 \text{ أو } \sqrt{N} > 1.50/0.05$$

$$\text{إذن } \sqrt{N} > 30 \text{ أو } N > 900 \text{ ، بحيث } N \text{ يجب أن تكون } 901 \text{ على الأقل .}$$

٩-١٢ (١) إذا كانت P هي نسبة النجاح المشاهدة في عينة حجمها N ، وضع أن حدود الثقة لتقدير نسبة النجاح في المجتمع p عند مستوى معنوية محددة بـ z_c يعطى كما يلي .

$$p = \frac{P + \frac{z_c^2}{2N} \pm z_c \sqrt{\frac{P(1-P)}{N} + \frac{z_c^2}{4N^2}}}{1 + \frac{z_c^2}{N}}$$

(ب) استخدم الصيغة التي حصلنا عليها في (١) للحصول على 99.73 % حدود ثقة المسألة ٩-١٠ .

(ج) وضع أنه لقيم N الكبيرة فإن الصيغة في (١) تختصر إلى $p = P \pm z_c \sqrt{P(1-P)/N}$. كما اتبع في المسألة ٩-١٠ .

الحل :

$$(١) \text{ نسبة العينة } P \text{ بوحداث معيارية } = \frac{P - p}{\sigma_p} = \frac{P - p}{\sqrt{p(1-p)/N}}$$

أكبر قيمة وأصغر قيمة لهذا المتغير المعيارى هي $\pm z_c$ حيث z_c تحدد مستوى الثقة . عند هذه القيم المتطرفة يجب تبعا لذلك أن نحصل على

$$P - p = \pm z_c \sqrt{p(1-p)/N}$$

بتربيع الطرفين

$$P^2 - 2pP + p^2 = z_c^2 p(1-p)/N$$

بضرب الطرفين في N والتبسيط ، نجد أن

$$(N - z_c^2)p^2 - (2NP + z_c^2)p - NP^2 = 0$$

إذا كانت $c = NP^2$ ، $a = N - z_c^2$ ، $b = -(2NP + z_c^2)$ تصبح هذه المعادلة $ap^2 + bp + c = 0$ والتي حلها بالنسبة لـ p تعطى بالصيغة من الدرجة الثانية .

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2NP + z_c^2 \pm \sqrt{(2NP + z_c^2)^2 - 4(N - z_c^2)(NP^2)}}{2(N - z_c^2)} \\ = \frac{2NP + z_c^2 \pm z_c \sqrt{4NP(1-P) + z_c^2}}{2(N - z_c^2)}$$

بقسمة البسط والمقام على $2N$ ، تصبح الصيغة

$$p = \frac{P + \frac{z_c^2}{2N} \pm z_c \sqrt{\frac{P(1-P)}{N} + \frac{z_c^2}{4N^2}}}{1 + \frac{z_c^2}{N}}$$

(ب) لـ 99.73 % حدود ثقة ، $z_c = 3$. إذن باستخدام $p = 0.55$ و $N = 100$ في الصيغة التي حصلنا عليها في (١) نجد أن $p = 0.40$ و $P = 0.69$ ، وهذا يتفق مع نتيجة المسألة ٩-١٠ (ج) .

99.73 %

$P \pm z_c \sqrt{p}$
نط إذا حصل

هذا فإن N

هذا $N =$

نسبة النجاح

(ج) إذا كانت N كبيرة ، فإن $z^2/(2N)$, $z^2/(4N^2)$ and z^2/N تكون قيمة صغيرة يمكن إهمالها ويحل بدلا منها الصفر . بحيث نحصل عن النتيجة المطلوبة

١٣-٩ في 40 رمية لعملة ، حصلنا على 24 صورة . أوجد (أ) 95 % (ب) 99.73 % حدود ثقة لنسبة الصور التي يمكن الحصول عليها في عدد غير محدود من رميات العملة .

الحل :

(أ) عند المستوى 95 % ، $z_c = 1.96$ ، بالتعويض عن $P = 24/40 = 0.6$ و $N = 40$ في صيغة المسألة ١٣-٩ (أ) ، نجد أن $p = 0.45$ و $p = 0.74$ بحيث يمكن أن نقول بدرجة ثقة 95 % أن p تقع بين 0.45 و 0.74 .

باستخدام الصيغة التقريبية $p = P \pm z_c \sqrt{P(1-P)/N}$ ، نجد أن $p = 0.60 \pm 0.15$ ، وهذه تؤدي إلى الحصول على الفترة من 0.45 إلى 0.75 .

(ب) عند المستوى 99.73 % ، $z_c = 3$ ، باستخدام صيغة المسألة ١٣-٩ (أ) نجد أن $p = 0.37$ و $p = 0.79$.

باستخدام الصيغة التقريبية $p = P \pm z_c \sqrt{P(1-P)/N}$ ، نجد أن $p = 0.60 \pm 0.23$ ، وهذه تؤدي إلى الحصول على الفترة من 0.37 إلى 0.83 .

فترات الثقة للفروق والمجتمع :

١٤-٩ عينة من 150 لمبات إضاءة من الصنف A كان متوسط عمرها الانتاجي هو 1400 ساعة وانحرافها المعياري 120 . عينة من لمبات الإضاءة من الصنف B مكونة من 200 لمبة كان متوسط عمرها الانتاجي 1200 ساعة وانحرافها المعياري 80 ساعة . أوجد (أ) 95 % (ب) 99 % حدود ثقة للفرق بين متوسط العمر الانتاجي لمجتمع الأصناف A و B .

الحل :

حدود الثقة للفرق بين المتوسطين للصنفين A و B تعطى بما يلي :

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B \pm z_c \sqrt{\sigma_A^2/N_A + \sigma_B^2/N_B}$$

(أ) 95 % حدود ثقة هي $1400 - 1200 \pm 1.96 \sqrt{(120)^2/150 + (80)^2/200} = 200 \pm 24.8$

أي أننا نكون 95 % واثقين بأن الفرق بين متوسطات المجتمعين سوف يقع بين 175 h و 225 h .

(ب) 99 % حدود الثقة هي $1400 - 1200 \pm 2.58 \sqrt{(120)^2/150 + (80)^2/200} = 200 \pm 32.6$

أي أننا نكون 99 % واثقين بأن الفرق بين متوسطات المجتمعين تقع بين 167 h و 233 h .

٩-١٥ في عينة مكونة من 400 من البالغين و 600 من المراهقين الذين شاهدوا برنامجا تلفزيونيا معيئاً ، ذكر 100 من البالغين و 300 من المراهقين أنهم يفضلون هذا البرنامج . أوجد (أ) 95 % (ب) 99 % حدود ثقة للفرق بين نسبة كل البالغين و نسبة كل المراهقين الذين شاهدوا هذا البرنامج ويفضلونه .

الحل :

حدود الثقة للفرق بين نسب المجموعتين تعطى كما يلي :

$$P_1 - P_2 \pm z_{\alpha} \sqrt{P_1 Q_1 / N_1 + P_2 Q_2 / N_2}$$

حيث الدليل 1 يرمز للمراهقين والدليل 2 للبالغين . هنا $P_1 = 300/600 = 0.50$ و $P_2 = 100/400 = 0.25$ هي نسب المراهقين ونسب البالغين الذين يفضلون البرنامج على الترتيب .

$$(أ) 95 \% \text{ حدود ثقة } 0.50 - 0.25 \pm 1.96 \sqrt{(0.50)(0.50)/600 + (0.25)(0.75)/400} = 0.25 \pm 0.06$$

أى أننا نكون 95 % واثقين أن الفرق الحقيقى للنسب يقع بين 0.19 و 0.31

$$(ب) 99 \% \text{ حدود ثقة } 0.50 - 0.25 \pm 2.58 \sqrt{(0.50)(0.50)/600 + (0.25)(0.75)/400} = 0.25 \pm 0.08$$

أى أننا نكون 99 % واثقين أن الفرق الحقيقى يقع بين 0.17 و 0.33 .

٩-١٦ متوسط e.m.f. لبطارية من إنتاج إحدى الشركات هو 45.1 فولت وانحرافها المعيارى هو 0.04 فولت .

إذا أوصلت أربعة من هذه البطاريات على التوالي ، أوجد (أ) 95 % (ب) 99 % (ج) 99.73% (د) 50 % حدود ثقة لمجموع الـ e.m.f.

الحل :

إذا كانت E_1 و E_2 و E_3 و E_4 تمثل الـ e.m.f.'s للبطاريات الأربع ، فإن

$$\mu_{E_1 + E_2 + E_3 + E_4} = \mu_{E_1} + \mu_{E_2} + \mu_{E_3} + \mu_{E_4} \text{ and } \sigma_{E_1 + E_2 + E_3 + E_4} = \sqrt{\sigma_{E_1}^2 + \sigma_{E_2}^2 + \sigma_{E_3}^2 + \sigma_{E_4}^2}$$

$$\mu_{E_1} = \mu_{E_2} = \mu_{E_3} = \mu_{E_4} = 45.1 \text{ volts and } \sigma_{E_1} = \sigma_{E_2} = \sigma_{E_3} = \sigma_{E_4} = 0.04 \text{ volts. ربما أن}$$

إذن

$$\mu_{E_1 + E_2 + E_3 + E_4} = 4(45.1) = 180.4 \text{ and } \sigma_{E_1 + E_2 + E_3 + E_4} = \sqrt{4(0.04)^2} = 0.08$$

ويحل بدلا

بـ الصورة

. في صيغة
ثقة 95 %

$$p = 0.6$$

$$p = 0.3$$

$$p = 0.6$$

انها المعيارى
1200 ساعة
مر الانتاجى

180.4 ± 1.96(0.08)	180.4 ± 0.16 volts	(أ) 95 %	حدود ثقة هي :
180.4 ± 2.58(0.08)	180.4 ± 0.21 volts	(ب) 99 %	حدود ثقة هي :
180.4 ± 3(0.08)	180.4 ± 0.24 volts	(ج) 99.73 %	حدود ثقة هي :
180.4 ± 0.6745(0.08)	180.4 ± 0.054 volts	(د) 50 %	حدود ثقة هي :

القيمة 0.054 فولت تسمى بالخطأ المحتمل .

فترات الثقة للانحرافات المعيارية :

١٧-٩ الانحراف المعياري للعمر الانتاجي لعينة من 200 لمبة كهربائية كان 100 ساعة . أوجد (أ) 95 % (ب) 99 % حدود ثقة للانحراف المعياري لجميع المبات الكهربائية من نفس النوع .

الحل :

حدود الثقة للانحراف المعياري للمجتمع σ يعطى بالصورة $s \pm z_c \sigma / \sqrt{2N}$ حيث z_c تعبر عن مستوى الثقة . تستخدم الانحراف المعياري للعينة لتقدير σ .

(أ) 95 % حدود ثقة هي : $100 \pm 9.1 = 100 \pm 1.96(100)/\sqrt{400}$

أي أننا نكون 95 % واثقين بأن الانحراف المعياري للمجتمع سوف يقع بين 90.2 h و 109.8 h .

(ب) 99 % حدود ثقة هي : $100 \pm 12.9 = 100 \pm 2.58(100)/\sqrt{400}$

أي أننا نكون 99 % واثقين أن الانحراف المعياري للمجتمع سوف يقع بين 87.1 h و 112.9 h

١٨-٩ ما هو حجم العينة من لمبات الاضاءة في المسألة السابقة التي يجب أن نأخذها بحيث نكون 99.73 % واثقين بأن الانحراف المعياري الحقيقي لن يختلف عن الانحراف المعياري للعينة بأكثر من (أ) 5 % (ب) 10 % ؟

الحل :

99.73 % حدود ثقة لـ σ هي $s \pm 3\sigma / \sqrt{2N}$ باستخدام s كتقدير لـ σ .

وهذا فإن نسبة الخطأ في الانحراف المعياري $= \frac{3\sigma \sqrt{2N}}{s} = \frac{300}{\sqrt{2N}} \%$

(أ) إذا كانت $5 = 300 / \sqrt{2N}$ إذن $N = 1800$. وهذا فإن حجم العينة يجب أن يكون 1800 أو أكثر .

(ب) إذا كانت $10 = 300 / \sqrt{2N}$ ، إذن $N = 450$. وهذا فإن حجم العينة يجب أن يكون 450 أو أكثر .

الخطأ المحتمل :

١٩-٩ قيس الفولت لـ 50 بطارية من نفس النوع لها متوسط 18.0 فولت وانحراف معياري 0.5 فولت . أوجد
(١) الخطأ المحتمل للوسط . (ب) 50 % حدود ثقة .

الحل :

$$(١) \text{ الخطأ المحتمل للوسط } = 0.6745 \frac{s}{\sqrt{N-1}} = 0.6745 \frac{s}{\sqrt{N}} = 0.6745 \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 0.6745 \sigma_{\bar{x}} = 0.6745 \sigma_{\bar{x}}$$

$$= 0.6745(0.5) \sqrt{49} = 0.048 \text{ volts}$$

99 %

لاحظ أنه لو حسبنا الانحراف المعياري 0.5 فولت بصيغة σ ، فإن الخطأ المحتمل هو
 $0.048 = 0.6745 (0.5 / \sqrt{50})$ كذلك : وبهذا يمكن استخدام أى التقديرين إذا كانت N كبيرة بدرجة كافية .

(ب) 50 % حدود ثقة هي 18 ± 0.048 فولت .

مرب عن

٢٠-٩ سجلت قياسات قيمتها 216.480 جرام ، بخطأ احتملي 0.272 جرام ما هي الـ 95 % حدود ثقة لهذه القياسات ؟

الحل :

$$\text{الخطأ المحتمل} = 0.272 / 0.6745 \text{ or } \sigma_{\bar{x}} = 0.272 / 0.6745$$

$$95 \% \text{ حدود ثقة } = 0.790 : 216.480 \pm 1.96(0.272/0.6745) = 216.480 \pm 0.790 \text{ جرام}$$

مسائل اضافية

فمن بان

التقديرات غير المتحيزة والكفؤ :

٢١-٩ قياسات لعينة من الأوزان حددت كالآتي 8.3, 10.6, 9.7, 8.8, 10.2 and 9.4 kg

أوجد تقديرات غير متحيزة وكفوء لما يل (١) متوسط المجتمع . (ب) تباين المجتمع . (ج) فارق بين الانحراف المعياري للعينة والانحراف المعياري المقدّر للمجتمع .

$$\text{ج : } (١) 9.5 \text{ kg} \quad (ب) 0.74 \text{ kg}^2 \quad (ج) 0.78$$

180X أو

٢٢-٩ عينة من 10 لمبات تلفزيون من إنتاج إحدى الشركات كان متوسط عمرها الانتاجي 1200 h وانحرافها المعياري 100 h قدر (١) المتوسط (ب) الانحراف المعياري لمجتمع جميع لمبات التلفزيون المنتجة بهذه الشركة .

ون 450

$$\text{ج : } (١) 1200 \text{ h} \quad (ب) 105.4 \text{ h}$$

- ٢٣-٩ (١) حل المسألة ٩-٢٢ إذا كانت نفس النتيجة التي حصلنا عليها للأعداد 100 و 50 و 30 لجة تلفزيون .
- (ب) ما هو استنتاجك بخصوص العلاقة بين الانحراف المعياري للعينة وتقديرات الانحرافات المعيارية للمجتمع لأحجام مختلفة للعينة ؟
- ج : (١) تقديرات الانحرافات المعيارية للمجتمع لعينات أحجامها 100 و 50 و 30 لجة هي على الترتيب 100.5 h ، 101.0 ، 101.7 . تقديرات متوسطات المجتمع هي 1200 h في جميع الحالات .

تقدير فترات الثقة لأوساط المجتمع :

- ٢٤-٩ إذا كان الوسط الحسابي لحمل الأعظم المنقول خلال 60 كابل (أنظر المسألة ٣-٥٩ ، الفصل الثالث) هو 11.09 kw والانحراف المعياري هو 0.73 kw . أوجد (١) 95 % (ب) 99 % حدود ثقة لوسط الحمل الأعظم لجميع الكابلات المنتجة بواسطة الشركة .

ج : (١) $11.09 \pm 0.18 \text{ kN}$ (ب) $11.09 \pm 0.24 \text{ kN}$

- ٢٥-٩ الوسط الحسابي لأقطار عينة من 250 مسبار برشام منتجة بواسطة شركة هو 7.2642 mm وانحرافها المعياري 0.0058 mm (أنظر المسألة ٣-٦١ ، الفصل الثالث) . أوجد (١) 99 % (ب) 98 % (ج) 95 % (د) 90 % حدود ثقة لوسط الحسابي لأقطار جميع المسامير البرشام المنتجة بواسطة هذه الشركة .

ج : (١) $7.2642 \pm 0.00095 \text{ mm}$ (ب) $7.2642 \pm 0.00085 \text{ mm}$

(ج) $7.2642 \pm 0.00072 \text{ mm}$ (د) $7.2642 \pm 0.00060 \text{ mm}$

- ٢٦-٩ أوجد (١) الـ 50 % حدود ثقة و (ب) الخطأ المحتمل لمتوسط الأقطار في المسألة ٩-٢٥ .

ج : (١) $7.2642 \pm 0.00025 \text{ mm}$ (ب) 0.00025 mm

- ٢٧-٩ إذا كان الانحراف المعياري للعمر الانتاجي للمبات التلفزيون يقدر بـ 100 ساعة ، ماهو حجم العينة التي يجب أن نأخذها بحيث نكون (١) 95 % (ب) 90 % (ج) 99 % (د) 99.73 % واثقين من أن الخطأ من تقدير متوسط العمر الانتاجي لن يتجاوز 20 ساعة .

ج : (١) على الأقل 96 (ب) على الأقل 68

(ج) على الأقل 167 (د) على الأقل 225

- ٢٨-٩ ما هو حجم العينة في المسألة السابقة إذا كان الخطأ في تقدير متوسط العمر الانتاجي يجب ألا يتجاوز 10 ساعات ؟

ج : (١) على الأقل 384 (ب) على الأقل 271

(ج) على الأقل 666 (د) على الأقل 900

٢٩-٤ شركة بها 500 كابل . تم اختبار 40 كابل اختيرت عشوائيا فأظهرت أن متوسط قوة المقاومة للكسر $2400 N$ وانحراف معياري $150 N$.

(أ) ما هي α و β و γ حدود ثقة لتقدير متوسط المقاومة للكسر بالنسبة للكابلات الباقية والتي عددها 4600 كابل ؟

(ب) ما هي درجة الثقة التي يمكن أن نقول بها أن متوسط المقاومة للكسر بالنسبة للكابلات الـ 460 الباقية هو $2400 \pm 35 N$.

ج : (أ) $2400 \pm 59 N$, $2400 \pm 45 N$ (ب) 87.6%

تقدير فترات الثقة للنسب :

٣٠-٤ يحتوي وعاء على عدد غير معروف من البلى الأحمر والأبيض . عينة عشوائية من 60 من البلى اختيرت مع الإرجاع من الوعاء أظهرت 70% من البلى الأحمر . أوجد (أ) 95% (ب) 99% (ج) 99.73% حدود ثقة للنسبة الفعلية للبلى الأحمر .

استخدم في الحل كلا من الصيغة التقريبية والصيغة المضبوطة المستخلصة في المسألة ١٢-٩ .

ج : (أ) 0.70 ± 0.12 , 0.69 ± 0.11 (ب) 0.70 ± 0.15 , 0.68 ± 0.15 (ج) 0.70 ± 0.17 , 0.67 ± 0.18

٣١-٩ ما هو حجم العينة من البلى التي يجب أن يأخذها الشخص في المسألة السابقة بحيث يكون (أ) 95% (ب) 99% (ج) 99.73% على ثقة من أن النسبة الحقيقية لن تختلف عن نسبة العينة بأكثر من 5% ؟

ج : (أ) 323 على الأقل

(ب) 560 على الأقل

(ج) 756 على الأقل .

٣٢-٩ من المعلوم أن نتيجة أحد الانتخابات سوف تظهر أصواتا متقاربة لسكلا المرشحين . ما هو الحد الأدنى للأصوات التي يجب جمعها بحيث تكون (أ) 80% (ب) 90% (ج) 95% (د) 99% واثقين من قرار ترجيح أحد المرشحين على الآخر ؟

ج : (أ) 16 400 (ب) 27100 (ج) 38420 (د) 66600

فترات الثقة للفروق والمجموع :

٣٣-٩ في مجموعتين متماثلتين من المرضى ، A و B تتكونان من 50 و 100 شخص على الترتيب ، المجموعة الأولى أعطيت نوعا جديدا من الحبوب المنومة والمجموعة الثانية أعطيت نوعا معروفا من الحبوب . المرضى من المجموعة A كان متوسط ساعات النوم هو 7.82 بانحراف معياري 0.24 ساعة . المرضى من المجموعة B كان متوسط ساعات النوم هو 6.75 بانحراف معياري 0.30 ساعة .

أوجد (أ) 95 % (ب) 99 % حدود ثقة للفرق في متوسط ساعات النوم الناتجة من استخدام نوعي الحبوب المنومة .

$$ج : (أ) 1.07 \pm 0.09 h \quad (ب) 1.07 \pm 0.12 h$$

٣٤-٩ عينة مكونة من 200 مسمار قلاووظ من إنتاج آلة كان بها 15 مسمار تالف، بينما عينة مكونة من 100 مسمار قلاووظ من إنتاج آلة أخرى كان بها 12 مسمار تالف . أوجد (أ) 95 % (ب) 99 % (ج) 99.73 % حدود ثقة للفرق بين نسب المسمار التالفة في الآلتين ناقش النتائج التي حصلت عليها .

$$ج : (أ) 0.045 \pm 0.073 \quad (ب) 0.045 \pm 0.097 \quad (ج) 0.045 \pm 0.112$$

٣٥-٩ شركة تصنع رولمان البلى لها متوسط 0.638 kg وانحرافها المعياري 0.012 kg . أوجد (أ) 95 % (ب) 99 % حدود ثقة لأوزان مجموعات يتكون كل منها من 100 من رولمان البلى .

$$ج : (أ) 63.8 \pm 0.24 kg \quad (ب) 63.8 \pm 0.31 kg$$

فترات الثقة للانحرافات المعيارية :

٣٦-٩ الانحراف المعياري للمقاومة للكسر لـ 100 كابل تم اختيارها بواسطة الشركة كان 180 N . أوجد (أ) 95 % (ب) 99 % (ج) 99.73 % حدود الثقة للانحراف المعياري لجميع الكابلات المنتجة بواسطة الشركة .

$$ج : (أ) 180 \pm 24.9 N \quad (ب) 180 \pm 32.8 N \quad (ج) 180 \pm 38.2 N$$

٣٧-٩ أوجد الخطأ المحتمل للانحراف المعياري في المسألة السابقة .

$$ج : 8.6 N$$

٣٨-٩ ما هو حجم العينة التي يجب سحبها بحيث يكون الشخص واثق (أ) 95 % (ب) 99 % (ج) 99.73 % من أن الانحراف المعياري للمجتمع لن يختلف عن الانحراف المعياري للعينة بأكثر من 2 % ؟

$$ج : (أ) 4802 \text{ على الأقل .}$$

$$(ب) 8321 \text{ على الأقل .}$$

$$(ج) 11250 \text{ على الأقل .}$$

الفصل العاشر

نظرية القرارات الاحصائية واختبارات الفروض والمعنوية

القرارات الاحصائية :

في كثير من المشاكل العملية يكون المطلوب هو اتخاذ قرارات تخص المجتمع وذلك بناء على بيانات مستمدة من العينة . مثل هذه القرارات تسمى قرارات احصائية . فمثل سبيل المثال ، قد نريد أن نقرر بناء على بيانات العينة ما إذا كان مصطلح جديد يؤثر بشكل حقيقي في شفاء مرض معين ، وما إذا كانت طريقة تدريس معينة أحسن من طريقة أخرى ، وما إذا كانت عملة معينة متحيزة ، وهكذا .

(1) 95 %

الفروض الاحصائية . فرض العدم :

في محاولة الوصول إلى قرار « فن المفيد وضع فروض أو تخمينات عن المجتمعات موضوع الدراسة . مثل هذه الفروض ، والتي قد تكون صحيحة أو غير صحيحة ، تسمى بالفروض الاحصائية وبشكل عام هي تعبيرات عن التوزيعات الاحتمالية لهذه المجتمعات .

(1) 95 %

في كثير من الأحيان نصيغ الفروض الاحصائية وهدفنا الوحيد هو رفضه أو ابطاله . على سبيل المثال ، إذا أردنا تقرير ما إذا كانت عملة معينة متحيزة فإننا نصيغ الفرض أن العملة غير متحيزة ، بمعنى ، $p = 0.5$ ، حيث p هو احتمال الصور . وبنفس الصورة ، إذا أردنا تقرير ما إذا كانت إحدى الطرق أحسن من غيرها ، فإننا نصيغ الفرض بأنه لا يوجد اختلاف بين الطرق (بمعنى ، أن أي اختلافات مشاهدة ترجع تقريبا إلى تقلبات المعاينة من نفس المجتمع) . مثل هذه الفروض تسمى فروض العدم ويرمز لها بالرمز H_0 .

99. من أن

أي فرض يختلف عن الفرض المعطى يسمى بالفرض البديل . على سبيل المثال ، إذا كان أحد الفروض هو $p = 0.5$ ، فإن الفروض البديلة هي $p > 0.5$ و $p < 0.5$ و $p = 0.7$. الفرض البديل لفرض العدم يرمز له بالرمز H_1 .

اختبارات الفروض والمعنوية :

إذا حصلنا تحت افتراض أن فرضا معيناً صحيحاً على بيانات مشاهدة من عينة عشوائية تختلف بشكل ملحوظ عما يتوقع تحت الفرض على أساس من العشوائية البحتة طبقاً لنظرية المعاينة ، فإننا نقول أن الفروق المشاهدة معنوية وسنكون أكثر ميلاً لرفض الفرض (أو على الأقل عدم قبوله على أساس الأدلة الملاحظة) . على سبيل المثال ، إذا رميت عملة 20 مرة

وننتج عنها 16 صورة فإننا سنكون أكثر ميلاً لرفض الفرض القائل أن العملة متوازنة ، على الرغم من أن هناك امكانية في أن نكون على خطأ .

الطرق التي يمكننا من تقرير قبول أو رفض الفروض أو تحديد ما إذا كانت العينات المشاهدة تختلف معنوياً عن النتائج المتوقعة تسمى باختبارات الفروض ، اختبارات المعنوية أو قواعد اتخاذ القرار .

الخطا من النوع الأول والخطا من النوع الثاني :

إذا رفضنا فرضاً كان من الواجب قبوله ، فإننا نرتكب خطأ من النوع الأول . ومن الناحية الأخرى ، إذا قبلنا فرضاً كان من الواجب رفضه ، فإننا نرتكب خطأ من النوع الثاني . وفي كلتا الحالتين فإن قراراً خاطئاً يتخذ أو خطأ في الحكم يقع .

وحقاً تكون اختبارات الفروض أو قواعد اتخاذ القرارات جيدة ، فيجب أن تصمم بحيث تؤدي إلى التقليل من أخطاء القرار . ولكن هذا ليس بالأمر السهل ، حيث أنه لحجم عينة معين ، فإن محاولة انقاص أحد أنواع الخطأ يصاحبه بشكل عام زيادة في النوع الآخر من الخطأ . ومن الناحية العملية فإن أحد أنواع الخطأ قد يكون أكثر خطورة من النوع الآخر ، وبهذا فإنه يجب الوصول إلى حل وسط لصالح تحديد الخطأ الأكثر خطورة . الطريقة الوحيدة للتقليل من نوعي الخطأ هو زيادة حجم العينة ، وقد يكون هذا ممكناً وقد لا يكون .

مستوى المعنوية :

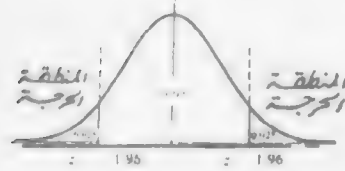
في اختبار فرض معين ، فإن أقصى احتمال والذي يمكن أن نتحمل به خطأ من النوع الأول يسمى مستوى المعنوية للاختبار . هذا الاحتمال ، ويرمز له بالرمز α ، يحدد بشكل عام قبل سحب أي عينة ، بحيث لا تؤثر النتائج التي حصلنا عليها في اختبارنا .

من الناحية العملية فإننا نستخدم عادة مستوى المعنوية 0.05 أو 0.01 ، وإن كانت هناك قيم أخرى يتم استخدامها . وعلى سبيل المثال إذا استخدمنا 0.05 أو 5% مستوى معنوية في تصميم اختبار للفرض ، فإن هناك حوالي 5 فرص في كل 100 أننا سوف نرفض الفروض عندما يجب أن نقبله ، بمعنى « أننا سنكون واثقين بنسبة 95% في أننا ننتخذ القرار السليم . في هذه الحالة فإننا نقول أن نفرض رفض عند مستوى المعنوية 0.05 ، وهذا يعني أنه من الممكن أن نكون على خطأ باحتمال 0.05 .

اختبارات تتضمن التوزيع الطبيعي :

لأعطاء أمثلة للأفكار التي عرضناها أعلاه تصور أنه تحت فرض معين أن توزيع المعاينة للاحصائية S هو التوزيع الطبيعي بمتوسط μ_S وانحراف معياري σ . بهذا فإن توزيع المتغير المعياري (أو درجات z) ، وتعطى بالصورة $z = (S - \mu_S) / \sigma_S$ هو المتغير الطبيعي المعياري (متوسطه 0 ، تباينه 1) ويظهر بالشكل ١٠-١ .

فإذا أخذنا عينة واحدة عشوائية وكانت قيم z للاحصائية تقع خارج المدى 1.96 - إلى 1.96 ، فإننا



شكل ١٠ - ١

نستنتج أن مثل هذا الحدث يمكن أن يقع باحتمال 0.05 فقط (مجموع المساحة المظللة بالشكل) إذا كان الفرض صحيحا . وبهذا يمكن أن نقول أن قيم z تختلف معنويا عما يجب أن يكون متوقعا تحت الفرض وبهذا نميل إلى رفض الفرض .

المساحة الكلية المظللة 0.05 هي مستوى المعنوية للاختبار . وهذه تمثل احتمال ارتكاب خطأ رفض الفرض ، أو احتمال الوقوع في خطأ من النوع الأول . وبهذا نقول أن الفرض رفض عند مستوى معنوية 0.05 أو أن قيم z لاحصائية العينة معنوية عند مستوى المعنوية 0.05 .

قيم z خارج المدى من 1.96 — إلى 1.96 تكون ما يسمى بالمنطقة الحرجة أو منطقة رفض الفرض أو منطقة المعنوية . مجموعة قيم z داخل المدى من 1.96 إلى 1.96 يمكن أن تسمى بمنطقة قبول الفرض أو منطقة عدم المعنوية .

على أساس الملاحظات السابقة يمكن صياغة القواعد التالية للقرارات أو اختبار الفروض أو المعنوية .

(أ) ارفض الفرض عند مستوى معنوية 0.05 إذا كانت قيم z للاحصائية S تقع خارج المدى من 1.96 — إلى 1.96 بمعنى ، $z > 1.96$ أو $z < -1.96$.

وهذا يكافئ القول بأن القيمة المشاهدة لاحصائية العينة معنوية عند المستوى 0.05 .

(ب) اقبل الفرض (أو إذا كان من المرغوب عدم اتخاذ أى قرار على الإطلاق) خلاف ذلك .

ونظرا لأن قيم z تلعب دورا هاما في اختبارات الفروض والمعنوية . فإنها تسمى أيضا احصائية الاختبار .

ويجب ملاحظة أن هناك مستويات أخرى للمعنوية يمكن استخدامها على سبيل المثال ، إذا استخدمنا مستوى 0.01 فإننا نستبدل 1.96 التي استخدمت أعلاه بـ 2.58 (أنظر الجدول ١٠-١ أدناه) . جدول ٩-١ صفحة ٢٥١ يمكن أيضا استخدامه بما أن مجموع مستوى المعنوية ومستوى الثقة هو 100 % .

اختبار من طرف واحد واختبار من طرفين :

في الاختبار السابق أظهرنا الاهتمام بالقيم المتطرفة للاحصائية S أو قيم z المقابلة لها على جانبي المتوسط ، أو على كل من « أطراف » التوزيع . ولهذا السبب تسمى هذا الاختبار بالاختبار من طرفين أو الاختبار في الجانبين . غالبا ، ما تكون مهتمين فقط بالقيم المتطرفة في جانب واحد من المتوسط ، أى في « طرف » واحد من التوزيع ،

إمكانية

ن النتائج

لنا فرضا

نكم يقع .

من أخطاء

شكل عام

، وبهذا

أداة حجم

للاختبار .

اختبارنا

استخدامها .

ص في كل

إر السليم .

ن على خطأ

نوع الطيبي

بالصورة

، فإننا

فعل سبيل المثال عندما تكون مهمتين باختبار الفرض أن تكون أحد المعالجات أحسن من غيرها (والتي تختلف عن اختبار ما إذا كانت معالجة أحسن أو أسوأ من غيرها) . مثل هذه الاختبارات تسمى اختبارات من طرف واحد أو اختبارات من جانب واحد . وفي هذه الحالات فإن المنطقة الحرجة هي منطقة في جانب واحد من التوزيع ، مساحتها تساوي مستوى المعنوية . الجدول ١٠ - ١ يعطي القيم الحرجة لـ z لكل من الاختبارات من طرف واحد والاختبارات من طرفين لمستويات مختلفة من المعنوية ، وهو مفيد للرجوع إليه . القيم الحرجة لـ z لمستويات المعنوية الأخرى يمكن الحصول عليها باستخدام جدول المساحة تحت المنحنى الطبيعي .

جدول ١٠ - ١

مستوى المعنوية α	0.10	0.05	0.01	0.005	0.002
قيم z الحرجة للاختبارات من طرف واحد	-1.28 or 1.28	-1.645 or 1.645	-2.33 or 2.33	-2.58 or 2.58	-2.88 or 2.88
قيم z الحرجة للاختبارات من طرفين	-1.645 and 1.645	-1.96 and 1.96	-2.58 and 2.58	-2.81 and 2.81	-3.08 and 3.08

اختبارات خاصة :

للعينات الكبيرة يتبع توزيع المعاينة لكثير من الاحصائيات التوزيع الطبيعي (أو على الأقل قريب من التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري σ) . في مثل هذه الحالات يمكن أن نستخدم النتائج السابقة لصياغة قواعد اتخاذ القرار أو اختبارات الفروض والمعنوية . الحالات الخاصة التالية ، مأخوذة من الجدول ٨ - ١ ، صفحة ٢٣٠ هي حالات قليلة من الاحصائيات ذات الأهمية العملية . في كل حالة فإن النتائج صالحة للمجتمعات غير المحدودة أو للمعاينة بارجاع . أما للمعاينة بدون ارجاع من المجتمعات المحدودة فإن النتائج يجب تعديلها . أنظر الصفحة ٢٢٧

١ - الأوساط :

هنا $S = \bar{X}$ ، الوسط الحسابي للعينة $\mu = \mu_{\bar{X}} = \mu$ متوسط المجتمع ، $\sigma_S = \sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{N}$ حيث σ هو الانحراف المعياري للمجتمع ، N هو حجم العينة . قيم z تعطى بالصيغة

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}}$$

وعند الضرورة نستخدم الانحراف المعياري للعينة s أو $\hat{\sigma}$ لتقدير σ .

٢ - النسب :

هنا $S = P$ ، نسبة النجاح في عينة ، $\mu_S = \mu_P = p$ ، حيث p هي نسبة النجاح في المجتمع و N

هو حجم العينة ، $\sigma_S = \sigma_P = \sqrt{pq/N}$ حيث $q = 1 - p$. قيم z تعطى كما يلي

$$z = \frac{P - p}{\sqrt{pq/N}}$$

في حالة $P = X/N$ ، حيث X هو العدد الفعل لحالات النجاح في عينة ، وبهذا فإن قيم z تصبح

$$z = \frac{X - Np}{\sqrt{Npq}}$$

أى أن

$$\mu_X = \mu = Np, \sigma_X = \sigma = \sqrt{Npq}, \text{ and } S = X$$

النتائج للاحصائيات الأخرى يمكن الحصول عليها بالمثل .

منحنيات توصيف العمليات . قوة الاختبار :

درسنا فيما سبق كيف يمكن تقليل الخطأ من النوع الأول باختيار مستوى المعنوية المناسب . ومن الممكن تجنب الوقوع في الخطأ من النوع الثاني كلية ، وذلك بعدم الوقوع فيه ، وهذا يتطلب عدم قبول أى فرض . وفى كثير من الحالات العملية يعد هذا غير ممكن . فى مثل هذه الحالات فإنه يتم استخدام منحنيات توصيف العمليات أو منحنيات OC ، وهى أشكال الخطأ من النوع الثاني تحت فروض مختلفة . وهذا يعطى مؤشر الحرف a على الكلفة الأولى المدى ما يتيحه اختبار معين لنا من وهذه المنحنيات مفيدة فى الثاني ، أى أنها تعطى مؤشرا لقوة الاختبار فى تلافى الوقوع فى اتخاذ القرارات خاطئة . تقليل للأخطاء من النوع تصميم التجارب فإنها توضح على سبيل المثال ، ما هو حجم العينة الذى يمكن استخدامه .

خرائط الرقابة :

من المهم فى الناحية العملية معرفة ما إذا كانت عملية صناعية قد تغيرت بشكل كاف بحيث يجب اتخاذ خطوات لمعالجة الموقف . مثل هذه المشاكل تظهر « على سبيل المثال » فى الرقابة على جودة الإنتاج عندما يجب ، وبسرعة ، تقرير ما إذا كانت التغيرات المشاهدة ترجع إلى تقلبات الصدفة أو إلى تغيرات فعلية فى العملية الصناعية لأسباب مثل تقادم أجزاء الماكينة ، أو أخطاء العاملين ، وغير ذلك . وتعطى خرائط الرقابة طريقة مفيدة وبسيطة للتعامل مع هذه المشاكل (أنظر المسألة ١٠ - ١٦)

اختبارات المعنوية التى تتضمن الفروق بين العينات :

١ - الفروق بين الأوساط :

اعتبر أن \bar{X}_1 و \bar{X}_2 هى أوساط العينة التى حصلنا عليها من عينات كبيرة أحجامها N_1 و N_2 بحيث من مجتمعات أوساطها μ_1 و μ_2 وانحرافاتهما المعيارية σ_1 و σ_2 . اعتبر فرض العدم بأنه لا يوجد فروق بين أوساط المجتمعين . أى أن $\mu_1 = \mu_2$ أو أن العينات مسحوبة من مجتمعين لها نفس الوسط الحسابي .

(والتي تختلف
من طرف
من التوزيع ،
ن طرف واحد
وبيات المعنوية

طرف واحد

طرفين

يب من التوزيع
السابقة لصياغة
ل ٨ - ١ ،
ت غير المحدودة
٢٢٧ .

σ_S حيث

فى المجتمع و N

من الفصل الثامن ، صفحة ٢٢٩ ، المعادلة (٥) ، إذا وضعنا $\mu_1 = \mu_2$ فإننا نجد أن توزيع المعاينة للفروق بين الأوساط يتوزع تقريباً كالتوزيع الطبيعي بوسط حسابي وانحراف معياري معطين كما يلي :

$$\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = 0 \text{ and } \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{(\sigma_1^2/N_1) + (\sigma_2^2/N_2)}$$

ويمكن هنا ، إذا كان ذلك ضرورياً ، استخدام الانحرافات المعيارية للعينة s_1 و s_2 (أو \hat{s}_1 و \hat{s}_2) لتقدير σ_1 و σ_2 .

باستخدام المتغير المعياري أو قيم z المعطاة كما يلي :

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 0}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

يمكن اختبار فرض العدم ضد الفروض البديلة (أو معنوية الفروق المشاهدة) عند مستوى ملائم للمعنوية .

٢ - الفروق بين النسب :

اعتبر أن P_1 و P_2 هي نسب العينة التي حصلنا عليها من عينات كبيرة أحجامها N_1 و N_2 مسحوبة من مجتمعات نسبية p_1 و p_2 . اعتبر فرض العدم بأنه لا يوجد فروق بين معالم المجتمعين ، أي أن $p_1 = p_2$ ، وبهذا فإن العينات مسحوبة فعلاً من نفس المجتمع .

من الفصل الثامن ، صفحة ٢٢٩ ، المعادلة (٦) إذا وضعنا $p_1 = p_2 = p$ فإننا نجد أن توزيع المعاينة للفروق بين النسب يتوزع تقريباً كالتوزيع الطبيعي بوسط حسابي وانحراف معياري معطين كما يلي :

$$(٣) \quad \mu_{P_1 - P_2} = 0 \text{ and } \sigma_{P_1 - P_2} = \sqrt{pq(1/N_1 + 1/N_2)}$$

حيث $p = \frac{N_1 P_1 + N_2 P_2}{N_1 + N_2}$ (١٠) يستخدم كتقدير لنسب المجتمع ، و $q = 1 - p$ باستخدام المتغير المعياري

$$(٤) \quad z = \frac{P_1 - P_2 - 0}{\sigma_{P_1 - P_2}} = \frac{P_1 - P_2}{\sigma_{P_1 - P_2}}$$

يمكن أن نختبر الفروق المشاهدة عند مستوى معنوية ملائم وبالتالي نختبر فرض العدم .

الاختبارات المتضمنة احصائيات أخرى يمكن تصميمها بصورة مشابهة .

اختبارات تتضمن توزيعات ذي الحدين :

الاختبارات المتضمنة لتوزيع ذي الحدين ومثل ذلك التوزيعات الأخرى يمكن تصميمها بصورة مشابهة لتلك التي تستخدم فيها التوزيع الطبيعي ، حيث تتفق المبادئ الأساسية في كل منها . (أنظر المسألة ١٠ - ٢٣ إلى ١٠ - ٢٨)

مسائل محلولة

اختبارات الأوساط والنسب باستخدام التوزيع الطبيعي :

١٠ - ١ أوجد احتمال الحصول على ما بين 40 و 60 صورة (بما في ذلك 40 ، 60) في 100 رمية لعملة متوازنة .

الحل :

طبقاً للتوزيع الطبيعي فإن الاحتمال المطلوب هو :

$${}_{100}C_{40}(\frac{1}{2})^{40}(\frac{1}{2})^{60} + {}_{100}C_{41}(\frac{1}{2})^{41}(\frac{1}{2})^{59} + \dots + {}_{100}C_{60}(\frac{1}{2})^{60}(\frac{1}{2})^{40}$$

بما أن $Np = 100(\frac{1}{2}) = 50$ و $Nq = 100(\frac{1}{2}) = 50$ وكلاهما أكبر من 5 ، وبهذا يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين لحساب هذا المجموع

المتوسط والانحراف المعياري لعدد الصور في 100 رمية يعطيان بما يلي :

$$\mu = Np = 100(\frac{1}{2}) = 50 \text{ and } \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} = 5$$

وباستخدام الفرض بأن المتغير مستمر ، فإن عدد الصور بين 40 و 60 متضمنة 40 و 60 (مثل عدد الصور بين 39.5 و 60.5)

$$39.5 \text{ مقاسة بوحدات معيارية } = (39.5 - 50)/5 = -2.10$$

$$60.5 \text{ مقاسة بوحدات معيارية } = (60.5 - 50)/5 = 2.10$$

الاحتمال المطلوب = المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين $z = -2.10$ و $z = 2.10$

$$2 \times (z = 2.10 \text{ و } z = 0 \text{ المساحة بين }) = 2(0.4821) = 0.9642$$

١٠ - ٢ لاختبار الفرض أن عملة غير متحيزة ، اعتبر القواعد التالية لاتخاذ القرار : (١) اقبل الفرض إذا كان عدد الصور في عينة واحدة من 100 رمية تقع بين 40 و 60 (بما فيها 40 ، 60) (٢) ارفض الفرض فيما عدا ذلك .

(أ) أوجد احتمال رفض الفرض عندما يكون صحيحاً .

(ب) صرّح بالرسم عن قواعد اتخاذ القرار والنتائج في الجزء (أ)

(ج) ماهو استنتاجك إذا كانت العينة المكونة من 100 رمية يفتح عنها 53 صورة ؟ 60 صورة ؟

(د) هل يمكن أن تكون مخطئاً في استنتاجك في (ج) ؟ وضع

ن الأوساط

(: لتقدير

نعمات نسبها

ات مسحوقة

أينة للفروق

(

لعيارى

(

تستخدم فيها

الحل :

(أ) من المسألة ١٠ - ١ ، احتمال عدم الحصول

على عدد صور بين 40 و 60 (بما فيها

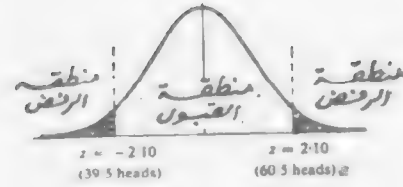
40 و 60) إذا كانت العملة غير متحيزة

 $= 0.0358 = 1 - 0.9642$ إذن احتمالرفض الفرض على الرغم من أنه سليم $= 0.0358$

(ب) قواعد اتخاذ القرار موضحة بالشكل ١٠ - ١

والتي يوضح التوزيع الاحتمالي للصور في 100

رمية لعملة غير متحيزة .



شكل ١٠ - ٢

إذا كانت عينة مكونة من 100 رمية ينتج عنها قيم z بين -2.10 و 2.10 ، فإننا نقبل الفرض بخلاف ذلك نرفض ونقرر أن العملة متحيزة .

الخطأ الناتج من رفض الفرض عندما يجب أن نقبله هو الخطأ من النوع الأول في قواعد اتخاذ القرار : واحتمال الوقوع في هذا الخطأ ، هو 0.0358 من الجزء (أ) ويمثل بالأجزاء المظلة في الرسم .

إذا كانت عينة مكونة من 100 رمية ينتج عنها قيم z (أو إحصائية z) تقع في المناطق المظلة ، فإننا نقول أن هذه القيم تختلف اختلافاً معنوياً مما يمكن أن نتوقعه إذا كان الفرض صحيحاً . ولهذا السبب فإن إجمالى المساحة المظلة (احتمال الخطأ من النوع الأول) تسمى بمستوى المنوية لقواعد اتخاذ القرار وتساوى في هذه الحالة 0.0358 . وبهذا نتكلم عن رفض الفرض عند مستوى معنوية 0.0358 أو 3.58% .

(ج) طبقاً لقاعدة اتخاذ القرار ، فإننا نقبل الفرض بأن العملة غير متحيزة في كلتا الحالتين . ويمكن مناقشة هذه القاعدة على أساس لظهور صورتين واحدة أخرى فإن هذا كان سيؤدي إلى رفض الفرض . وهذا ما يواجهه الشخص عند استخدام خط فاصل في تقسيم مناطق القبول والرفض عند اتخاذ القرارات .

(د) نعم . سوف نقبل الفرض عندما يجب رفض هذا الفرض بالفعل . كما في الحالة على سبيل المثال عندما يكون احتمال الصور هو 0.7 حقيقة بدلاً من 0.5 .

الخطأ من قبول الفرض عندما يجب رفضه هو الخطأ من النوع الثاني . لمزيد من المناقشة أنظر المسائل من ١٠ - ١١

إلى ١٠ - ١٢ .

١٠ - ٣ صمم قاعدة لاتخاذ قرار بشأن اختبار الفرض بأن عملة غير متحيزة إذا أخذت عينة مكونة من 64 رمية للعملة وكان

مستوى المنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01

الحل :

(أ) الطريقة الأولى : إذا كان مستوى المعنوية

0.05 ، فإن كلا من المنطقة المظلة في الشكل

١٠ - ٣ يساوي 0.0250 بالتأثيل . وبهذا فإن

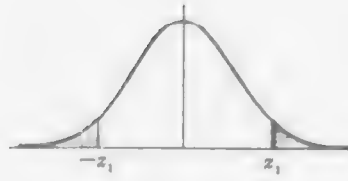
المساحة بين الصفر و z_1 ستساوي

$$z_1 = 1.96 \text{ و } 0.5000 - 0.0250 = 0.4750$$

وبهذا فإن أحد القواعد الممكنة لاتخاذ القرار

هي :

(١) اقبل الفرض بأن العملة غير متحيزة إذا كانت

 z تقع بين - 1.96 و 1.96

شكل ١٠ - ٣

(٢) ارفض الفرض فيما عدا ذلك .

القيم الحرجة 1.96 و - 1.96 يمكن الحصول عليها أيضاً من الجدول ١٠ - ١ .

للتعبير عن هذه القاعدة بدلالة عدد الصور التي سوف نحصل عليها في 64 رمية للعملة ، لاحظ أن المتوسط والانحراف

المعياري لتوزيع الصور هما :

$$\mu = Np = 64(0.5) = 32, \text{ and } \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{64(0.5)(0.5)} = 4$$

وذلك تحت فرض أن العملة غير متحيزة .

$$z = (X - \mu) / \sigma = (X - 32) / 4 \quad \text{إذن}$$

إذا كانت $z = 1.96, (X - 32) / 4 = 1.96$ or $X = 39.84$. If $z = -1.96, (X - 32) / 4 = -1.96$ or $X = 24.16$

وبهذا فإن قواعد اتخاذ القرار ، ستكون

(١) اقبل الفرض بأن العملة غير متحيزة إذا كان عدد الصور يقع بين 24.16 و 39.84 أي بين 25 و 39

(شاملة 25 و 39)

(٢) ارفض الفرض فيما عدا ذلك .

الطريقة الثانية : باحتمال 0.95 ، فإن عدد الصور سوف يقع بين .

$$Np - 1.96\sqrt{Npq} \text{ and } Np + 1.96\sqrt{Npq} \quad \text{أي} \quad \mu - 1.96\sigma \text{ and } \mu + 1.96\sigma$$

$$32 - 1.96(4) = 24.16 \text{ and } 32 + 1.96(4) = 39.84 \quad \text{أو بين}$$

والذي سيؤدي إلى القاعدة السابقة في اتخاذ القرار .

نس بخلاف

: واحتمال

فإننا نقول

بالى المساحة

هذه الحالة

هذه القاعدة

به الشخص

كون احتمال

١٠ - ١٠

مسلة وكان

طريقة ثالثة : $-1.96 < z < 1.96$ تكافئ $-1.96 < \frac{1}{4}(X - 32) < 1.96$

إذن $1.96(4) < (X - 32) < 1.96(4)$ أو $1.96(4) < X - 32 < 1.96(4)$, i.e. $24.16 < X < 39.84$

والذى يؤدى أيضاً إلى القاعده السابقة فى اتخاذ القرار .

(ب) إذا كان مستوى المعنوية هو 0.01 ، فإن كلا من المنطقة المظلة فى الرسم أعلاه تساوى 0.005 . إذن المساحة بين الصفر و z_1 تساوى $0.4950 = 0.5000 - 0.0050$ و $z_1 = 2.58$ (بصورة أكثر دقة 2.575) .

وهذه القيمة يمكن الحصول عليها أيضاً من الجدول ١٠ - ١

باستخدام الأسلوب فى الطريقة الثانية فى (أ) ، فإننا نجد باحتمال 0.99 أن عدد الصور سيقع بين

$$\mu - 2.58\sigma \text{ and } \mu + 2.58\sigma, \text{ i.e. } 32 - 2.58(4) = 21.68 \text{ and } 32 + 2.58(4) = 42.32$$

وبهذا فإن قواعد اتخاذ القرار ستكون

(١) اقبل الفرض إذا كان عدد الصور يقع بين 22 و 42 (شاملة 22 ، 42)

(٢) ارفض الفرض فيما عدا ذلك .

١٠ - ٤ كيف يمكنك تصميم قاعدة لاتخاذ القرار فى المسألة ١٠ - ٣ بحيث تتجنب الخطأ من النوع الثانى ؟

الحل :

نقع فى الخطأ من النوع الثانى وذلك بقبول الفرض عندما يكون من الواجب رفضه . لتجنب هذا الخطأ ، فإنه بدلاً من قبول الفرض فإننا ببساطة لانرفضه ، والذى يعنى أننا نؤجل اتخاذ القرار فى هذه الحالة . هذا ، على سبيل المثال ، يمكن صياغة قاعدة اتخاذ القرار فى المسألة ١٠ - ٣ (ب) كما يلى :

(١) لانرفض الفرض إذا كان عدد الصور يقع بين 22 و 42 (شاملة 22 و 42)

(٢) ارفض الفرض فيما عدا ذلك .

فى كثير من النواحي العملية ، يكون من المهم تقرير ما إذا كان من الواجب قبول الفرض أو رفضه . المناقشة السكاملة لمثل هذه الحالات تتطلب الأخذ فى الاعتبار الخطأ من النوع الثانى (أنظر المسائل من ١٠ - ١٠ إلى ١٢ - ١٢)

١٠ - ٥ فى تجربة لقياس القدرة الخارقة على الإدراك (الحاسة السادسة) (E.S.P.) طلب من شخص (موضوع التجربة)

فى حجرة أن يوضح لون (أحمر أو أزرق) كارت من 50 كارت مخلوطة خلطاً جيداً اختير بواسطة شخص فى حجرة

ثانية . وكان من غير المعروف للشخص موضوع التجربة عدد الكروت الحمراء أو الزرقاء فى مجموعة الكروت . إذا

أمكن للشخص موضوع التجربة أن يميز 32 كارت تمييزاً صحيحاً ، حدد ما إذا كانت النتائج معنوية عند

(أ) 0.05 (ب) 0.01 مستوى معنوية .

الحل :

إذا كانت p هي احتمال أن يختار الشخص موضوع التجربة اللون الصحيح، وبهذا فإننا يجب أن نقرر بين الفرضين التاليين :

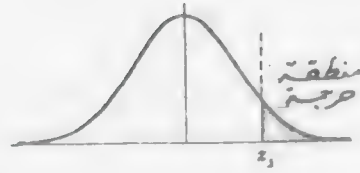
$H_0 : p = 0.5$ ، أى أن الشخص يخمن وأن النتائج ترجع للصدفة .

$H_1 : p > 0.5$ ، والشخص له قدره خارقة على الإدراك .

ونختار هنا اختباراً من طرف واحد ، حيث أننا لانهم بقدرة الشخص على تسجيل قيم ضئيلة ولكن نهم فقط بقدرة على تسجيل قيم مرتفعة .

إذا كان الفرض H_0 صحيحاً ، فإن الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعدد الكروت الذى أمكن تمييزها بشكل سليم هما :

$$\mu = Np = 50(0.5) = 25 \text{ and } \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{50(0.5)(0.5)} = \sqrt{12.5} = 3.54$$



شكل ١٠ - ٤

(أ) للاختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية

0.05 فإننا يجب اختيار z_1 في الشكل

١٠ - ٤ بحيث تساوى المساحة المظلة

في المنطقة الحرجية للقيم الكبيرة ، 0.05 .

إذن المساحة بين الصفر و z_1 تساوى

0.4500 و $z_1 = 1.645$. ويمكن

الحصول عليها أيضاً من الجدول ١٠ - ١ .

وبهذا تكون قواعد اتخاذ القرار أو اختبار المعنوية كما يلي :

(١) إذا كانت قيم z المشاهد أكبر من 1.645 ، فإن النتيجة معنوية عند مستوى 0.05 ويكون لدى الشخص قوة خارقة على الإدراك .

(٢) إذا كانت قيم z أقل من 1.645 فإن النتيجة ترجع للصدفة ، أى غير معنوية عند المستوى 0.05 .

وبما أن 32 معبراً عنها بوحدات مقيارية تساوى $1.98 = (32 - 25)/3.54$ وهى أكبر من 1.645

فإن القرار (١) ينطبق ، بمعنى أننا نستنتج عند المستوى 0.05 أن الشخص عنده قدرة خارقة على الإدراك .E.S.P.

لاحظ أنه يجب أن نطبق التصحيح الخاص بالمتغيرات المتصلة ، وبما أن 32 في مقياس الاستمرار تقع بين

31.5 و 32.5 . والرقم 31.5 معبراً عنها بوحدات مقيارية هى $1.84 = (31.5 - 25)/3.54$ وبهذا تصل إلى نفس الاستنتاج السابق .

(ب) إذا كان مستوى المعنوية هو 0.01 ، فإن المساحة بين الصفر و z_1 تساوى 0.4900 و $z_1 = 2.33$ وبما أن 32 (أو 31.5) معبراً عنها بوحدات مقيارية هي 1.98 (أو 1.84) وهي أقل من 2.33 فإننا نستنتج أن النتائج غير معنوية عند 0.01.

يتبنى بعض الإحصائيين المصطلح بأن النتائج المعنوية عند المستوى 0.01 تسمى مرتفعة المعنوية ، والنتائج المعنوية عند المستوى 0.05 وغير المعنوية عند 0.01 بأنها محتملة المعنوية ، بينما النتائج المعنوية عند مستويات أكبر من 0.05 غير معنوية .

وبما أن مستويات المعنوية تستخدم كؤشر في اتخاذ القرارات ، فإن بعض الإحصائيين يذكر الاحتمالات الفعلية المستخدمة . على سبيل المثال في هذه المسألة فبما أن $\Pr \{z \geq 1.84\} = 0.0322$ ، فإن الاحصائي يمكنه القول بأنه استناداً إلى التجربة فإن فرصة ارتكاب الخطأ بالقول أن هذا الشخص له قوة خارقة على الإدراك E.P.S. هي حوالى 3 في كل 100 . الاحتمال المذكور في هذه الحالة 0.0322 ، يسمى أحياناً بالمعنوية الوصفية أو المعنوية التجريبية .

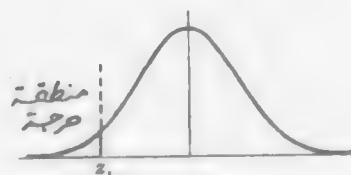
١٠ - ٩ مصنع للأدوية المسجلة يدعى أن دواء من انتاجه له فاعلية بنسبة 90% في التخفيف من الحساسية لفترة 8 ساعات . في عينة من 200 شخص مصابين بالحساسية ، أدى الدواء إلى تخفيف آلام 160 منهم . قرر ما إذا كان ادعاء المصنع صحيحاً .

الحل :

اعتبر أن p تمثل احتمال أن يؤدي الدواء إلى التخفيف من آلام الحساسية . وبهذا فإنه يجب أن نقرر بين الفرضين:

$$H_0 : p = 0.9 \text{ والادعاء صحيح}$$

$$H_1 : p < 0.9 \text{ والادعاء باطل}$$



شكل ١٠ - ٥

نختار اختباراً من طرف واحد ، حيث أننا نهم بتحديد ما إذا كانت نسبة الأشخاص الذين شفوا باستخدام الدواء نسبة قليلة.

إذا كان مستوى المعنوية المأخوذ هو 0.01 بمعنى أن المساحة المظلة في الشكل ١٠ - ٥ هي 0.01 فإن $z_1 = -2.33$ كما في المسألة ١٠ - ٥ (ب) باستخدام خاصية التماثل في المنحنى ، أو من الجدول ١٠ - ١ . ونستخدم كأساس لاتخاذ القرار :

(١) الفرض ليس صحيحاً إذا كانت z أقل من -2.33 (وفي هذه الحالة نرفض H_0).

(٢) في غير ذلك من الحالات ، الادعاء صحيح والنتائج المشاهدة ترجع إلى الصدفة (في هذه الحالة نقبل H_0).

إذا كانت H_0 صحيحة ، $\mu = Np = (100)(0.8) = 80$ and $\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(0.8)(0.2)} = 4$

في هذه الحالة 160 معبراً عنها بوحدات معيارية $4.73 = (180 - 160)/4.23$ وهي أقل بكثير من 2.33 — وطبقاً لقاعدة اتخاذ القرار التي وضعناها فإننا نستنتج أن الادعاء غير صحيح وأن نتائج العينة مرتفعة المعنوية (أنظر نهاية المسألة ١٠ - ٥).

١٠ - ٧ متوسط العمر الإنتاجي لعينة من 100 لمبة من لمبات الفلورسنت من إنتاج أحد المصانع هو 1570 ساعة وانحرافها المعياري 120 ساعة. إذا كان μ هو متوسط العمر الإنتاجي لجميع اللمبات المنتجة بواسطة الشركة ، اختبر الفرض $\mu = 1600$ ساعة ضد الفرض البديل $\mu \neq 1600$ ساعة ، مستخدماً مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01

الحل :

يجب أن نختار بين الفرضين :

ساعة $H_0 : \mu = 1600$ ، ساعة $H_1 : \mu \neq 1600$

يجب أن نستخدم هنا اختباراً من طرفين حيث أن $\mu \neq 1600$ تشمل كلا من القيم الأكبر من أو الأصغر من 1600 .

(١) للاختبار من طرفين عند مستوى المعنوية 0.05 ، نستخدم قواعد اتخاذ القرار التالية .

(١) ارفض H_0 إذا كانت قيم z المحسوبة من العينة تقع خارج المدى 1.96 — إلى 1.96 .

(٢) اقبل H_0 (أولاً تتخذ أى قرار) خلاف ذلك .

الاحصائية المعتبرة هنا متوسط العينة \bar{X} . توزيع المعاينة لـ \bar{X} له متوسط $\mu_{\bar{X}} = \mu$ وانحراف معياري $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{N}$ ، حيث μ هو متوسط المجتمع و σ الانحراف المعياري للمجتمع المكون من جميع اللمبات المنتجة بواسطة الشركة .

تحت الفرض H_0 ، فإن $\mu = 1600$ و $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{N} = 120/\sqrt{100} = 12$ باستخدام الانحراف المعياري للعينة كتقدير لـ σ . بما أن $z = (\bar{X} - 1600)/12 = (1570 - 1600)/12 = -2.50$ يقع خارج المدى 1.96 — إلى 1.96 فإننا نرفض الفرض H_0 عند مستوى المعنوية 0.05 .

(ب) إذا كان مستوى المعنوية 0.01 ، فالمدى 1.96 — إلى 1.96 في قواعد اتخاذ القرار في الجزء (أ) يحل بدلاً منه المدى من 2.58 — إلى 2.58 . بما أن قيمة z المساوية لـ 2.50 — تقع داخل هذا المدى ، فإننا نقبل H_0 (أولاً نتخذ أى قرار) عند مستوى المعنوية 0.01 .

١٠ - ٨ في المسألة ١٠ - ٧ ، اختبر الفرض $\mu = 1600$ ساعة ضد الفرض البديل $\mu < 1600$ ساعة ، باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 .

الحل :

يجب أن نختار بين الفرضين

$$H_0 : \mu = 1600 \text{ ساعة} , H_1 : \mu < 1600 \text{ ساعة}$$

ونستخدم هنا اختباراً من طرف واحد ، والقيم المقابلة لمطابقة لتلك القيم في المسألة ١٠ - ٦ .

(أ) إذا كان مستوى المعنوية 0.05 ، المنطقة المظلة في الشكل ١٠ - ٥ مساحتها 0.05 ، ونجد أن $z_1 = -1.645$. ولهذا نستخدم القاعدة التالية في اتخاذ القرار :

(١) ارفض H_0 إذا كانت z أقل من -1.645 .

(٢) اقبل H_0 (أولاً تتخذ أى قرار) فيما عدا ذلك .

وبما أن ، كما في المسألة ١٠ - ٧ (أ) ، قيمة z هي -2.50 وهي أقل من -1.645 ، فإننا نرفض H_0 عند مستوى المعنوية 0.05 . لاحظ أن هذا القرار مماثل لما توصلنا إليه في المسألة ١٠ - ٧ (أ) باستخدام اختبار من طرفين .

(ب) إذا كان مستوى المعنوية هو 0.01 ، فإن قيم z_1 في الشكل ١٠ - ٥ هي -2.33 . ولهذا فستستخدم القاعدة التالية في اتخاذ القرار :

(١) ارفض H_0 إذا كانت z أقل من -2.33 .

(٢) اقبل H_0 (أولاً تتخذ أى قرار) فيما عدا ذلك .

وبما أن ، كما في المسألة ١٠ - ٧ (أ) ، قيمة z هي -2.50 وهي أقل من -2.33 ، فإننا نرفض الفرض عند مستوى معنوية 0.01 . لاحظ أن هذا القرار يختلف عما وصلنا إليه في المسألة ١٠ - ٧ (أ) باستخدام الاختبار من طرفين .

يفتج عن ذلك أن القرارات الخاصة بفرض معين H_0 المبنية على اختبار من طرف واحد أو اختبار من طرفين ليست دائماً على اتفاق . وهذا ، بالطبع ، متوقع حيث أننا نختبر H_0 في مقابل بديل مختلف في كل حالة .

٩ - ١٠ متوسط قوة مقاومة حبال القطع من إنتاج أحد المصانع هو 1800 N وانحرافها المعياري 100 N . باستخدام طريقة جديدة للتصنيع ادعى أن قوة مقاومة الحبال سوف تزداد . لاختبار هذا الادعاء أخذت عينة من 50 حبلًا وتم اختبارها ووجد أن متوسط مقاومتها للقطع هو 1850 N . هل يمكن تأييد هذا الادعاء عند مستوى المعنوية 0.01 ؟

الحل :

يجب أن نختار بين الفرضين :

$$H_0 : \mu = 1800 \text{ N} , \text{ ولا يوجد تغيير حقيقى في قوة مقاومة الحبال}$$

$$H_1 : \mu > 1800 \text{ N} , \text{ ويوجد تغيير في قوة مقاومة الحبال}$$

ونستخدم هنا اختباراً من طرف واحد . الشكل المرتبط بهذا الاختبار مماثل للشكل بالمسألة ١٠ - ٥ عند مستوى معنوية 0.01 ولذلك فإن قاعدة اتخاذ القرار هي

(١) إذا كانت قيم z المشاهدة أكبر من 2.33 ، فإن النتائج معنوية عند مستوى 0.01 ونرفض H_0 .

(٢) بخلاف ذلك نقبل H_0 (أو نؤجل اتخاذ القرار)

تحت الفرض بأن H_0 صحيح ، فإننا نجد

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} = \frac{1850 - 1800}{100/\sqrt{50}} = 3.55$$

وهو أكبر من 2.33 . وبهذا نستنتج أن النتائج مرتفعة المعنوية أي أن الادعاء يجب تأييده .

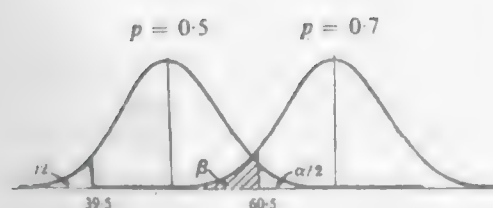
منحنيات توصيف العمليات :

١٠-١٠ بالرجوع إلى المسألة ١٠-٢ ، ما هو احتمال قبول الفرض بأن العملة غير متحيزة عندما يكون الاحتمال الفعلي

للمون هو $p = 0.7$ ؟

الحل :

الفرض H_0 القائل بأن العملة غير متحيزة ، أي $p = 0.5$ يقبل إذا كان عدد المون في مائة رمية يقع بين 39.5 و 60.5 . احتمال رفض H_0 عندما يجب أن نقبله (احتمال الوقوع في خطأ من النوع الأول) . وتمثل بالمساحة الكلية α للمنطقة المظلمة تحت المنحنى الطبيعي إلى اليسار في الشكل ١٠-٦ . كما حسب في المسألة ١٠-٢ (١) ، المساحة α ، والتي تمثل مستوى المعنوية لاختبار H_0 تساوي 0.0358 .



إذا كان احتمال المون هو $p = 0.7$ ، فإن توزيع المون في 100 رمية تمثل بالمنحنى الطبيعي بالشكل ١٠-٦ . يتضح من الشكل أن احتمال قبول H_0 عندما تكون $p = 0.07$ بالفعل (احتمال الوقوع في خطأ من النوع الثاني) يمثى بالمنطقة β المظلمة بخطوط مائلة في الشكل .

لحساب هذه المساحة نلاحظ أن التوزيع تحت الفرض $p = 0.7$ له متوسط وانحراف معياري كالآتي :

$$\mu = Np = (100)(0.7) = 70 \text{ and } \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(0.7)(0.3)} = 4.58$$

$$60.5 \text{ بوححدات معيارية} = -2.07 = (60.5 - 70)/4.58$$

$$39.5 \text{ بوححدات معيارية} = -6.66 = (39.5 - 70)/4.58$$

إذن

$0.0192 =$ (المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين $z = -6.66$ و $z = -2.07$). بهذا وباستخدام قواعد اتخاذ

القرار المعطاة فإن هناك فرصة ضئيلة في قبول الفرض بأن العملة غير متحيزة عندما تكون $p = 0.7$ بالفعل.

لاحظ أننا في هذه المسألة قد أعطينا أسس اتخاذ القرار والتي حسبناها β و α . ومن الناحية العملية من الممكن ظهور الحالتين :

(١) نختار قيمة α (مثل 0.05 أو 0.01)، نصل إلى أساس لاتخاذ القرار ثم نحسب β

(٢) نختار قيمة β و α ثم نصل إلى أساس اتخاذ القرار.

١١-١٠ حل المسألة السابقة إذا كانت (١) $p = 0.6$ (ب) $p = 0.8$ (ج) $p = 0.9$ (د) $p = 0.4$

الحل :

(١) إذا كانت $p = 0.6$ فإن توزيع الصور له متوسط وانحراف معياري كالآتي :

$$\mu = Np = (100)(0.6) = 60 \quad \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(0.6)(0.4)} = 4.90$$

$$60.5 \text{ بوححدات معيارية} = 0.0102 = (60.5 - 60)/4.90$$

$$39.5 \text{ بوححدات معيارية} = -4.18 = (39.5 - 60)/4.90$$

إذن

$$\beta = 0.5040 \text{ (المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين } z = -4.18 \text{ و } z = 0.0102 \text{)}$$

بهذا وباستخدام قواعد اتخاذ القرار المعطاة فإن هناك فرصة كبيرة في قبول الفرض بأن العملة غير متحيزة عندما

تكون القيمة الفعلية هي $p = 0.6$

(ب) إذا كانت $p = 0.8$ ، فإن $\mu = Np = (100)(0.8) = 80$ and $\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(0.8)(0.2)} = 4$

$$60.5 \text{ بوححدات معيارية} = -4.88 = (60.5 - 80)/4$$

$$39.5 \text{ بوححدات معيارية} = -10.12 = (39.5 - 80)/4$$

إذن

$$\beta = 0.0000 \text{ (المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين } z = -10.12 \text{ و } z = -4.88 \text{)}$$

(قريبة جداً من الصفر).

(ج) من المقارنة بـ (١) أو بالحساب ، نجد أنه إذا كانت $p = 0.9$ ، فإن $\beta = 0$ وذلك لجميع الأغراض العملية .

(د) بالتأمل $p = 0.4$ تعطى قيمة β مثل $p = 0.6$ ، أى $\beta = 0.5040$

١٧-١٠ عبر ببيانها عن نتائج المسائل ١٠-١٠ و ١١-١٠ برسم شكل (١) β مقابل p (ب) $(1 - \beta)$ مقابل p .
فسر الأشكال الناتجة .

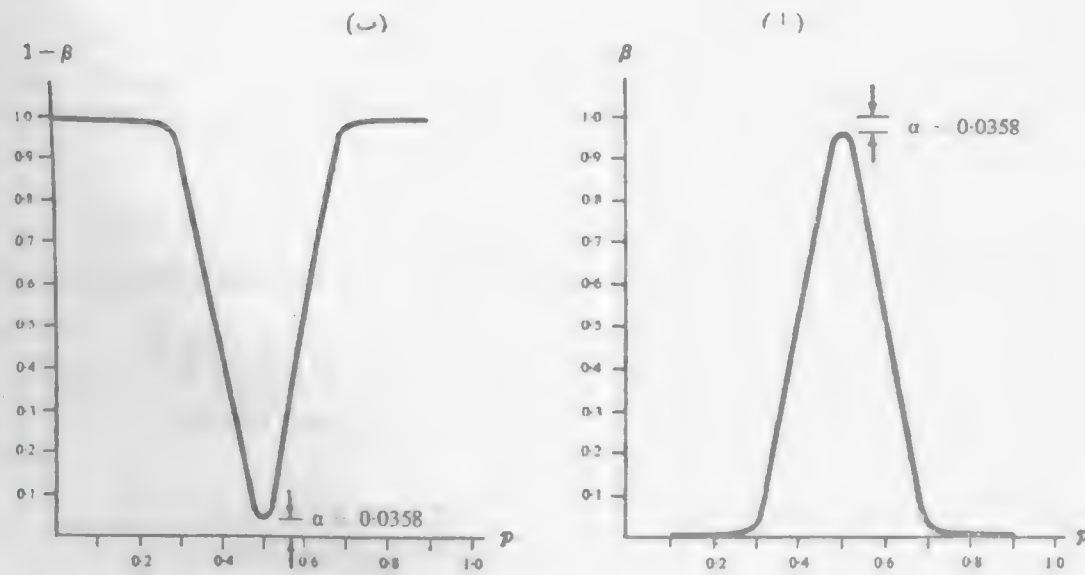
الحل :

الجدول ٢-١٠ يوضح قيم β المقابلة لقيم p المطاة كما حصلنا عليها في المسائل ١٠-١٠ و ١١-١٠ .

جدول ٢-١٠

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
β	0.0000	0.0000	0.0192	0.5040	0.9642	0.5040	0.0192	0.0000	0.0000

لاحظ أن β تمثل احتمال قبول الفرض بأن $p = 0.5$ عندما تكون قيمة p الفعلية قيمة أخرى غير 0.5 .
أما إذا كانت قيمة p الفعلية هي 0.5 فإن β تمثل احتمال قبول $p = 0.5$ عندما يكون من المفروض قبولها . هذا
الاحتمال يساوى $1 - 0.0358 = 0.9642$ وهو موضح بالجدول ٢-١٠ .



شكل ٧-١٠

(١) الشكل البياني β مقابل p ، موضح بالشكل ١٠-٧ (١) ، يسمى بمنحنى توصيف العمليات أو منحنى OC لقاعدة اتخاذ القرار أو لاختبار الفرض .

المسافة بين نقطة النهاية العظمى للمنحنى OC والخط $\beta = 1$ يساوي $\alpha = 0.0358$ ، مستوى المعنوية للاختبار .

وبشكل عام ، كلما زادت حدة قوة المنحنى OC كانت قواعد اتخاذ القرار أفضل في رفض الفروض غير الصحيحة .

(ب) الشكل البياني $(1 - \beta)$ مقابل p ، موضح بالشكل ١٠-٧ (١) ، يسمى بمنحنى قوة اختبار الفرض أو قواعد اتخاذ القرار . وهذا المنحنى نحصل عليه ببساطة كقلوب لمنحنى OC ، بحيث أن الشكلين من الناحية الفعلية متكافئين .

الكمية $(1 - \beta)$ تسمى غالباً دالة القوة حيث أنها تشير إلى قابلية أو قوة الاختبار لرفض الفرض غير الصحيح ، أي الذي يجب رفضه . وتسمى الكمية β دالة توصيف العمليات للاختبار .

١٠-١٣ تنتج شركة كابلات متوسطة قوة مقاومتها للكسر هو 300 N وانحرافها المعياري 24 N . ومن المعتقد أنه باستخدام طريقة جديدة مبتكرة يمكن زيادة قوة المقاومة للكسر .

(١) صمم قاعدة لاتخاذ القرار بشأن رفض الأسلوب القديم في التصنيع عند مستوى معنوية 0.01 إذا افق على اختبار 64 كابل .

(ب) بنفس قاعدة لاتخاذ القرار المستخدمة في (١) ، ما هو احتمال قبول الطريقة القديمة عندما تكون الطريقة الحديثة قد أدت في الواقع إلى زيادة متوسط المقاومة للكسر إلى 310 N ؟ افترض أن الانحراف المعياري لا يزال 24 N .

الحل :

(١) إذا كانت μ هي متوسط المقاومة للكسر ، فإننا نريد أن نقرر بين الفرضين :

$$H_0 : \mu = 300\text{ N} \text{ أي أن الطريقة الجديدة مثل الطريقة القديمة ،}$$

$$H_1 : \mu > 300\text{ N} \text{ ، أي أن الطريقة الجديدة أفضل من الطريقة القديمة .}$$

للاختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.01 ، فإننا نحصل على القواعد التالية لاتخاذ القرار (ارجع إلى الشكل ١٠-٨ (١)) .

(١) ارفض H_0 إذا كانت قيم z لمتوسط المقاومة للكسر في العينة أكبر من 2.33

(٢) أقبّل H_0 فيما عدا ذلك .

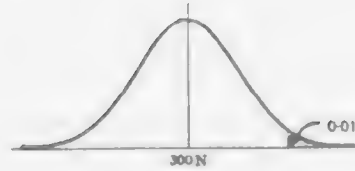
بما أن $z > 2.33$,

فإنه إذا كانت $z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} = \frac{\bar{X} - 300}{24/\sqrt{64}}$ فإن $\bar{X} = 300 + 3z$.

وبهذا فإن قواعد اتخاذ القرار السابقة تصبح : $\bar{X} > 300 + 3(2.33) = 307.0 \text{ N}$

(١) ارفض H_0 إذا كان متوسط المقاومة للكسر في الـ 64 كابلا يتجاوز 307.0 N

(٢) أقبّل H_0 فيما عدا ذلك .



شكل ١٠-٨ (أ)

(ب) اعتبر الفرضين $H_0 : \mu = 300 \text{ N}$

و $H_1 : \mu = 310 \text{ N}$. توزيعات متوسط

المقاومة للكسر المقابل لهذين الفرضين مثل على

الترتيب بالمنحنى الطبيعي على اليسار والمنحنى

الطبيعي على اليمين في الشكل ١٠-٨ (أ) .

احتمال قبول عملية التصنيع القديمة عندما يكون متوسط المقاومة للكسر للطريقة الجديدة هو 310 N

بالفعل مثل بالمنطقة التي مساحتها β في الشكل ١٠-٨ (أ) . للحصول على ذلك ، لاحظ أن 307.0 N

معبرا عنها بوحدات قياسية $1.00 = (307.0 - 310)/3$ إذن

$0.1587 = (\text{المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى اليمين وإلى يسار } 1.00 = z) = \beta$ وهذا هو احتمال

قبول $H_0 : \mu = 300 \text{ N}$ عندما تكون $H_1 : \mu = 310 \text{ N}$ هي فعلا القيمة الصحيحة ، أي احتمال

ارتكاب خطأ من النوع الثاني .

١٠-١٤ كون (أ) منحنى OC (ب) منحنى القوة للمسألة ١٠-١٣ ، مفترضاً أن الانحراف المعياري للمقاومة

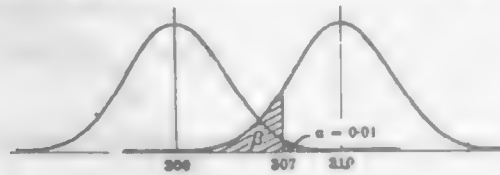
للكسر سيظل 24 N

الحل :

باستخدام مبررات ماثلة لتلك المستخدمة في المسألة ١٠-١٣ (أ) ، يمكن الحصول على β في الحالات التي

تنتج فيها الطريقة الجديدة متوسط مقاومة للكسر μ يساوي 305 N ، 315 N ، ... على سبيل المثال إذا

كانت $\mu = 305 \text{ N}$ فإن $z = (307.0 - 305)/3 = 0.67$ معبرا عنها بوحدات معيارية



أو منحنى

مستوى

الفروض

اختبار

أن الشكليات

من الفرض

المتخذ أنه

إذا اتفق

ريشة الحديثة

المعيارى

تخاذ القرار

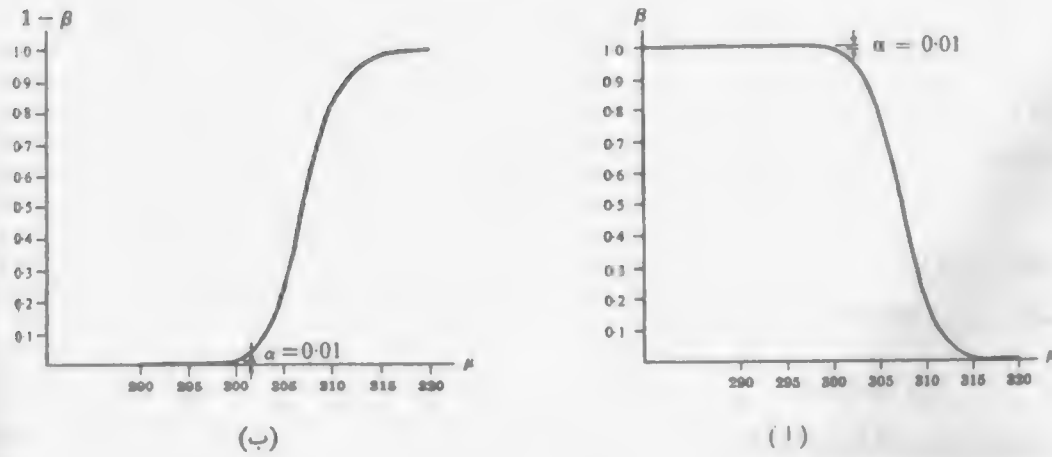
إذن

$0.7486 =$ (المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى اليمين وإلى يسار $z = 0.67$) $\beta =$ وهذه الطريقة يمكن الحصول

على الجدول ٣-١٠

جدول ٣-١٠

μ	290	295	300	305	310	315	320
β	1.0000	1.0000	0.9900	0.7486	0.1587	0.0038	0.0000



شكل ٩-١٠

(١) يظهر منحنى OC في الشكل ٩-١٠ (١) . من هذا المنحنى نجد أن احتمال الإبقاء على الطريقة القديمة في التصنيع إذا كانت قوة المقاومة للكسر الجديدة أقل من 300 N ، من الناحية العملية يساوي ١ (فيما عدا عند مستوى المعنوية 0.01 عندما يكون متوسط الطريقة الجديدة هو 300 N) ثم يأخذ المنحنى في الهبوط إلى الصفر بحيث لا تكون هناك فرصة من الناحية العملية في الاحتفاظ بالطريقة القديمة عندما يكون متوسط المقاومة للكسر أكبر من 315 N .

(ب) يظهر منحنى القوة في الشكل ٩-١٠ (ب) . وهو يعطى نفس التفسير مثل منحنى OC . والواقع أن المنحنى أساساً متكافئان .

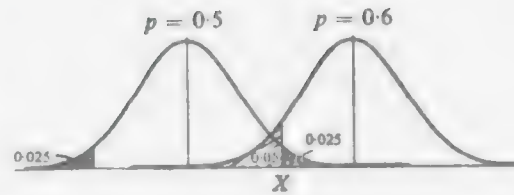
١٠-١٥ اختبار أن عملة غير متحيزة ($p = 0.5$) عن طريق عدد من رميات العملة ، فإننا نرغب في فرض القيود التالية :

(أ) احتمال رفض الفرض عندما يكون الفرض صحيحا بالفعل 0.05 على الأكثر .

(ب) احتمال قبول الفرض أن p تختلف فعلا عن 0.5 بما يساوى 0.1 أو أكثر (أى $p \geq 0.6$ أو $p \leq 0.4$) يجب أن يكون هذا الاحتمال 0.05 على الأكثر .

حدد الحد الأدنى الضروري لحجم العينة وأذكر قواعد اتخاذ القرار .

الحل :



شكل ١٠ - ١٠

وضعنا هنا حدوداً على الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني . على سبيل المثال ، فإن القيد المذكور في (أ) يتطلب أن يكون احتمال الخطأ من النوع الأول $\alpha = 0.05$ على الأكثر بينما القيد (ب) يتطلب أن يكون احتمال $\beta = 0.05$. وقد صور الوضع في الشكل ١٠ - ١٠ .

اعتبر N هو حجم العينة المطلوب و X عدد الصور في N رمية ، وإلى إذا زاد عدد هذه الصور عن ذلك نرفض الفرض أن $p = 0.5$. من الشكل ١٠ - ١٠

$$(١) \text{ المساحة تحت المنحنى الطبيعي } p = 0.5 \text{ إلى اليمين من } \frac{X - 0.5N}{0.5\sqrt{N}} = \frac{X - Np}{\sqrt{Npq}} \text{ هي } 0.025$$

$$(٢) \text{ المساحة تحت المنحنى الطبيعي } p = 0.6 \text{ إلى اليسار من } \frac{X - 0.6N}{0.49\sqrt{N}} = \frac{X - Np}{\sqrt{Npq}} \text{ هي } 0.05$$

[من الناحية العملية المساحة بين $(X - 0.6N)/0.49\sqrt{N}$ و $(N - X) - 0.6N]/0.49\sqrt{N}$ هي 0.05 ، (٢) تقريب جيد) .

$$\text{من (١) } \frac{X - 0.5N}{0.5\sqrt{N}} = 1.96 \text{ أو (٢) } X = 0.5N + 0.980\sqrt{N}$$

$$\text{من (٢) } \frac{X - 0.6N}{0.49\sqrt{N}} = -1.645 \text{ أو (٤) } X = 0.6N - 0.806\sqrt{N}$$

إذن من (٢) و (٤) ، $N = 318.98$. أى أن حجم العينة يجب أن يكون على الأقل 319 ، أى يجب أن تقذف 319 مرة على الأقل . بوضع $N = 319$ في (٢) أو (٤) فإن $X = 177$.

لقيم $p = 0.5$ فإن $X - Np = 177 - 159.5 = 17.5$ بهذا فإننا نتبين القاعدة التالية لاتخاذ القرار :

(أ) اقبل الفرض $p=0.5$ إذا كان عدد الصور في 319 رمية في المدى من 159.5 ± 17.5 أى بين 142 و 177 صورة .

(ب) ارفض الفرض فيما عد ذلك .

خرائط الرقابة :

١٠ - ١٦ ماكينة مصصمة لإنتاج رولمان البلى متوسط قطره 5.74 mm وانحرافه المعيارى 0.08 mm . لتحديد ما إذا كانت الماكينة تعمل حسب المواصفات ، أخذت عينة من 6 من رولمان البلى كل ساعتين ، على سبيل المثال ، وحسب منها متوسط القطر

(أ) صمم قاعدة لاتخاذ القرار تمكن الشخص من أن يكون متأكداً بشكل معقول من أن مواصفات المنتجات تتفق مع المستويات المطلوبة .

(ب) وضح كيف يمكن تمثيل قاعدة اتخاذ القرار في (أ) بيانياً .

الحل :

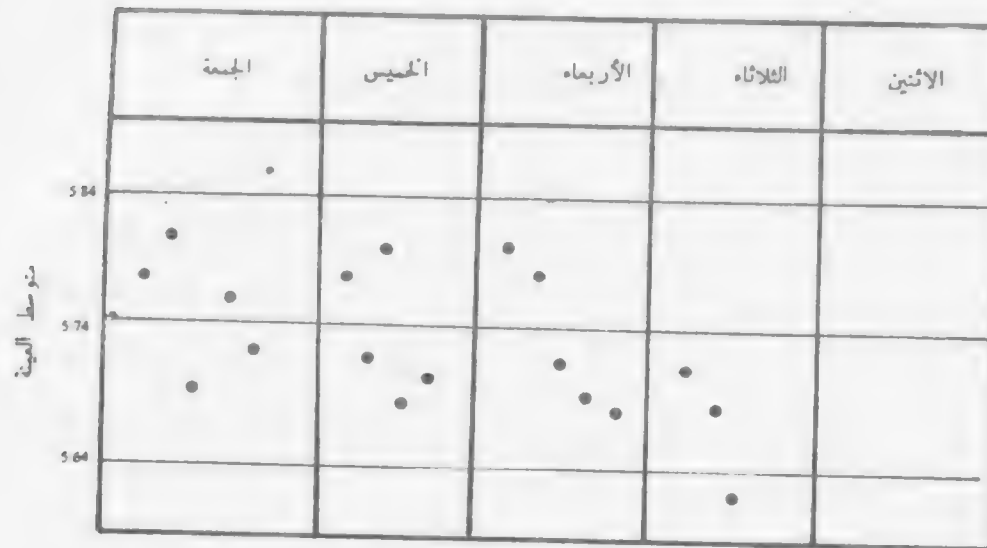
(أ) بدرجة ثقة 99.73% يمكن القول بأن متوسط العينة \bar{X} يجب أن يقع في المدى من $(\mu_p - 3\sigma_p)$ إلى $(\mu_p + 3\sigma_p)$ أو $(\mu - 3\sigma/\sqrt{N})$ إلى $(\mu + 3\sigma/\sqrt{N})$. وبما أن $\mu = 0.574$ و $\sigma = 0.08$ و $N = 6$ ، يترتب على ذلك أنه بدرجة ثقة 99.73% فإن متوسط العينة يجب أن يقع بين $(5.74 - 0.24/\sqrt{6})$ و $(5.74 + 0.24/\sqrt{6})$ أى بين 5.64 و 5.84 mm .
وهذا فإن أسلوبنا لاتخاذ القرار سيكون كما يلى :

(1) إذا كان متوسط العينة واقع داخل المدى 5.64 إلى 5.84 mm افترض أن الماكينة تعمل حسب المواصفات .

(2) خلاف ذلك استنتج بأن الماكينة لاتعمل حسب المواصفات ، وابحث عن الأسباب .

(ب) يمكن الاحتفاظ بتسجيل لمتوسطات العينات وذلك بواسطة لوحة مثل تلك الموضحة في الشكل ١٠ - ١١ ، وتسمى بخرائط مراقبة جودة الإنتاج . وفي كل وقت تحسب فيه متوسط العينة يمثل في هذه الخريطة بنقطة . ومادامت هذه النقطة تقع بين الحد الأدنى 5.64 mm والحد الأعلى 5.84 mm ، فإن العملية تكون تحت المراقبة . وعندما تقع نقطة خارج حدود المراقبة هذه (مثل العينة الثالثة المسحوبة يوم الخميس) ، فإن هناك إمكانية أن هناك خطأ ما المطلوب استقصاء أسبابه .

حدود المراقبة المذكورة أعلاه تسمى 99.73% حدود ثقة أو باختصار حدود 3σ . كذلك يمكن استخدام حدود ثقة ، مثل 99% أو 95% . ويعتمد الاختيار في كل حالة على الظروف الخاصة



شكل ١٠ - ١١

الاختبارات المتضمنة الفروق بين المتوسطات والنسب :

١٠ - ١٧ أعطى اختبار لفصلين يتكون الأول من 40 طالباً والثاني من 50 طالباً . في الفصل الأول كان متوسط الدرجات 74 والانحراف المعياري 8 ، بينما في الفصل الثاني كان متوسط الدرجات هو 78 والانحراف المعياري 7 .

هل هناك اختلاف معنوي في أداء الفصلين عند مستوى المعنوية

(أ) 0.05 (ب) 0.01 ؟

الحل :

افترض أن الفصلين مسحويين من مجتمعين متوسطاتهما هي μ_1 و μ_2 . وبهذا فإننا يجب أن نقرر بين الفرضين :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ، والاختلاف يرجع تقريباً للصدفة

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ، وهناك فرق معنوي بين الفصلين .

تحت الفرض H_0 كلا الفصلين مسحويين من نفس المجتمع . المتوسط والانحراف المعياري للفرق بين

المتوسطين يعطى كما يلي :

$$\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = 0 \text{ and } \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\sigma_1^2/N_1 + \sigma_2^2/N_2} = \sqrt{8^2/40 + 7^2/50} = 1.606$$

حيث استخدمنا الانحرافات المعيارية للعينة كتقدير لـ σ_1 و σ_2 .

$$z = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) / \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = (74 - 78) / 1.606 = -2.49 \quad \text{إذن}$$

(أ) إذا استخدمنا اختباراً من طرفين فإن النتائج تكون معنوية عند المستوى 0.05 إذا وقعت z خارج المدى من -1.96 إلى 1.96 . وبهذا نستنتج أنه عند المستوى 0.05 فإن هناك فرقاً معنوياً في أداء الفصلين وأنه من المحتمل أن يكون أداء الفصل الثاني أفضل .

(ب) إذا استخدمنا اختباراً من طرفين فإن النتائج تكون معنوية عند المستوى 0.01 إذا وقعت z خارج المدى من -2.58 إلى 2.58 . وبهذا نستنتج أنه لا يوجد هناك فرق معنوي بين الفصلين .

وبما أن النتائج معنوية عند المستوى 0.05 ولكن غير معنوية عند المستوى 0.01 ، فإننا نستنتج أن النتائج محتملة المعنوية وذلك طبقاً للمصطلح المستخدم في نهاية المسألة ١٠ - ٥ .

١٠ - ١٨ إذا كان متوسط أوزان 50 طالباً من المشاركين في النشاط الرياضي في كلية هو 68.2 kg بانحراف معياري 2.5 kg بينما كان متوسط وزن 50 طالباً لم يظهر اهتماماً بالمشاركة في النشاط الرياضي في الكلية هو 67.5 kg بانحراف معياري 2.8 kg . اختبر الفرض بأن الطلبة الذين يساهمون في النشاط الرياضي أثقل وزناً من غيرهم في الكلية.

الحل :

يجب أن نقرر بين الفرضين :

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{لا يوجد فرق بين متوسط الأوزان}$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2 \quad \text{متوسط أوزان المجموعة الأولى أكبر من متوسط أوزان المجموعة الثانية .}$$

تحت الفرض H_0 :

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = 9 \quad \text{and} \quad \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\sigma_1^2/N_1 + \sigma_2^2/N_2} = \sqrt{(2.5)^2/50 + (2.8)^2/50} = 0.53$$

حيث استخدمنا الانحراف المعياري للعينة كتقدير لـ σ_1 و σ_2

$$z = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) / \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = (68.2 - 67.5) / 0.53 = 1.32. \quad \text{إذن}$$

باستخدام اختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.05 ، فإننا نرفض الفرض H_0 إذا كانت قيم z أكبر من 1.645 . وبهذا فإنه لن يمكننا رفض الفرض عند هذا المستوى من المعنوية .

يجب ملاحظة ، أنه يمكن رفض الفرض عند المستوى 0.10 إذا كنا على استعداد لتحمل مخاطرة أن نقع في الخطأ باحتمال 0.10 ، أي فرصة واحدة كل 10 .

١٠ - ١٩ بأي مقدار يجب زيادة حجم العينة في كل من المجموعتين في المسألة ١٠ - ١٨ بحيث يكون الفرق المشاهد 0.7 kg

في متوسط الأوزان معنوياً عند مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 ؟

الحل :

افترض أن حجم العينة في كل مجموعة هو N وأن الانحراف المعياري للمجموعتين لن يتغير . بهذا يكون تحت الفرض H_0 فإن

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\sigma_1^2/N + \sigma_2^2/N} = \sqrt{(2.5)^2 + (2.8)^2}/N = \sqrt{14.09}/N = 3.75/\sqrt{N}$$

قيمة z للفرق المشاهد 0.7 kg بين متوسط الأوزان هي

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{0.7}{3.75/\sqrt{N}} = \frac{0.7\sqrt{N}}{3.75}$$

(أ) الفرق المشاهد سيكون معنوياً عند المستوى 0.05 إذا كانت $1.645 = 0.7\sqrt{N}/3.75$ ، على الأقل بحيث أن N يجب أن تكون 78 على الأقل . وهذا يجب أن تزيد حجم العينة في كل مجموعة مما مقداره $28 = (78 - 50)$ على الأقل .

طريقة أخرى :

$$0.7\sqrt{N}/3.75 \geq 1.645, \sqrt{N} \geq (3.75)(1.645)/0.7, \sqrt{N} \geq 8.8, N \geq 77.4 \text{ or } N \geq 78$$

(ب) الفرق المشاهد سيكون معنوياً عند المستوى 0.01 إذا كانت

$$0.7\sqrt{N}/3.75 \geq 2.33, \sqrt{N} \geq (3.75)(2.33)/0.7, \sqrt{N} \geq 12.5, N \geq 156.3 \text{ or } N \geq 157$$

وهذا يجب أن تزيد حجم العينة في كل مجموعة بما لا يقل عن $107 = (157 - 50)$

١٠ - ٧٥ مجموعتان ، A و B ، تتكون كل منهما من 100 شخص مصابين بمرض معين . أعطى مصل للمجموعة A ولم يعط للمجموعة B (والتي تسمى بالمجموعة الضابطة) ، بخلاف ذلك ، فإن المجموعتين يعاملان معاملة متماثلة . وقد وجد أنه في المجموعة A شفي 75 شخصاً من المرض ، بينما في المجموعة B شفي 65 شخصاً . اختبر الفرض أن المصل يساعد على الشفاء من المرض باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.01

(ب) 0.05 ، (ب) 0.10

الحل :

اعتبر أن p_1 تمثل النسبة في المجتمع للأشخاص الذين شفيوا باستخدام المصل . وأن p_2 تمثل النسبة في المجتمع للأشخاص الذين شفيوا بدون استخدام المصل .

يجب أن نقرر بين فرضين :

من
من

من

نتائج

2.5
راف

أكبر

نقح

0.7k

، والفروغ المشاهدة ترجع إلى الصدفة ، أى أن المصل غير فعال . $H_0: p_1 = p_2$

، أى أن المصل فعال . $H_0: p_1 > p_2$

تحت الفرض H_0 ،

$$\mu_{p_1 - p_2} = 0 \text{ and } \sigma_{p_1 - p_2} = \sqrt{pq(1/N_1 + 1/N_2)} = \sqrt{(0.70)(0.30)(1/100 + 1/100)} = 0.0648$$

وقد استخدمنا كتقدير p متوسط نسبة الذين شفوا من المرض في المجموعتين وهي $0.70 = (75 + 65)/200$

و $q = 1 - p = 0.30$ إذن

$$z = (P_1 - P_2)/\sigma_{P_1 - P_2} = (0.750 - 0.650)/0.0648 = 1.54.$$

(أ) إذا استخدمنا اختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.01 فإننا يجب أن نرفض الفرض H_0 إذا كانت قيم z أكبر من 2.33 . وبما أن قيمة z هي 1.54 فقط ، فإننا نستنتج عند هذا المستوى من المعنوية بأن الفروغ ترجع للصدفة .

(ب) إذا استخدمنا اختباراً من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.05 ، فإننا يجب أن نرفض الفرض H_0 إذا كانت قيم z أكبر من 1.645 . وبهذا نستنتج أن النتائج ترجع للصدفة عند هذا المستوى

(ج) إذا استخدمنا اختباراً من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.01 ، فإننا يجب أن نرفض H_0 إذا كانت قيم z أكبر من 1.28 . وبما أن هذا تحقق ، فإننا نستنتج بأن المصل فعال عند مستوى المعنوية 0.01 . لاحظ أن استنتاجاتنا الموضحة أعلاه تعتمد على مقدار استعدادنا لتحمل مخاطرة الوقوع في خطأ . فإذا كانت النتائج ترجع فعلاً للصدفة ولكننا ننهي إلى أنها ترجع إلى المصل (خطأ من النوع الأول) ، فقد نستمر في إعطاء المصل لمجموعة كبيرة من الأشخاص ثم نجد أنه غير فعال . وهذه مخاطرة قد لا تكون على استعداد دائماً لتحملها . ومن الناحية الأخرى ، قد نقرر أن المصل لا يفيد بينما هو في الواقع فعال (خطأ من النوع الثاني) . مثل هذا الاستنتاج خطير وخاصة إذا كانت حياة بشرية هي موضع المخاطرة .

١٠ - ١١ حل المسألة السابقة إذا كانت كل مجموعة مكونة من 300 شخص شفي من المجموعة A عدد 225 شخصاً ومن المجموعة B عدد 195 شخصاً .

الحل :

لاحظ أن نسبة الذين شفوا في هذه الحالة هي $225/300 = 0.750$ للمجموعة A ، $195/300 = 0.650$

المجموعة B وهي نفس النسبة في المسألة السابقة . تحت الفرض H_0

$$\mu_{p_1 - p_2} = 0 \text{ and } \sigma_{p_1 - p_2} = \sqrt{pq(1/N_1 + 1/N_2)} = \sqrt{(0.70)(0.30)(1/300 + 1/300)} = 0.0374$$

حيث استخدمنا $0.70 = (225 + 195)/600$ كتقدير p .

إذن

$$z = (P_1 - P_2)/\sigma_{P_1 - P_2} = (0.750 - 0.650)/0.0374 = 2.67$$

بما أن قيمة z أكبر من 2.33 ، فيمكن رفض الفرض عند مستوى معنوية 0.01 . أى نقرر أن المصل فعال باحتمال 0.01 أن نكون مخطئين في هذا القرار .

هذا يوضح كيف أن زيادة حجم العينة يؤدي إلى زيادة مأمونية القرارات . وفي كثير من الأحيان ، قد يكون من غير العملي زيادة حجم العينة . في مثل هذه الحالات قد نكون ملزمين باتخاذ قرارات مبينة على المعلومات المتاحة وأن نرضى بمخاطرة أكبر ناتجة عن اتخاذ قرارات خاطئة .

١٠ - ٢٢ في دراسة بالعينة لقياس الرأي أخذت عينة من 300 ناخب في المنطقة A و 200 ناخب في المنطقة B حيث أظهرت أن 56% من المنطقة A و 48% من المنطقة B في صالح مرشح معين . عند مستوى معنوية 0.05 ، اختبر الفرض القائل أن (أ) هناك اختلاف بين المنطقتين (ب) المرشح مفضل في المنطقة A .

الحل :

اعتبر أن p_1 هي النسبة من جميع الأصوات في المنطقة A التي في صالح المرشح وأن p_2 هي النسبة من جميع الأصوات في المنطقة B التي في صالح هذا المرشح

نخت الفرض $H_0 : p_1 = p_2$ ، فإن

$$\mu_{P_1 - P_2} = 0 \text{ and } \sigma_{P_1 - P_2} = \sqrt{pq(1/N_1 + 1/N_2)} = \sqrt{(0.528)(0.472)(1/300 + 1/200)} = 0.0456$$

حيث استخدمنا كتقدير قيم p و q القيم 0.528 and $(1 - 0.528) = 0.472$ $[(0.56)(300) + (0.48)(200)]/500 = 0.528$

$$z = (P_1 - P_2)/\sigma_{P_1 - P_2} = (0.560 - 0.480)/0.0456 = 1.75 \text{ إذن}$$

(أ) إذا كنا نريد فقط تحديد ما إذا كان هناك فرق بين المنطقتين ، فيجب أن نقرر بين الفرضين $(H_0 : p_1 = p_2)$ و $(H_1 : p_1 \neq p_2)$ وهذا يتضمن اختباراً من طرفين .

على أساس اختبار من طرفين عند مستوى المعنوية 0.05 ، فإننا نرفض H_0 إذا كانت z خارج الفترة من 1.96 - إلى 1.96 . وبما أن $z = 1.75$ تقع داخل هذه الفترة ، فلا يمكننا رفض H_0 عند هذا المستوى أى لا يوجد فرق معنوي بين المنطقتين .

(ب) إذا أردنا تقرير ما إذا كان المرشح مفضل في المنطقة A ، فيجب أن نقرر بين الفروض $(H_0 : p_1 = p_2)$ و $(H_1 : p_1 > p_2)$. وهذا يتضمن اختباراً من طرف واحد .

عل أساس اختبار من طرف واحد عند مستوى المنوية 0.05 ، فإننا نرفض H_0 إذا كانت z أكبر من 1.645 . وبما أن هذه هي الحالة ، فيمكننا رفض H_0 عند هذا المستوى ، ونستنتج أن المرشح مفضل في المنطقة A

اختبارات تتضمن توزيع ذي الحدين :

١٠ - ٢٣ أعطى مدرس اختباراً مفاجئاً يتضمن 10 أسئلة من النمط الذي تكون الإجابة عليه : صواب - خطأ . لاختبار الفرض بأن الطالب يخمن الإجابة ، استخدمت القاعدة التالية في اتخاذ القرار :

إذا كانت هناك 7 أو أكثر من الإجابات صحيحة فإن الطالب لا يخمن

إذا كانت هناك أقل من 7 إجابات صحيحة فالطالب يخمن .

أوجد احتمال رفض الفرض عندما يكون صحيحاً .

الحل :

اعتبر أن p هي احتمال الإجابة الصحيحة على السؤال .

احتمال إجابة X مسألة إجابة صحيحة من 10 مسائل هي ${}_{10}C_X p^X q^{10-X}$ حيث $q = 1 - p$

بهذا فتحت الفرض أن $p = 0.5$ (أن الطالب يخمن) .

$$\Pr \{ 8 \text{ إجابات صحيحة} \} + \Pr \{ 7 \text{ إجابات صحيحة} \} = \Pr \{ 7 \text{ أو أكثر إجابة صحيحة} \} \\ + \Pr \{ 10 \text{ إجابات صحيحة} \} + \Pr \{ 9 \text{ إجابة صحيحة} \}$$

$$= {}_{10}C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_{10}C_8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_{10}C_9 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right) + {}_{10}C_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0.1719$$

بهذا فإن احتمال أن نصل إلى قرار بأن الطالب لا يخمن الإجابة عندما يكون بالفعل يخمن الإجابة هو 0.1719

لاحظ أن هذا احتمال الخطأ من النوع الأول .

١٠ - ٢٤ في المسألة السابقة ، أوجد احتمال قبول الفرض $p = 0.5$ عندما تكون القيمة p الفعلية هي 0.7

الحل :

نحت الفرض $p = 0.7$ ،

$$\Pr \{ 7 \text{ إجابات أو أكثر صحيحة} \} = 1 - \Pr \{ 7 \text{ إجابات صحيحة} \} \\ = 1 - [{}_{10}C_7 (0.7)^7 (0.3)^3 + {}_{10}C_8 (0.7)^8 (0.3)^2 + {}_{10}C_9 (0.7)^9 (0.3) + {}_{10}C_{10} (0.7)^{10}] = 0.3504$$

١٠ - ٢٥ في المسألة ١٠ - ٢٣ ، أوجز احتمال قبول الفرض $p = 0.5$ عندما

تكون القيمة الفعلية (أ) $p = 0.6$ (ب) $p = 0.8$

(ج) $p = 0.9$ (د) $p = 0.3$

(هـ) $p = 0.2$ (و) $p = 0.1$

الحل :

(أ) إذا كانت $p = 0.6$ فإن الاحتمال المطلوب

$$= 1 - \Pr \{ 7 \text{ إجابات صحيحة} \} + \Pr \{ 8 \text{ إجابات صحيحة} \} \\ + \Pr \{ 9 \text{ إجابات صحيحة} \} + \Pr \{ 10 \text{ إجابات صحيحة} \}$$

$$= 1 - [\Pr \{ 7 \text{ correct} \} + \Pr \{ 8 \text{ correct} \} + \Pr \{ 9 \text{ correct} \} + \Pr \{ 10 \text{ correct} \}] \\ = 1 - [{}_{10}C_7(0.6)^7(0.4)^3 + {}_{10}C_8(0.6)^8(0.4)^2 + {}_{10}C_9(0.6)^9(0.4) + {}_{10}C_{10}(0.6)^{10}] = 0.618$$

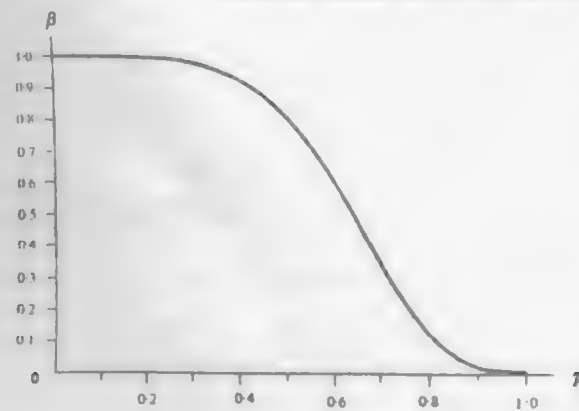
النتائج من (ب) ، (ج) ، (و) يمكن الحصول عليها بنفس الطريقة وهي موضحة بالجدول ١٠ - ٤ إلى جانب القيم المقابلة : $p = 0.7$ و $p = 0.6$.

لاحظ أن الاحتمال يرمز له بالرمز β (الخطأ من النوع الثاني) .

كذلك يشمل الجدول القيم المقابلة لـ $p = 0.5$ وهي $\beta = 1 - 0.1719 = 0.828$ من المسألة ١٠ - ٢٣ ، $p = 0.7$ من المسألة ١٠ - ٢٤ .

جدول ١٠ - ٤

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
β	1.000	0.999	0.989	0.945	0.828	0.618	0.350	0.121	0.13



شكل ١٠ - ١٢

١٠ - ٢٦ استخدم المسألة ١٠ - ٢٥ لتكوين الرسم البياني

لقيم β مقابل p ، أي منحنى توصيف العمليات

لقاعدة اتخاذ القرار في المسألة ١٠ - ٢٣

الحل :

الرسم البياني المطلوب موضح بالشكل

١٠ - ١٢ لاحظ التماثل بين الرسم ومنحنى OC

للمسألة ١٠ - ١٤ .

روض

نبر من

طقة A

لفرض

Pr

0.171

إذا رسمنا $(1 - \beta)$ مقابل p ، فإننا نحصل على منحنى قوة الاختبار .

يوضح الشكل أن قاعدة اتخاذ القرار المعطاة أكثر قوة ورفض $p = 0.5$ عندما تكون قيم p الفعلية $p \leq 0.4$ أو $p \geq 0.8$.

١٠ - ٢٧ قذفت عملة 6 مرات فأظهرت الصورة في الست مرات هل يمكن أن نستنتج عند مستوى المعنوية

(أ) 0.05 (ب) 0.01 أن العملة متحيزة ؟

اعتبر كلا من الاختبار من طرف واحد والاختبار من طرفين .

الحل :

اعتبر أن p تمثل احتمال ظهور الصورة في رمية واحدة للعملة .

تحت الفرض $H_0 : p = 0.5$ (أى العملة غير متحيزة) ،

$$P(X) = \Pr \{ X \text{ صورة في } 6 \text{ رميات} \} = {}^6C_X (1/2)^X (1/2)^{6-X} \\ = {}^6C_X / 64$$

إذن فاحتمال ظهور 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 صورة

هى على الترتيب $\frac{1}{64}, \frac{6}{64}, \frac{15}{64}, \frac{20}{64}, \frac{15}{64}, \frac{6}{64}, \frac{1}{64}$ and $\frac{1}{64}$.

كما هو موضح بيانياً في التوزيع الاحتمالى بالشكل ١٠ - ١٣

الاختبار من طرف واحد :

نريد هنا التقرير بين الفرضين $(H_0 : p = 0.5)$

و $(H_1 : p > 0.5)$ ،

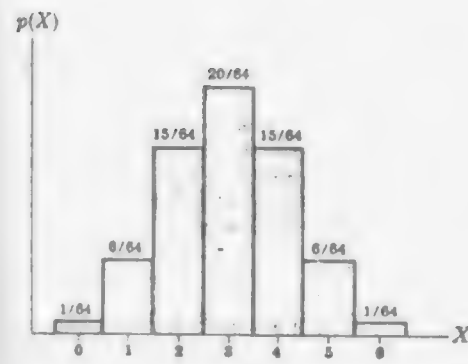
وبما أن $\Pr \{ \text{صور 6} \} = \frac{1}{64} = 0.01562$

و $\Pr \{ \text{صور 6 أو 5} \} = \frac{1}{64} + \frac{6}{64} = 0.1094$.

فيمكن رفض H_0 عند المستوى 0.05 وليس عند

المستوى 0.01 (النتائج المشاهدة معنوية عند المستوى

0.05 وليست عند المستوى 0.01) .



شكل ١٠ - ١٣

الاختبار من طرفين :

نريد هنا التقرير بين الفرضين $(H_0 : p = 0.5)$ و $(H_1 : p \neq 0.5)$ بما أن

$\Pr \{ \text{صفر صورة أو 6 صور} \} = \frac{1}{64} + \frac{1}{64} = 0.03125$ ، فيمكن رفض H_0 عند المستوى 0.05

ولكن ليس عند المستوى 0.01 .

١٠ - ٢٨ حل المسألة ١٠ - ٢٧ إذا ظهرت الصورة 5 مرات .

الحل :

اختبار من طرف واحد :

بما أن $\bar{x}_3 = \bar{x}_4 = \bar{x}_5 = 0.1094$ ، $\Pr \{ 5 \text{ أو } 6 \text{ صور} \}$ ، فلا يمكن رفض H_0 عند مستوى 0.05 أو 0.01 .

اختبار من طرفين :

بما أن $2(\bar{x}_3) = 0.2188$ ، $\Pr \{ 5 \text{ أو } 6 \text{ صور} \}$ ، فلا يمكن رفض H_0 عند المستوى 0.05 أو 0.01 .

مسائل اضافية

اختبارات الاوساط والنسب باستخدام التوزيع الطبيعي :

١٠ - ٢٩ وعاء به كرات أما حمراء أو زرقاء . لاختبار فرض تساوى نسبة هذين اللونين قنا بسحب 64 كرة مع الإرجاع ، وتم ملاحظة لون الكرة وأخذنا القاعدة التالية في اتخاذ القرار

أقبل الفرض إذا كان عدد الكرات الحمراء المسحوبة بين 28 و 36 . ارفض الفرض فيما عداً ذلك .

(أ) أوجد احتمال رفض الفرض عندما يكون بالفعل صحيح .

(ب) عبر بيانياً عن القاعدة السابقة في اتخاذ القرار وعن النتيجة التي حصلت عليها في (ب) .

ج : (أ) 0.2606

١٠ - ٣٠ (أ) ماهى القاعدة التي يجب أن تتبعناها في اتخاذ القرار في المسألة ١٠ - ٢٩ إذا كان المطلوب أن يكون احتمال رفض الفرض عندما يكون بالفعل صحيح لا يتجاوز 0.01 على الأكثر . أى مستوى المعنوية 0.01 ؟

(ب) عند أى مستوى ثقة تقبل الفرض ؟

(ج) ماهى قاعدة اتخاذ القرار إذا حددنا مستوى المعنوية عند 0.05 ؟

ج : (أ) أقبل الفرض إذا كانت الكرات الحمراء المسحوبة بين 22 و 42 ، ارفض فيما عداً ذلك .

(ب) 0.99

(ج) أقبل الفرض إذا كانت الكرات الحمراء المسحوبة بين 24 و 40 ، ارفض فيما عداً ذلك .

١٠ - ٣١ افترض أننا نريد في المسألة ١٠ - ٢٩ اختبار الفرض أن هناك نسبة أكبر من الكرات الحمراء عن الكرات الزرقاء

(أ) ماهو فرض المدم الذي يجب أن تفرضه وما هو الفرض البديل ؟

(ب) هل يجب أن نستخدم اختباراً من طرف واحد أو اختباراً من طرفين ؟

p

p

0.05

(ج) ماهي قاعدة اتخاذ القرار التي سوف تتخذها إذا كان مستوى المعنوية هو 0.05 ؟

(د) ماهي قواعد اتخاذ القرار إذا كان مستوى المعنوية 0.01 ؟

ج : (أ) $H_0 : p = 0.5$ و $H_1 : p > 0.5$

(ب) اختبار من طرف واحد

(ج) ارفض H_0 إذا سجلت أكثر من 39 كرة حمراء ، اقبل الفرض فيما عدا ذلك (أو لاتتخذ أى قرار)

(د) ارفض H_0 إذا سجلت أكثر من 41 كرة حمراء ، اقبل الفرض فيما عدا ذلك (أو لاتتخذ أى قرار)

١٠ - ٣٢ قذفت زهرتين طاولة 100 مرة وسجل عدد المرات التي ظهر فيها مجموع « سبعة » ووجد أنه 23 مرة . اختبار الفرض أن الزهرتين غير متحيزتين ، باستخدام (أ) اختبار من طرفين (ب) اختبار من طرف واحد . مستخدماً مستوى معنوية 0.05 . ناقش الأسباب - إذا وجدت - لتفضيل أحد الاختبارين عن الآخر .

ج : (أ) لا يمكن رفض الفرض عند المستوى 0.05 .

(ب) يمكن رفض الفرض عند المستوى 0.05 .

١٠ - ٣٣ حل المسألة ١٠ - ٣٢ إذا كان مستوى المعنوية هو 0.01 .

ج : لا يمكن رفض الفرض عند المستوى 0.01 في أى من (أ) أو (ب)

١٠ - ٣٤ يدعى منتج أن 95% على الأقل من المعدات التي يمد بها مصنع مطابقة للمواصفات . تم اختبار عينة من 200 وحدة من المعدات ووجد أن بها 18 وحدة تالفة . اختبار ادعاء المنتج عند مستوى المعنوية

(أ) 0.01 (ب) 0.05

ج : يمكن رفض ادعائه عند كلا المستويين باستخدام اختبار من طرف واحد .

١٠ - ٣٥ نسبة الذين حصلوا على تقدير A's في مادة الطبيعة في إحدى الجامعات خلال فترة طويلة من الزمن كانت 10% .

خلال فصل دراسي معين حصل 40 طالباً على تقدير A من مجموعة من 300 طالب . اختبار معنوية هذه النتيجة عند المستوى (أ) 0.05 (ب) 0.01 .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد ، النتيجة معنوية عند المستوى 0.05 ولكن غير معنوية عند المستوى 0.01

١٠ - ٣٦ من التجربة وجد أن متوسط المقاومة للقطع لحزمة من الخيوط هو 9.72 N بانحراف معياري 1.40 N . في

الوقت الحاضر سجلت عينة من 36 حزمة من الخيوط وكان متوسط مقاومتها للقطع هو 8.93 N هل يمكن الاستنتاج عند مستوى معنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 بأن الخيوط أصبحت ذات جودة أقل ؟

ج : نعم ، عند كلا المستويين ، باستخدام اختبار من طرف واحد في كل حالة .

١٠ - ٣٧ في أحد الاختبارات التي أعطيت لعدد كبير من المدارس المختلفة ، كان متوسط الدرجات هو 74.5 والانحراف المعياري 8.0 . في مدرسة معينة حيث أدى 200 طالب هذا الامتحان ، كل متوسط درجاتهم 75.9 .

ناقش معنوية هذه النتيجة عند المستوى 0.05 من وجهة نظر :

(أ) الاختبار من طرف واحد (ب) الاختبار من طرفين ، وضع استنتاجاتك بدقة على ضوء هذه الاختبارات .

ج : النتيجة معنوية عند المستوى 0.05 في كل من الاختبارات من طرف واحد والاختبار من طرفين .

١٠ - ٣٨ حل المسألة ١٠ - ٣٧ إذا كان مستوى المعنوية هو 0.01 .

ج : النتيجة معنوية عند مستوى 0.01 إذا كان الاختبار من طرف واحد أما إذا كان الاختبار من طرفين فالنتيجة غير معنوية .

منحنيات توصيف العمليات :

١٠ - ٣٩ باستخدام المسألة ١٠ - ٣٩ ، أوجد احتمال قبول الفرض بأن هناك نسباً متساوية من الكرات الحمراء والكرات الزرقاء إذا كانت النسبة الفعلية للكرات الحمراء هي (أ) 0.6 (ب) 0.7 (ج) 0.8

(د) 0.9 (هـ) 0.3

ج : (أ) 0.3112 (ب) 0.0118 (ج) 0 (د) 0 (هـ) 0.0118 .

١٠ - ٤٠ مثل بيانياً نتائج المسألة السابقة وذلك برسم (أ) β مقابل p (ب) $(1 - \beta)$ مقابل p .

قارن هذه الأشكال بتلك الموضحة في المسألة ١٠ - ١٢ باعتبار أن مايقابل الكرات الحمراء والزرقاء هي الصور والكتابة على الترتيب .

١٠ - ٤١ (أ) حل المسائل ١٠ - ١٣ و ١٠ - ١٤ إذا اتفق على اختبار 400 كابل (ب) ماهي الاستنتاجات التي تصل إليها فيما يختص بالخطأ من النوع الثاني عندما تكبر حجم العينة ؟

١٠ - ٤٢ كون (أ) منحنى OC (ب) منحنى قوة الاختبار المقابل للمسألة ١٠ - ٣٩ . قارن هذه المنحنيات بمنحنيات المسألة ١٠ - ١٤ .

خرائط الرقابة على الإنتاج :

١٠ - ٤٣ إذا كان من المعروف في الماضي أن نوعاً معيناً من الخيوط من إنتاج أحد المصانع متوسط قوة مقاومته للقطع هو 8.64 N بانحراف معياري 1.28 N .

لتحديد ما إذا كان الإنتاج يتم طبقاً للمواصفات ، أخذ عينة من 16 قطعة .

فرض

مستوى

وحدة :

10%

النتيجة

0.01

١ . في

لاستنتاج

أوجد (أ) 99.73% أو 3σ (ب) 99% (ج) 95%
 حدود مراقبة في خرائط الرقابة على الإنتاج . ووضح تطبيقاتها .

ج : (أ) 6

(ب) 4 مسامير ثالثة

١٠ - ٤٤ متوسط نسبة الإنتاج التالف في مصنع لإنتاج المسامير هو 3% . للمحافظة على هذا المستوى في الأداء ، تسحب عينة حجمها 200 مسامير من المسامير المنتجة كل 4 ساعات ويتم اختبارها . أوجد (أ) 99%
 (ب) 95% ، حدود المراقبة لعدد المسامير الثالفة في كل عينة . لاحظ أننا نحتاج في هذه الحالة إلى حد المراقبة الأعلى فقط

ج : حد المراقبة الأعلى هو على الترتيب (أ) 6 (ب) 4 مسامير ثالثة

اختبارا تتضمن الفروق بين المتوسطات والتنسب :

١٠ - ٤٥ عينة مكونة من 100 لمبة كهربائية من إنتاج المصنع A ، كان متوسط عمرها الإنتاجي 1190 ساعة وانحرافها المعياري 90 ساعة . عينة أخرى من 75 لمبة من إنتاج مصنع B كان متوسط عمرها الإنتاجي 1230 ساعة وانحرافها المعياري 120 ساعة . هل هناك فرق معنوي بين متوسط الأعمار الإنتاجية للتوعين عند مستوى المعنوية
 (أ) 0.05 (ب) 0.01 ؟

ج : (أ) نعم (ب) لا .

١٠ - ٤٦ في المسألة السابقة اختبر الفرض أن لمبات المصنع B أكثر جودة من لمبات المصنع A باستخدام مستوى المعنوية
 (أ) 0.05 (ب) 0.01

اشرح الفرق بين هذا الاختبار والاختبار في المسألة السابقة . هل النتيجة تناقض نتيجة المسألة السابقة .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد لكل من مستويات المعنوية يظهر أن النوع B أكثر جودة من A .

١٠ - ٤٧ في اختبار مبادىء الهجاء ، كان متوسط درجات 32 ولد هو 72 بانحراف معياري 8 ، بينما متوسط درجات 36 بنت هو 75 بانحراف معياري 6 . اختبر الفرض عند (أ) 0.05 (ب) 0.01 مستوى معنوية بأن البنات أفضل في الهجاء من الأولاد .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد نجد أن الفروق معنوية عند مستوى 0.05 ولكن غير معنوية عند مستوى 0.01 .

١٠ - ٤٨ : اختبار تأثير نوع جديد من الإسمدة على إنتاج القمح ، قسمت قطعة أرض إلى 60 مربع متساوي المساحة ، كل قطعة لها نفس المواصفات مثل نوع التربة ومقدار ترمضها للشمس وغير ذلك . استخدم السباد الجديد في 30 قطعة والسباد القديم في القطعة الباقية . كان متوسط الحزم من القمح التي تم حصادها لكل مربع من الأرض التي استخدم فيها السباد الجديد هو 18.2 لتر بانحراف معياري 0.63 لتر . والمتوسط المقابل للمربعات التي استخدم فيها السباد القديم هو 17.8 لتر بانحراف معياري 0.54 باستخدام مستوى المنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 . اختبر الفرض بأن السباد الجديد أفضل من السباد القديم .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد نجد أن السباد الجديد أفضل من السباد القديم عند كل من مستويات المنوية .

١٠ - ٤٩ : عينة عشوائية من 200 مسمار من إنتاج A و 100 مسامير من إنتاج B وجد أن 19 مسمار من إنتاج A و 5 مسامير من إنتاج B تالف . اختبر الفرض القائل أن

(أ) هناك اختلاف في أداء الماكينتين .

(ب) الماكينة B تعمل بصورة أفضل من الماكينة A .

استخدم مستوى المنوية 0.05 .

ج : (أ) يظهر الاختبار من طرفين بأنه لا يوجد اختلاف في أداء الماكينتين عند المستوى 0.05 .

(ب) اختبار من طرف واحد يظهر أن B لا تعمل بصورة أفضل من A عند المستوى 0.05 .

١٠ - ٥٠ : وعاءان A و B ، يحتويان على عدد متساو من الكرات ، ولكن نسبة الكرات الحمراء في كل منها مختلف . سميت عينة حجمها 50 كرة مع الإرجاع من كل من الوعائين ، وقد ظهر بها 32 كرة حمراء من الوعاء A و 23 . كرة حمراء من الوعاء B باستخدام مستوى المنوية 0.05 ، اختبر الفرض القائل أن (أ) الوعاء أن يحتويان على نسب متساوية من الكرات الحمراء (ب) A يحتوي على نسبة أكبر من الكرات الحمراء عن B .

ج : (أ) اختبار من طرفين عند مستوى المنوية 0.05 يفشل في رفض فرض تساوي النسب

(ب) اختبار من طرف واحد عند المستوى 0.05 يدل على أن A يحتوي على نسبة أكبر من الكرات الحمراء عن B .

اختبارات تتضمن توزيعات ذي الحدين :

١٠ - ٥١ : بالرجوع إلى المسألة ١٠ - ٢٣ ، أوجد أقل عدد من الأسئلة يجب أن يجيب عليها الطالب إجابة صحيحة قبل أن يكون المدرس متأكداً بأن الطالب لا ينجح الإجابة تقريباً وذلك عند مستوى معنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 (ج) 0.001 (د) 0.06 . ناقش النتائج .

ج : (أ) 9 (ب) 10 (ج) 10 (د) 8

١٠ - ٥٢ : كون الأشكال البيانية كالتالي تمت في المسألة ١٠ - ٠١ لبيانات المسألة ١٠ - ٢١

١٠ - ٥٣ : حل المسائل ١٠ - ٢٣ إلى ١٠ - ٢٥ إذا استبدلت 7 في قاعدة اتخاذ القرار في المسألة ١٠ - ٢٣ إلى 8 .

١٠ - ٥٤ قلقت عملة 8 مرات فأظهرت الصورة 7 مرات . هل يمكن رفض الفرض بأن العملة غير متحيزة عند مستوى المنوية
(أ) 0.05 (ب) 0.10 (ج) 0.01 ؟

استخدم اختبار من طرفين .

ج : (أ) لا (ب) نعم (ج) لا

١٠ - ٥٥ حل المسألة ١٠ - ٥٤ إذا استخدمنا اختباراً من طرف واحد .

ج : (أ) نعم (ب) نعم (ج) لا

١٠ - ٥٦ حل المسألة ١٠ - ٥٤ إذا أظهرت العملة الصورة 8 مرات .

ج : (أ) نعم (ب) نعم (ج) نعم

١٠ - ٥٧ حل المسألة ١٠ - ٥٤ إذا أظهرت العملة الصورة 6 مرات .

ج : (أ) لا (ب) لا (ج) لا

١٠ - ٥٨ وعاء يحتوى على عدد كبير من الكرات الحمراء والبيضاء . بحيث عينة عشوائية من 8 كرات وأظهرت 6 كرات
بيضاء و 2 كرة حمراء . باستخدام اختبار ومستوى معنوية مناسبين ، ناقش نسب الكرات البيضاء
والحمراء الوعاء .

١٠ - ٥٩ ناقش كيف يمكن استخدام نظرية المعاينة في استقصاء نسب أنواع السمك الموجود في بحيرة .

الفصل الحادى عشر

نظرية العينات الصغيرة

توزيع « استودينت » ت
وتوزيع كا - تربيع (كا^٢)

العينات الصغيرة :

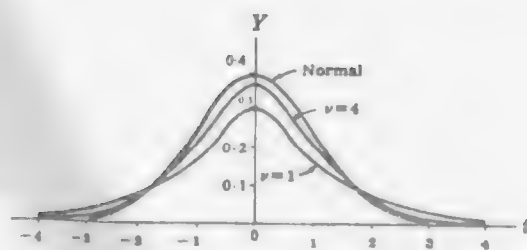
فى الفصول السابقة استخدمنا الحقيقة أنه إذا كان حجم العينة $N > 30$ ، وتسمى بالعينات ذات الحجم الكبير ، فإن توزيع المعاينة لكثير من الإحصائيات سيكون تقريباً كالتوزيع الطبقى ، وتزداد جودة التقريب كلما زادت N . للعينات ذات الحجم $N < 30$ ، وتسمى بالعينات الصغيرة . فإن هذا التقريب غير جيد ويزداد سوءاً كلما صغرت قيمة N ، بحيث يكون من الضرورى إدخال التعديلات الملائمة . تسمى دراسة توزيعات المعاينة للإحصائيات للعينات الصغيرة نظرية العينات الصغيرة . وبصورة أكثر دقة نظرية العينات الدقيقة ، نظراً لأن النتائج التى نحصل عليها تنطبق فى حالة العينات الكبيرة كما فى العينات الصغيرة . فى هذا الفصل سنقوم بدراسة توزيعين مهمين هما توزيع « استودينت » ت ، توزيع كا - تربيع (كا^٢) .

توزيع « استودينت » ت :

عرف الإحصائية

$$(١) \quad t = \frac{\bar{X} - \mu}{s} \sqrt{N-1} = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{N}}$$

والتي تقابل الإحصائية z المعرفة $z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}}$ (أنظر صفحة ٢٧٠)



توزيع (استودينت) ت لقيم الختمه

شكل ١١ - ١

إذا أخذنا فى الاعتبار عينات حجمها N مأخوذة من مجتمع يتوزع توزيعاً طبيعياً (أو يقترب من التوزيع الطبقى) متوسطه μ وإذا حسبنا لكل عينة t ، باستخدام الوسط الحسابى للعينة \bar{X} والانحراف المعياري للعينة s أو σ فإنه يمكننا الحصول على توزيع المعاينة للأحصائية t . هذا التوزيع (أنظر الشكل ١١ - ١) يعرف كالتالى :

$$(٢) \quad Y = \frac{Y_0}{\left(1 + \frac{t^2}{N-1}\right)^{N/2}} = \frac{Y_0}{\left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{(v+1)/2}}$$

حيث Y_0 مقدار ثابت يعتمد على N بحيث يجعل المساحة تحت المنحنى مساوية للواحد ، وحيث الثابت $v = (N - 1)$ يسمى عدد درجات الحرية (v هو الحرف اليونانى « نيو ») . لتعريف درجات الحرية ، أنظر صفحة ٣٠٧ .

التوزيع (٢) يسمى توزيع « أستودينت » ت عقب اكتشافه بواسطة جوست ، والذي نشر أعماله فى الجزء الأول من القرن العشرين تحت الاسم المستعار « أستودينت » .

لقيم v أو N الكبيرة (بالتأكيد لقيم $N \geq 30$) المنحنيات (٢) تعد تقريباً لمنحنى التوزيع الطبيعى المعيارى $Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$: كما هو موضح بالشكل ١١ - ١ .

فترات الثقة :

كما شرحنا بالنسبة للتوزيع الطبيعى فى الفصل التاسع ، يمكن أن نعرف 95% و 99% أو غير ذلك من فترات الثقة باستخدام جدول توزيع t فى الملحق ، صفحة ٥٣٤ . بهذه الطريقة يمكن تقدير داخل حدود ثقة معينة متوسط المجتمع μ .

على سبيل المثال ، إذا كانت $t_{0.975} -$ و $t_{0.975}$ هى قيم t التى تجعل 2.5% من المساحة تقع فى كل طرف من طرفى توزيع t فإن 95% فترة ثقة لـ μ هى :

$$(٢) \quad -t_{0.975} < \frac{\bar{X} - \mu}{s} \sqrt{N-1} < t_{0.975}$$

ومنها نرى أنه من المقدّر أن تقع μ فى الفترة

$$(٤) \quad \bar{X} - t_{0.975} \frac{s}{\sqrt{N-1}} < \mu < \bar{X} + t_{0.975} \frac{s}{\sqrt{N-1}}$$

بدرجة ثقة 95% (أى احتمال 0.95) . لاحظ أن $t_{0.975}$ تمثل قيمة المئين الذى رتبته 97.5 ، بينما $t_{0.025} = -t_{0.975}$ تمثل قيمة المئين الذى رتبته 2.5 .

وبشكل عام ، يمكن تمثيل حدود الثقة لمتوسطات المجتمع كالآتى :

$$(٥) \quad \bar{X} \pm t_c \frac{s}{\sqrt{N-1}}$$

حيث القيم $t_c \pm$ ، تسمى بالقيم الحرجة أو معاملات الثقة ، وتعتمد على مستوى الثقة المرغوب فيه وحجم العينة . ويمكن الحصول عليها من الجدول فى صفحة ٥٣٤ .

(ب) إذا كان مستوى المعنوية هو 0.01 ، فإن المساحة بين الصفر و z_1 تساوى 0.4900 و $z_1 = 2.33$ وبما أن 32 (أو 31.5) معبراً عنها بوحدات مقيارية هي 1.98 (أو 1.84) وهي أقل من 2.33 فإننا نستنتج أن النتائج غير معنوية عند 0.01.

يتبنى بعض الإحصائيين المصطلح بأن النتائج المعنوية عند المستوى 0.01 تسمى مرتفعة المعنوية ، والنتائج المعنوية عند المستوى 0.05 وغير المعنوية عند 0.01 بأنها محتملة المعنوية ، بينما النتائج المعنوية عند مستويات أكبر من 0.05 غير معنوية .

وبما أن مستويات المعنوية تستخدم كؤشر في اتخاذ القرارات ، فإن بعض الإحصائيين يذكر الاحتمالات الفعلية المستخدمة . على سبيل المثال في هذه المسألة فبما أن $\Pr \{z \geq 1.84\} = 0.0322$ ، فإن الاحصائي يمكنه القول بأنه استناداً إلى التجربة فإن فرصة ارتكاب الخطأ بالقول أن هذا الشخص له قوة خارقة على الإدراك E.P.S. هي حوالى 3 في كل 100 . الاحتمال المذكور في هذه الحالة 0.0322 ، يسمى أحياناً بالمعنوية الوصفية أو المعنوية التجريبية .

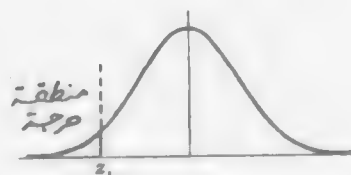
١٠ - ٩ مصنع للأدوية المسجلة يدعى أن دواء من انتاجه له فاعلية بنسبة 90% في التخفيف من الحساسية لفترة 8 ساعات . في عينة من 200 شخص مصابين بالحساسية ، أدى الدواء إلى تخفيف آلام 160 منهم . قرر ما إذا كان ادعاء المصنع صحيحاً .

الحل :

اعتبر أن p تمثل احتمال أن يؤدي الدواء إلى التخفيف من آلام الحساسية . وبهذا فإنه يجب أن نقرر بين الفرضين:

$$H_0: p = 0.9 \text{ والادعاء صحيح}$$

$$H_1: p < 0.9 \text{ والادعاء باطل}$$



شكل ١٠ - ٥

نختار اختباراً من طرف واحد ، حيث أننا نهم بتحديد ما إذا كانت نسبة الأشخاص الذين شفوا باستخدام الدواء نسبة قليلة.

إذا كان مستوى المعنوية المأخوذ هو 0.01 بمعنى أن المساحة المظلة في الشكل ١٠ - ٥ هي 0.01 فإن $z_1 = -2.33$ كما في المسألة ١٠ - ٥ (ب) باستخدام خاصية التماثل في المنحنى ، أو من الجدول ١٠ - ١ . ونستخدم كأساس لاتخاذ القرار :

(١) الفرض ليس صحيحاً إذا كانت z أقل من -2.33 (وفي هذه الحالة نرفض H_0).

(٢) في غير ذلك من الحالات ، الادعاء صحيح والنتائج المشاهدة ترجع إلى الصدفة (في هذه الحالة نقبل H_0).

إذا كانت H_0 صحيحة ، $\mu = Np = (100)(0.8) = 80$ and $\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(0.8)(0.2)} = 4$

في هذه الحالة 160 معبراً عنها بوحدات معيارية $4.73 = (180 - 160)/4.23$ وهي أقل بكثير من 2.33 — وطبقاً لقاعدة اتخاذ القرار التي وضعناها فإننا نستنتج أن الادعاء غير صحيح وأن نتائج العينة مرتفعة المعنوية (أنظر نهاية المسألة ١٠ - ٥).

١٠ - ٧ متوسط العمر الإنتاجي لعينة من 100 لمبة من لمبات الفلورسنت من إنتاج أحد المصانع هو 1570 ساعة وانحرافها المعياري 120 ساعة. إذا كان μ هو متوسط العمر الإنتاجي لجميع اللمبات المنتجة بواسطة الشركة ، اختبر الفرض $\mu = 1600$ ساعة ضد الفرض البديل $\mu \neq 1600$ ساعة ، مستخدماً مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01

الحل :

يجب أن نختار بين الفرضين :

ساعة $H_0 : \mu = 1600$ ، ساعة $H_1 : \mu \neq 1600$

يجب أن نستخدم هنا اختباراً من طرفين حيث أن $\mu \neq 1600$ تشمل كلا من القيم الأكبر من أو الأصغر من 1600 .

(١) للاختبار من طرفين عند مستوى المعنوية 0.05 ، نستخدم قواعد اتخاذ القرار التالية .

(١) ارفض H_0 إذا كانت قيم z المحسوبة من العينة تقع خارج المدى 1.96 — إلى 1.96 .

(٢) اقبل H_0 (أولاً تتخذ أى قرار) خلاف ذلك .

الاحصائية المعتبرة هنا متوسط العينة \bar{X} . توزيع المعاينة لـ \bar{X} له متوسط $\mu_{\bar{X}} = \mu$ وانحراف معياري $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{N}$ ، حيث μ هو متوسط المجتمع و σ الانحراف المعياري للمجتمع المكون من جميع اللمبات المنتجة بواسطة الشركة .

تحت الفرض H_0 ، فإن $\mu = 1600$ و $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{N} = 120/\sqrt{100} = 12$ باستخدام الانحراف المعياري للعينة كتقدير لـ σ . بما أن $z = (\bar{X} - 1600)/12 = (1570 - 1600)/12 = -2.50$ يقع خارج المدى 1.96 — إلى 1.96 فإننا نرفض الفرض H_0 عند مستوى المعنوية 0.05 .

(ب) إذا كان مستوى المعنوية 0.01 ، فالمدى 1.96 — إلى 1.96 في قواعد اتخاذ القرار في الجزء (أ) يحل بدلاً منه المدى من 2.58 — إلى 2.58 . بما أن قيمة z المساوية لـ 2.50 — تقع داخل هذا المدى ، فإننا نقبل H_0 (أولاً نتخذ أى قرار) عند مستوى المعنوية 0.01 .

١٠ - ٨ في المسألة ١٠ - ٧ ، اختبر الفرض $\mu = 1600$ ساعة ضد الفرض البديل $\mu < 1600$ ساعة ، باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 .

الحل :

يجب أن نختار بين الفرضين

$$H_0 : \mu = 1600 \text{ ساعة} , H_1 : \mu < 1600$$

ونستخدم هنا اختباراً من طرف واحد ، والقيم المقابلة لمطابقة لتلك القيم في المسألة ١٠ - ٦ .

(أ) إذا كان مستوى المعنوية 0.05 ، المنطقة المظلة في الشكل ١٠ - ٥ مساحتها 0.05 ، ونجد أن $z_1 = -1.645$. ولهذا نستخدم القاعدة التالية في اتخاذ القرار :

(١) ارفض H_0 إذا كانت z أقل من -1.645 .

(٢) اقبل H_0 (أولاً تتخذ أى قرار) فيما عدا ذلك .

وبما أن ، كما في المسألة ١٠ - ٧ (أ) ، قيمة z هي -2.50 وهي أقل من -1.645 ، فإننا نرفض H_0 عند مستوى المعنوية 0.05 . لاحظ أن هذا القرار مماثل لما توصلنا إليه في المسألة ١٠ - ٧ (أ) باستخدام اختبار من طرفين .

(ب) إذا كان مستوى المعنوية هو 0.01 ، فإن قيم z_1 في الشكل ١٠ - ٥ هي -2.33 . ولهذا فستستخدم القاعدة التالية في اتخاذ القرار :

(١) ارفض H_0 إذا كانت z أقل من -2.33 .

(٢) اقبل H_0 (أولاً تتخذ أى قرار) فيما عدا ذلك .

وبما أن ، كما في المسألة ١٠ - ٧ (أ) ، قيمة z هي -2.50 وهي أقل من -2.33 ، فإننا نرفض الفرض عند مستوى معنوية 0.01 . لاحظ أن هذا القرار يختلف عما وصلنا إليه في المسألة ١٠ - ٧ (أ) باستخدام الاختبار من طرفين .

يفتج عن ذلك أن القرارات الخاصة بفرض معين H_0 المبنية على اختبار من طرف واحد أو اختبار من طرفين ليست دائماً على اتفاق . وهذا ، بالطبع ، متوقع حيث أننا نختبر H_0 في مقابل بديل مختلف في كل حالة .

٩ - ١٠ متوسط قوة مقاومة حبال القطع من إنتاج أحد المصانع هو 1800 N وانحرافها المعياري 100 N . باستخدام طريقة جديدة للتصنيع ادعى أن قوة مقاومة الحبال سوف تزداد . لاختبار هذا الادعاء أخذت عينة من 50 حبلًا وتم اختبارها ووجد أن متوسط مقاومتها للقطع هو 1850 N . هل يمكن تأييد هذا الادعاء عند مستوى المعنوية 0.01 ؟

الحل :

يجب أن نختار بين الفرضين :

$$H_0 : \mu = 1800 \text{ N} , \text{ ولا يوجد تغيير حقيقى في قوة مقاومة الحبال}$$

$$H_1 : \mu > 1800 \text{ N} , \text{ ويوجد تغيير في قوة مقاومة الحبال}$$

ونستخدم هنا اختباراً من طرف واحد . الشكل المرتبط بهذا الاختبار مماثل للشكل بالمسألة ١٠ - ٥ عند مستوى معنوية 0.01 ولذلك فإن قاعدة اتخاذ القرار هي

(١) إذا كانت قيم z المشاهدة أكبر من 2.33 ، فإن النتائج معنوية عند مستوى 0.01 ونرفض H_0 .

(٢) بخلاف ذلك نقبل H_0 (أو نؤجل اتخاذ القرار)

تحت الفرض بأن H_0 صحيح ، فإننا نجد

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} = \frac{1850 - 1800}{100/\sqrt{50}} = 3.55$$

وهو أكبر من 2.33 . وبهذا نستنتج أن النتائج مرتفعة المعنوية أي أن الادعاء يجب تأييده .

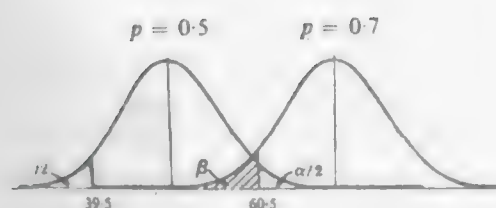
منحنيات توصيف العمليات :

١٠-١٠ بالرجوع إلى المسألة ١٠-٢ ، ما هو احتمال قبول الفرض بأن العملة غير متحيزة عندما يكون الاحتمال الفعلي

للمون هو $p = 0.7$ ؟

الحل :

الفرض H_0 القائل بأن العملة غير متحيزة ، أي $p = 0.5$ يقبل إذا كان عدد المون في مائة رمية يقع بين 39.5 و 60.5 . احتمال رفض H_0 عندما يجب أن نقبله (احتمال الوقوع في خطأ من النوع الأول) . وتمثل بالمساحة الكلية α للمنطقة المظلمة تحت المنحنى الطبيعي إلى اليسار في الشكل ١٠-٦ . كما حسب في المسألة ١٠-٢ (١) ، المساحة α ، والتي تمثل مستوى المعنوية لاختبار H_0 تساوي 0.0358 .



إذا كان احتمال المون هو $p = 0.7$ ، فإن توزيع المون في 100 رمية تمثل بالمنحنى الطبيعي بالشكل ١٠-٦ . يتضح من الشكل أن احتمال قبول H_0 عندما تكون $p = 0.07$ بالفعل (احتمال الوقوع في خطأ من النوع الثاني) يمثى بالمنطقة β المظلمة بخطوط مائلة في الشكل .

لحساب هذه المساحة نلاحظ أن التوزيع تحت الفرض $p = 0.7$ له متوسط وانحراف معياري كالآتي :

$$\mu = Np = (100)(0.7) = 70 \text{ and } \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(0.7)(0.3)} = 4.58$$

$$60.5 \text{ بوححدات معيارية} = -2.07 = (60.5 - 70)/4.58$$

$$39.5 \text{ بوححدات معيارية} = -6.66 = (39.5 - 70)/4.58$$

إذن

$0.0192 =$ (المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين $z = -6.66$ و $z = -2.07$). بهذا وباستخدام قواعد اتخاذ

القرار المعطاة فإن هناك فرصة ضئيلة في قبول الفرض بأن العملة غير متحيزة عندما تكون $p = 0.7$ بالفعل.

لاحظ أننا في هذه المسألة قد أعطينا أسس اتخاذ القرار والتي حسبناها β و α . ومن الناحية العملية من الممكن ظهور الحالتين :

(١) نختار قيمة α (مثل 0.05 أو 0.01)، نصل إلى أساس لاتخاذ القرار ثم نحسب β

(٢) نختار قيمة β و α ثم نصل إلى أساس اتخاذ القرار.

١١-١٠ حل المسألة السابقة إذا كانت (١) $p = 0.6$ (ب) $p = 0.8$ (ج) $p = 0.9$ (د) $p = 0.4$

الحل :

(١) إذا كانت $p = 0.6$ فإن توزيع الصور له متوسط وانحراف معياري كالآتي :

$$\mu = Np = (100)(0.6) = 60 \quad \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(0.6)(0.4)} = 4.90$$

$$60.5 \text{ بوححدات معيارية} = 0.0102 = (60.5 - 60)/4.90$$

$$39.5 \text{ بوححدات معيارية} = -4.18 = (39.5 - 60)/4.90$$

إذن

$$\beta = 0.5040 \text{ (المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين } z = -4.18 \text{ و } z = 0.0102 \text{)}$$

بهذا وباستخدام قواعد اتخاذ القرار المعطاة فإن هناك فرصة كبيرة في قبول الفرض بأن العملة غير متحيزة عندما

تكون القيمة الفعلية هي $p = 0.6$

(ب) إذا كانت $p = 0.8$ ، فإن $\mu = Np = (100)(0.8) = 80$ and $\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(0.8)(0.2)} = 4$

$$60.5 \text{ بوححدات معيارية} = -4.88 = (60.5 - 80)/4$$

$$39.5 \text{ بوححدات معيارية} = -10.12 = (39.5 - 80)/4$$

إذن

$$\beta = 0.0000 \text{ (المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين } z = -10.12 \text{ و } z = -4.88 \text{)}$$

(قريبة جداً من الصفر).

(ج) من المقارنة بـ (١) أو بالحساب ، نجد أنه إذا كانت $p = 0.9$ ، فإن $\beta = 0$ وذلك لجميع الأغراض العملية .

(د) بالتأمل $p = 0.4$ تعطى قيمة β مثل $p = 0.6$ ، أى $\beta = 0.5040$

١٧-١٠ عبر بيانها عن نتائج المسائل ١٠-١٠ و ١١-١٠ برسم شكل (١) β مقابل p (ب) $(1 - \beta)$ مقابل p .
فسر الأشكال الناتجة .

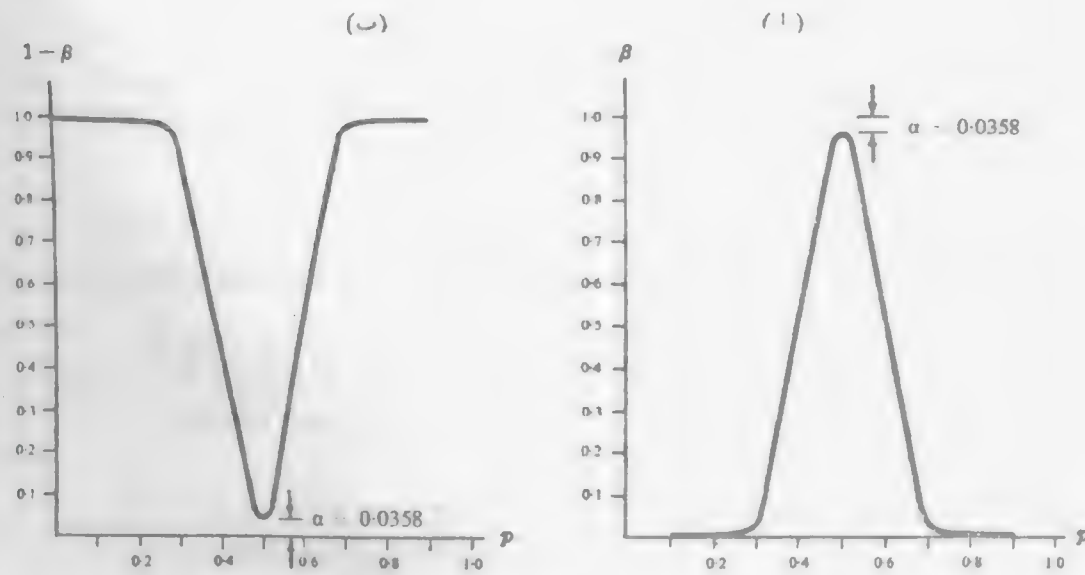
الحل :

الجدول ٢-١٠ يوضح قيم β المقابلة لقيم p المطاة كما حصلنا عليها في المسائل ١٠-١٠ و ١١-١٠ .

جدول ٢-١٠

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
β	0.0000	0.0000	0.0192	0.5040	0.9642	0.5040	0.0192	0.0000	0.0000

لاحظ أن β تمثل احتمال قبول الفرض بأن $p = 0.5$ عندما تكون قيمة p الفعلية قيمة أخرى غير 0.5 .
أما إذا كانت قيمة p الفعلية هي 0.5 فإن β تمثل احتمال قبول $p = 0.5$ عندما يكون من المفروض قبولها . هذا
الاحتمال يساوى $1 - 0.0358 = 0.9642$ وهو موضح بالجدول ٢-١٠ .



شكل ٧-١٠

(١) الشكل البياني β مقابل p ، موضح بالشكل ١٠-٧ (١) ، يسمى بمنحنى توصيف العمليات أو بمنحنى OC لقاعدة اتخاذ القرار أو لاختبار الفرض .

المسافة بين نقطة النهاية العظمى للمنحنى OC والخط $\beta = 1$ يساوي $\alpha = 0.0358$ ، مستوى المعنوية للاختبار .

وبشكل عام ، كلما زادت حدة قوة المنحنى OC كانت قواعد اتخاذ القرار أفضل في رفض الفروض غير الصحيحة .

(ب) الشكل البياني $(1 - \beta)$ مقابل p ، موضح بالشكل ١٠-٧ (١) ، يسمى بمنحنى قوة اختبار الفرض أو قواعد اتخاذ القرار . وهذا المنحنى نحصل عليه ببساطة كقلوب لمنحنى OC ، بحيث أن الشكلين من الناحية الفعلية متكافئين .

الكمية $(1 - \beta)$ تسمى غالباً دالة القوة حيث أنها تشير إلى قابلية أو قوة الاختبار لرفض الفرض غير الصحيح ، أي الذي يجب رفضه . وتسمى الكمية β دالة توصيف العمليات للاختبار .

١٠-١٣ تنتج شركة كابلات متوسطة قوة مقاومتها للكسر هو 300 N وانحرافها المعياري 24 N . ومن المعتقد أنه باستخدام طريقة جديدة مبتكرة يمكن زيادة قوة المقاومة للكسر .

(١) صمم قاعدة لاتخاذ القرار بشأن رفض الأسلوب القديم في التصنيع عند مستوى معنوية 0.01 إذا افق على اختبار 64 كابل .

(ب) بنفس قاعدة لاتخاذ القرار المستخدمة في (١) ، ما هو احتمال قبول الطريقة القديمة عندما تكون الطريقة الحديثة قد أدت في الواقع إلى زيادة متوسط المقاومة للكسر إلى 310 N ؟ افترض أن الانحراف المعياري لا يزال 24 N .

الحل :

(١) إذا كانت μ هي متوسط المقاومة للكسر ، فإننا نريد أن نقرر بين الفرضين :

$$H_0 : \mu = 300\text{ N} \text{ أي أن الطريقة الجديدة مثل الطريقة القديمة ،}$$

$$H_1 : \mu > 300\text{ N} \text{ ، أي أن الطريقة الجديدة أفضل من الطريقة القديمة .}$$

للاختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.01 ، فإننا نحصل على القواعد التالية لاتخاذ القرار (ارجع إلى الشكل ١٠-٨ (١)) .

(١) ارفض H_0 إذا كانت قيم z لمتوسط المقاومة للكسر في العينة أكبر من 2.33

(٢) أقبّل H_0 فيما عدا ذلك .

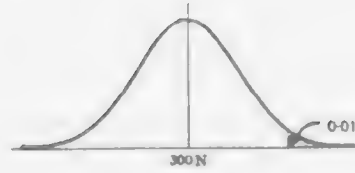
بما أن $z > 2.33$,

فإنه إذا كانت $z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} = \frac{\bar{X} - 300}{24/\sqrt{64}}$ فإن $\bar{X} = 300 + 3z$.

وبهذا فإن قواعد اتخاذ القرار السابقة تصبح : $\bar{X} > 300 + 3(2.33) = 307.0 \text{ N}$

(١) ارفض H_0 إذا كان متوسط المقاومة للكسر في الـ 64 كابلا يتجاوز 307.0 N

(٢) أقبّل H_0 فيما عدا ذلك .



شكل ١٠-٨ (أ)

(ب) اعتبر الفرضين $H_0 : \mu = 300 \text{ N}$

و $H_1 : \mu = 310 \text{ N}$. توزيعات متوسط

المقاومة للكسر المقابل لهذين الفرضين مثل على

الترتيب بالمنحنى الطبيعي على اليسار والمنحنى

الطبيعي على اليمين في الشكل ١٠-٨ (أ) .

احتمال قبول عملية التصنيع القديمة عندما يكون متوسط المقاومة للكسر للطريقة الجديدة هو 310 N

بالفعل مثل بالمنطقة التي مساحتها β في الشكل ١٠-٨ (أ) . للحصول على ذلك ، لاحظ أن 307.0 N

معبرا عنها بوحدات قياسية $1.00 = (307.0 - 310)/3$ إذن

$0.1587 = \beta$ (المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى اليمين وإلى يسار $1.00 = z$) وهذا هو احتمال

قبول $H_0 : \mu = 300 \text{ N}$ عندما تكون $H_1 : \mu = 310 \text{ N}$ هي فعلا القيمة الصحيحة ، أي احتمال

ارتكاب خطأ من النوع الثاني .

١٠-١٤ كون (أ) منحنى OC (ب) منحنى القوة للمسألة ١٠-١٣ ، مفترضاً أن الانحراف المعياري للمقاومة

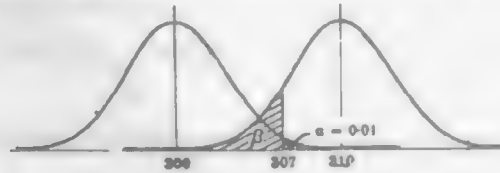
للكسر سيظل 24 N

الحل :

باستخدام مبررات ماثلة لتلك المستخدمة في المسألة ١٠-١٣ (أ) ، يمكن الحصول على β في الحالات التي

تنتج فيها الطريقة الجديدة متوسط مقاومة للكسر μ يساوي 305 N ، 315 N ، ... على سبيل المثال إذا

كانت $\mu = 305 \text{ N}$ فإن $z = (307.0 - 305)/3 = 0.67$ معبرا عنها بوحدات معيارية



أو منحنى

مستوى

الفروض

اختبار

أن الشكليات

من الفرض

المتخذ أنه

إذا اتفق

ريثة الحديثة

المعيارى

تخاذ القرار

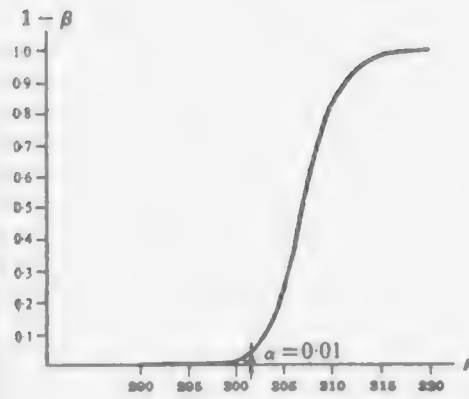
إذن

$0.7486 =$ (المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى اليمين وإلى يسار $z = 0.67$) $\beta =$ وهذه الطريقة يمكن الحصول

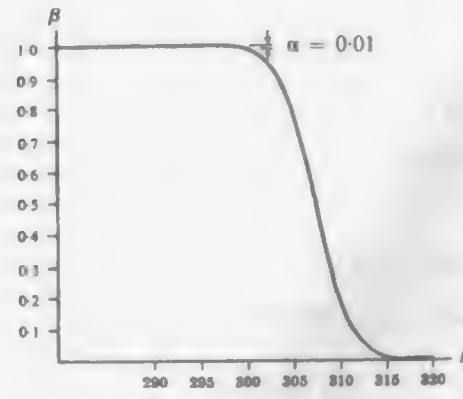
على الجدول ٣-١٠

جدول ٣-١٠

μ	290	295	300	305	310	315	320
β	1.0000	1.0000	0.9900	0.7486	0.1587	0.0038	0.0000



(ب)



(أ)

شكل ٩-١٠

(أ) يظهر منحنى OC في الشكل ٩-١٠ (أ) . من هذا المنحنى نجد أن احتمال الإبقاء على الطريقة القديمة في التصنيع إذا كانت قوة المقاومة للكسر الجديدة أقل من 300 N ، من الناحية العملية يساوي ١ (فيما عدا عند مستوى المعنوية 0.01 عندما يكون متوسط الطريقة الجديدة هو 300 N) ثم يأخذ المنحنى في الهبوط إلى الصفر بحيث لا تكون هناك فرصة من الناحية العملية في الاحتفاظ بالطريقة القديمة عندما يكون متوسط المقاومة للكسر أكبر من 315 N .

(ب) يظهر منحنى القوة في الشكل ٩-١٠ (ب) . وهو يعطى نفس التفسير مثل منحنى OC . والواقع أن المنحنين أساساً متكافئان .

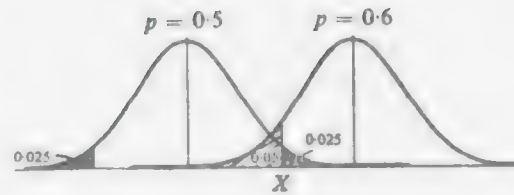
١٠-١٥ اختبار أن عملة غير متحيزة ($p = 0.5$) عن طريق عدد من رميات العملة ، فإننا نرغب في فرض القيود التالية :

(أ) احتمال رفض الفرض عندما يكون الفرض صحيحا بالفعل 0.05 على الأكثر .

(ب) احتمال قبول الفرض أن p تختلف فعلا عن 0.5 بما يساوى 0.1 أو أكثر (أى $p \geq 0.6$ أو $p \leq 0.4$) يجب أن يكون هذا الاحتمال 0.05 على الأكثر .

حدد الحد الأدنى الضروري لحجم العينة وأذكر قواعد اتخاذ القرار .

الحل :



شكل ١٠ - ١٠

وضعنا هنا حدوداً على الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني . على سبيل المثال ، فإن القيد المذكور في (أ) يتطلب أن يكون احتمال الخطأ من النوع الأول $\alpha = 0.05$ على الأكثر بينما القيد (ب) يتطلب أن يكون احتمال $\beta = 0.05$. وقد صور الوضع في الشكل ١٠ - ١٠ .

اعتبر N هو حجم العينة المطلوب و X عدد الصور في N رمية ، وإلى إذا زاد عدد هذه الصور عن ذلك نرفض الفرض أن $p = 0.5$. من الشكل ١٠ - ١٠

$$(١) \text{ المساحة تحت المنحنى الطبيعي } p = 0.5 \text{ إلى اليمين من } \frac{X - 0.5N}{0.5\sqrt{N}} = \frac{X - Np}{\sqrt{Npq}} \text{ هي } 0.025$$

$$(٢) \text{ المساحة تحت المنحنى الطبيعي } p = 0.6 \text{ إلى اليسار من } \frac{X - 0.6N}{0.49\sqrt{N}} = \frac{X - Np}{\sqrt{Npq}} \text{ هي } 0.05$$

[من الناحية العملية المساحة بين $(X - 0.6N)/0.49\sqrt{N}$ و $[(N - X) - 0.6N]/0.49\sqrt{N}$ هي 0.05 ، (٢) تقريب جيد) .

$$\text{من (١) } \frac{X - 0.5N}{0.5\sqrt{N}} = 1.96 \text{ أو } (٢) X = 0.5N + 0.980\sqrt{N}$$

$$\text{من (٢) } \frac{X - 0.6N}{0.49\sqrt{N}} = -1.645 \text{ أو (٤) } X = 0.6N - 0.806\sqrt{N}$$

إذن من (٢) و (٤) ، $N = 318.98$. أى أن حجم العينة يجب أن يكون على الأقل 319 ، أى يجب أن تقذف 319 مرة على الأقل . بوضع $N = 319$ في (٢) أو (٤) فإن $X = 177$.

لقيم $p = 0.5$ فإن $X - Np = 177 - 159.5 = 17.5$ بهذا فإننا نتبين القاعدة التالية لاتخاذ القرار :

(أ) اقبل الفرض $p=0.5$ إذا كان عدد الصور في 319 رمية في المدى من 159.5 ± 17.5 أى بين 142 و 177 صورة .

(ب) ارفض الفرض فيما عد ذلك .

خرائط الرقابة :

١٠ - ١٦ ماكينة مصصنة لإنتاج رولمان البلى متوسط قطره 5.74 mm وانحرافه المعيارى 0.08 mm . لتحديد ما إذا كانت الماكينة تعمل حسب المواصفات ، أخذت عينة من 6 من رولمان البلى كل ساعتين ، على سبيل المثال ، وحسب منها متوسط القطر

(أ) صمم قاعدة لاتخاذ القرار تمكن الشخص من أن يكون متأكداً بشكل معقول من أن مواصفات المنتجات تتفق مع المستويات المطلوبة .

(ب) وضح كيف يمكن تمثيل قاعدة اتخاذ القرار في (أ) بيانياً .

الحل :

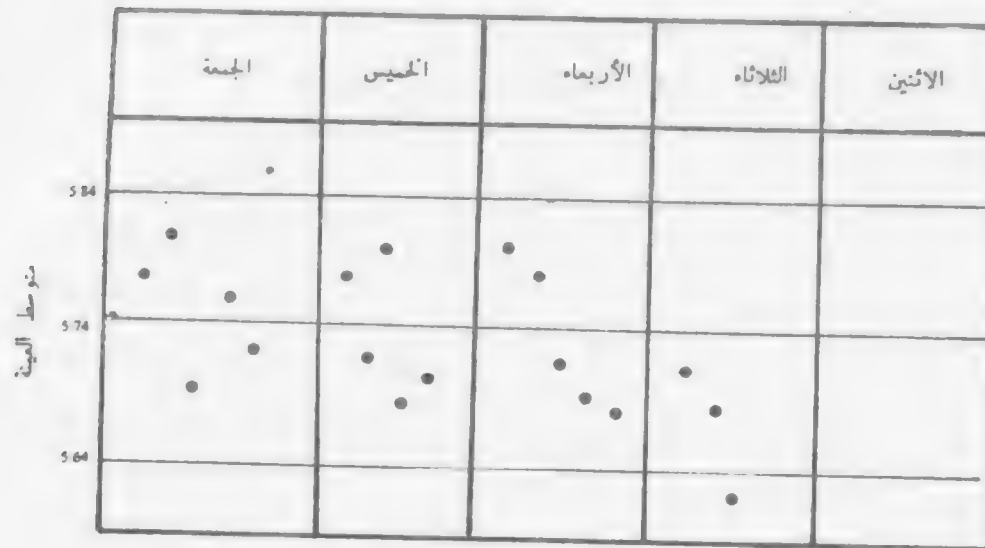
(أ) بدرجة ثقة 99.73% يمكن القول بأن متوسط العينة \bar{X} يجب أن يقع في المدى من $(\mu_p - 3\sigma_p)$ إلى $(\mu_p + 3\sigma_p)$ أو $(\mu - 3\sigma/\sqrt{N})$ إلى $(\mu + 3\sigma/\sqrt{N})$. وبما أن $\mu = 0.574$ و $\sigma = 0.08$ و $N = 6$ ، يترتب على ذلك أنه بدرجة ثقة 99.73% فإن متوسط العينة يجب أن يقع بين $(5.74 - 0.24/\sqrt{6})$ و $(5.74 + 0.24/\sqrt{6})$ أى بين 5.64 و 5.84 mm .
وهذا فإن أسلوبنا لاتخاذ القرار سيكون كما يلى :

(1) إذا كان متوسط العينة واقع داخل المدى 5.64 إلى 5.84 mm افترض أن الماكينة تعمل حسب المواصفات .

(2) خلاف ذلك استنتج بأن الماكينة لاتعمل حسب المواصفات ، وابحث عن الأسباب .

(ب) يمكن الاحتفاظ بتسجيل لمتوسطات العينات وذلك بواسطة لوحة مثل تلك الموضحة في الشكل ١٠ - ١١ ، وتسمى بخرائط مراقبة جودة الإنتاج . وفي كل وقت تحسب فيه متوسط العينة يمثل في هذه الخريطة بنقطة . ومادامت هذه النقطة تقع بين الحد الأدنى 5.64 mm والحد الأعلى 5.84 mm ، فإن العملية تكون تحت المراقبة . وعندما تقع نقطة خارج حدود المراقبة هذه (مثل العينة الثالثة المسحوبة يوم الخميس) ، فإن هناك إمكانية أن هناك خطأ ما المطلوب استقصاء أسبابه .

حدود المراقبة المذكورة أعلاه تسمى 99.73% حدود ثقة أو باختصار حدود 3σ . كذلك يمكن استخدام حدود ثقة ، مثل 99% أو 95% . ويعتمد الاختيار في كل حالة على الظروف الخاصة



شكل ١٠ - ١١

الاختبارات المتضمنة الفروق بين المتوسطات والنسب :

١٠ - ١٧ أعطى اختبار لفصلين يتكون الأول من 40 طالباً والثاني من 50 طالباً . في الفصل الأول كان متوسط الدرجات 74 والانحراف المعياري 8 ، بينما في الفصل الثاني كان متوسط الدرجات هو 78 والانحراف المعياري 7 .

هل هناك اختلاف معنوي في أداء الفصلين عند مستوى المعنوية

(ب) 0.01 ؟

(أ) 0.05

الحل :

افترض أن الفصلين مسحويين من مجتمعين متوسطاتهما هي μ_1 و μ_2 . وبهذا فإننا يجب أن نقرر بين الفرضين :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ، والاختلاف يرجع تقريباً للصدفة

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ، وهناك فرق معنوي بين الفصلين .

تحت الفرض H_0 كلا الفصلين مسحويين من نفس المجتمع . المتوسط والانحراف المعياري لفرق بين

المتوسطين يملأ كما يلي :

$$\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = 0 \text{ and } \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\sigma_1^2/N_1 + \sigma_2^2/N_2} = \sqrt{8^2/40 + 7^2/50} = 1.606$$

حيث استخدمنا الانحرافات المعيارية للعينة كتقدير لـ σ_1 و σ_2 .

$$z = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) / \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = (74 - 78) / 1.606 = -2.49 \quad \text{إذن}$$

(أ) إذا استخدمنا اختباراً من طرفين فإن النتائج تكون معنوية عند المستوى 0.05 إذا وقعت z خارج المدى من -1.96 إلى 1.96 . وبهذا نستنتج أنه عند المستوى 0.05 فإن هناك فرقاً معنوياً في أداء الفصلين وأنه من المحتمل أن يكون أداء الفصل الثاني أفضل .

(ب) إذا استخدمنا اختباراً من طرفين فإن النتائج تكون معنوية عند المستوى 0.01 إذا وقعت z خارج المدى من -2.58 إلى 2.58 . وبهذا نستنتج أنه لا يوجد هناك فرق معنوي بين الفصلين .

وبما أن النتائج معنوية عند المستوى 0.05 ولكن غير معنوية عند المستوى 0.01 ، فإننا نستنتج أن النتائج محتملة المعنوية وذلك طبقاً للمصطلح المستخدم في نهاية المسألة ١٠ - ٥ .

١٠ - ١٨ إذا كان متوسط أوزان 50 طالباً من المشاركين في النشاط الرياضي في كلية هو 68.2 kg بانحراف معياري 2.5 kg بينما كان متوسط وزن 50 طالباً لم يظهر اهتماماً بالمشاركة في النشاط الرياضي في الكلية هو 67.5 kg بانحراف معياري 2.8 kg . اختبر الفرض بأن الطلبة الذين يساهمون في النشاط الرياضي أثقل وزناً من غيرهم في الكلية.

الحل :

يجب أن نقرر بين الفرضين :

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{لا يوجد فرق بين متوسط الأوزان}$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2 \quad \text{متوسط أوزان المجموعة الأولى أكبر من متوسط أوزان المجموعة الثانية .}$$

تحت الفرض H_0 :

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = 9 \quad \text{and} \quad \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\sigma_1^2/N_1 + \sigma_2^2/N_2} = \sqrt{(2.5)^2/50 + (2.8)^2/50} = 0.53$$

حيث استخدمنا الانحراف المعياري للعينة كتقدير لـ σ_1 و σ_2

$$z = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) / \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = (68.2 - 67.5) / 0.53 = 1.32. \quad \text{إذن}$$

باستخدام اختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.05 ، فإننا نرفض الفرض H_0 إذا كانت قيم z أكبر من 1.645 . وبهذا فإنه لن يمكننا رفض الفرض عند هذا المستوى من المعنوية .

يجب ملاحظة ، أنه يمكن رفض الفرض عند المستوى 0.10 إذا كنا على استعداد لتحمل مخاطرة أن نقع في الخطأ باحتمال 0.10 ، أي فرصة واحدة كل 10 .

١٠ - ١٩ بأي مقدار يجب زيادة حجم العينة في كل من المجموعتين في المسألة ١٠ - ١٨ بحيث يكون الفرق المشاهد 0.7 kg

في متوسط الأوزان معنوياً عند مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 ؟

الحل :

افترض أن حجم العينة في كل مجموعة هو N وأن الانحراف المعياري للمجموعتين لن يتغير . بهذا يكون تحت الفرض H_0 فإن

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\sigma_1^2/N + \sigma_2^2/N} = \sqrt{(2.5)^2 + (2.8)^2}/N = \sqrt{14.09}/N = 3.75/\sqrt{N}$$

قيمة z للفرق المشاهد 0.7 kg بين متوسط الأوزان هي

$$z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{0.7}{3.75/\sqrt{N}} = \frac{0.7\sqrt{N}}{3.75}$$

(أ) الفرق المشاهد سيكون معنوياً عند المستوى 0.05 إذا كانت $1.645 = 0.7\sqrt{N}/3.75$ ، على الأقل بحيث أن N يجب أن تكون 78 على الأقل . وهذا يجب أن تزيد حجم العينة في كل مجموعة مما مقداره $28 = (78 - 50)$ على الأقل .

طريقة أخرى :

$$0.7\sqrt{N}/3.75 \geq 1.645, \sqrt{N} \geq (3.75)(1.645)/0.7, \sqrt{N} \geq 8.8, N \geq 77.4 \text{ or } N \geq 78$$

(ب) الفرق المشاهد سيكون معنوياً عند المستوى 0.01 إذا كانت

$$0.7\sqrt{N}/3.75 \geq 2.33, \sqrt{N} \geq (3.75)(2.33)/0.7, \sqrt{N} \geq 12.5, N \geq 156.3 \text{ or } N \geq 157$$

وهذا يجب أن تزيد حجم العينة في كل مجموعة بما لا يقل عن $107 = (157 - 50)$

١٠ - ٧٥ مجموعتان ، A و B ، تتكون كل منهما من 100 شخص مصابين بمرض معين . أعطى مصل للمجموعة A ولم يعط للمجموعة B (والتي تسمى بالمجموعة الضابطة) ، بخلاف ذلك ، فإن المجموعتين يعاملان معاملة متماثلة . وقد وجد أنه في المجموعة A شفي 75 شخصاً من المرض ، بينما في المجموعة B شفي 65 شخصاً . اختبر الفرض أن المصل يساعد على الشفاء من المرض باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.01

(ب) 0.05 ، (ب) 0.10

الحل :

اعتبر أن p_1 تمثل النسبة في المجتمع للأشخاص الذين شفيوا باستخدام المصل . وأن p_2 تمثل النسبة في المجتمع للأشخاص الذين شفيوا بدون استخدام المصل .

يجب أن نقرر بين فرضين :

من
من

من

نتائج

2.5
راف

أكبر

نقح

0.7k

$H_0: p_1 = p_2$ ، والفروق المشاهدة ترجع إلى الصدفة ، أى أن المصل غير فعال .

$H_0: p_1 > p_2$ ، أى أن المصل فعال .

تحت الفرض H_0 ،

$$\mu_{p_1 - p_2} = 0 \text{ and } \sigma_{p_1 - p_2} = \sqrt{pq(1/N_1 + 1/N_2)} = \sqrt{(0.70)(0.30)(1/100 + 1/100)} = 0.0648$$

وقد استخدمنا كتقدير p متوسط نسبة الذين شفوا من المرض في المجموعتين وهي $(75 + 65)/200 = 0.70$

و $q = 1 - p = 0.30$ إذن

$$z = (P_1 - P_2)/\sigma_{P_1 - P_2} = (0.750 - 0.650)/0.0648 = 1.54.$$

(أ) إذا استخدمنا اختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.01 فإننا يجب أن نرفض الفرض H_0 إذا كانت قيم z أكبر من 2.33 . وبما أن قيمة z هي 1.54 فقط ، فإننا نستنتج عند هذا المستوى من المعنوية بأن الفروق ترجع للصدفة .

(ب) إذا استخدمنا اختباراً من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.05 ، فإننا يجب أن نرفض الفرض H_0 إذا كانت قيم z أكبر من 1.645 . وبهذا نستنتج أن النتائج ترجع للصدفة عند هذا المستوى

(ج) إذا استخدمنا اختباراً من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.01 ، فإننا يجب أن نرفض H_0 إذا كانت قيم z أكبر من 1.28 . وبما أن هذا تحقق ، فإننا نستنتج بأن المصل فعال عند مستوى المعنوية 0.01 . لاحظ أن استنتاجاتنا الموضحة أعلاه تعتمد على مقدار استعدادنا لتحمل مخاطرة الوقوع في خطأ . فإذا كانت النتائج ترجع فعلاً للصدفة ولكننا ننهي إلى أنها ترجع إلى المصل (خطأ من النوع الأول) ، فقد نستمر في إعطاء المصل لمجموعة كبيرة من الأشخاص ثم نجد أنه غير فعال . وهذه مخاطرة قد لا تكون على استعداد دائماً لتحملها . ومن الناحية الأخرى ، قد نقرر أن المصل لا يفيد بينما هو في الواقع فعال (خطأ من النوع الثاني) . مثل هذا الاستنتاج خطير وخاصة إذا كانت حياة بشرية هي موضع المخاطرة .

١٠ - ١١ حل المسألة السابقة إذا كانت كل مجموعة مكونة من 300 شخص شفي من المجموعة A عدد 225 شخصاً ومن المجموعة B عدد 195 شخصاً .

الحل :

لاحظ أن نسبة الذين شفوا في هذه الحالة هي $225/300 = 0.750$ للمجموعة A ، $195/300 = 0.650$

للمجموعة B وهي نفس النسبة في المسألة السابقة . تحت الفرض H_0

$$\mu_{p_1 - p_2} = 0 \text{ and } \sigma_{p_1 - p_2} = \sqrt{pq(1/N_1 + 1/N_2)} = \sqrt{(0.70)(0.30)(1/300 + 1/300)} = 0.0374$$

حيث استخدمنا $0.70 = (225 + 195)/600$ كتقدير p .

إذن

$$z = (P_1 - P_2)/\sigma_{P_1 - P_2} = (0.750 - 0.650)/0.0374 = 2.67$$

بما أن قيمة z أكبر من 2.33 ، فيمكن رفض الفرض عند مستوى معنوية 0.01 . أى نقرر أن المصل فعال باحتمال 0.01 أن نكون مخطئين في هذا القرار .

هذا يوضح كيف أن زيادة حجم العينة يؤدي إلى زيادة مأمونية القرارات . وفي كثير من الأحيان ، قد يكون من غير العملي زيادة حجم العينة . في مثل هذه الحالات قد نكون ملزمين باتخاذ قرارات مبينة على المعلومات المتاحة وأن نرضى بمخاطرة أكبر ناتجة عن اتخاذ قرارات خاطئة .

١٠ - ٢٢ في دراسة بالعينة لقياس الرأي أخذت عينة من 300 ناخب في المنطقة A و 200 ناخب في المنطقة B حيث أظهرت أن 56% من المنطقة A و 48% من المنطقة B في صالح مرشح معين . عند مستوى معنوية 0.05 ، اختبر الفرض القائل أن (أ) هناك اختلاف بين المنطقتين (ب) المرشح مفضل في المنطقة A .

الحل :

اعتبر أن p_1 هي النسبة من جميع الأصوات في المنطقة A التي في صالح المرشح وأن p_2 هي النسبة من جميع الأصوات في المنطقة B التي في صالح هذا المرشح

نخت الفرض $H_0 : p_1 = p_2$ ، فإن

$$\mu_{P_1 - P_2} = 0 \text{ and } \sigma_{P_1 - P_2} = \sqrt{pq(1/N_1 + 1/N_2)} = \sqrt{(0.528)(0.472)(1/300 + 1/200)} = 0.0456$$

حيث استخدمنا كتقدير قيم p و q القيم 0.528 and $(1 - 0.528) = 0.472$ $[(0.56)(300) + (0.48)(200)]/500 = 0.528$

$$z = (P_1 - P_2)/\sigma_{P_1 - P_2} = (0.560 - 0.480)/0.0456 = 1.75 \text{ إذن}$$

(أ) إذا كنا نريد فقط تحديد ما إذا كان هناك فرق بين المنطقتين ، فيجب أن نقرر بين الفرضين $(H_0 : p_1 = p_2)$ و $(H_1 : p_1 \neq p_2)$ وهذا يتضمن اختباراً من طرفين .

على أساس اختبار من طرفين عند مستوى المعنوية 0.05 ، فإننا نرفض H_0 إذا كانت z خارج الفترة من 1.96 - إلى 1.96 . وبما أن $z = 1.75$ تقع داخل هذه الفترة ، فلا يمكننا رفض H_0 عند هذا المستوى أى لا يوجد فرق معنوي بين المنطقتين .

(ب) إذا أردنا تقرير ما إذا كان المرشح مفضل في المنطقة A ، فيجب أن نقرر بين الفروض $(H_0 : p_1 = p_2)$ و $(H_1 : p_1 > p_2)$. وهذا يتضمن اختباراً من طرف واحد .

عل أساس اختبار من طرف واحد عند مستوى المنوية 0.05 ، فإننا نرفض H_0 إذا كانت z أكبر من 1.645 . وبما أن هذه هي الحالة ، فيمكننا رفض H_0 عند هذا المستوى ، ونستنتج أن المرشح مفضل في المنطقة A

اختبارات تتضمن توزيع ذي الحدين :

١٠ - ٢٣ أعطى مدرس اختباراً مفاجئاً يتضمن 10 أسئلة من النمط الذي تكون الإجابة عليه : صواب - خطأ . لاختبار الفرض بأن الطالب يخمن الإجابة ، استخدمت القاعدة التالية في اتخاذ القرار :

إذا كانت هناك 7 أو أكثر من الإجابات صحيحة فإن الطالب لا يخمن

إذا كانت هناك أقل من 7 إجابات صحيحة فالطالب يخمن .

أوجد احتمال رفض الفرض عندما يكون صحيحاً .

الحل :

اعتبر أن p هي احتمال الإجابة الصحيحة على السؤال .

احتمال إجابة X مسألة إجابة صحيحة من 10 مسائل هي ${}_{10}C_X p^X q^{10-X}$ حيث $q = 1 - p$

بهذا فتحت الفرض أن $p = 0.5$ (أن الطالب يخمن) .

$$\Pr \{ 8 \text{ إجابات صحيحة} \} + \Pr \{ 7 \text{ إجابات صحيحة} \} = \Pr \{ 7 \text{ أو أكثر إجابة صحيحة} \} \\ + \Pr \{ 10 \text{ إجابات صحيحة} \} + \Pr \{ 9 \text{ إجابة صحيحة} \}$$

$$= {}_{10}C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_{10}C_8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_{10}C_9 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right) + {}_{10}C_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0.1719$$

بهذا فإن احتمال أن نصل إلى قرار بأن الطالب لا يخمن الإجابة عندما يكون بالفعل يخمن الإجابة هو 0.1719

لاحظ أن هذا احتمال الخطأ من النوع الأول .

١٠ - ٢٤ في المسألة السابقة ، أوجد احتمال قبول الفرض $p = 0.5$ عندما تكون القيمة p الفعلية هي 0.7

الحل :

نحت الفرض $p = 0.7$ ،

$$\Pr \{ 7 \text{ إجابات أو أكثر صحيحة} \} = 1 - \Pr \{ 7 \text{ إجابات صحيحة} \} \\ = 1 - [{}_{10}C_7 (0.7)^7 (0.3)^3 + {}_{10}C_8 (0.7)^8 (0.3)^2 + {}_{10}C_9 (0.7)^9 (0.3) + {}_{10}C_{10} (0.7)^{10}] = 0.3504$$

١٠ - ٢٥ في المسألة ١٠ - ٢٣ ، أوجز احتمال قبول الفرض $p = 0.5$ عندما

تكون القيمة الفعلية (أ) $p = 0.6$ (ب) $p = 0.8$

(ج) $p = 0.9$ (د) $p = 0.3$

(هـ) $p = 0.2$ (و) $p = 0.1$

الحل :

(أ) إذا كانت $p = 0.6$ فإن الاحتمال المطلوب

$$= 1 - \Pr \{ 7 \text{ إجابات صحيحة} \} + \Pr \{ 8 \text{ إجابات صحيحة} \} \\ + \Pr \{ 9 \text{ إجابات صحيحة} \} + \Pr \{ 10 \text{ إجابات صحيحة} \}$$

$$= 1 - [\Pr \{ 7 \text{ correct} \} + \Pr \{ 8 \text{ correct} \} + \Pr \{ 9 \text{ correct} \} + \Pr \{ 10 \text{ correct} \}] \\ = 1 - [{}_{10}C_7(0.6)^7(0.4)^3 + {}_{10}C_8(0.6)^8(0.4)^2 + {}_{10}C_9(0.6)^9(0.4) + {}_{10}C_{10}(0.6)^{10}] = 0.618$$

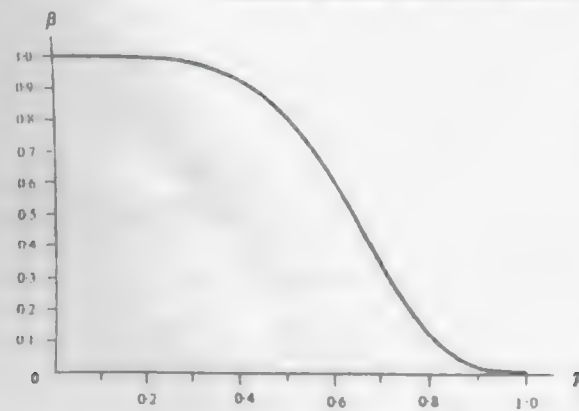
النتائج من (ب) ، (ج) ، (و) يمكن الحصول عليها بنفس الطريقة وهي موضحة بالجدول ١٠ - ٤ إلى جانب القيم المقابلة : $p = 0.7$ و $p = 0.6$.

لاحظ أن الاحتمال يرمز له بالرمز β (الخطأ من النوع الثاني) .

كذلك يشمل الجدول القيم المقابلة لـ $p = 0.5$ وهي $\beta = 1 - 0.1719 = 0.828$ من المسألة ١٠ - ٢٣ . $p = 0.7$ من المسألة ١٠ - ٢٤ .

جدول ١٠ - ٤

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
β	1.000	0.999	0.989	0.945	0.828	0.618	0.350	0.121	0.13



شكل ١٠ - ١٢

١٠ - ٢٦ استخدم المسألة ١٠ - ٢٥ لتكوين الرسم البياني

لقيم β مقابل p ، أى منحنى توصيف العمليات

لقاعدة اتخاذ القرار في المسألة ١٠ - ٢٣

الحل :

الرسم البياني المطلوب موضح بالشكل

١٠ - ١٢ لاحظ التماثل بين الرسم ومنحنى OC

للمسألة ١٠ - ١٤ .

روض

نبر من

طقة A

لفرض

Pr

0.171

إذا رسمنا $(1 - \beta)$ مقابل p ، فإننا نحصل على منحنى قوة الاختبار .

يوضح الشكل أن قاعدة اتخاذ القرار المعطاة أكثر قوة ورفض $p = 0.5$ عندما تكون قيم p الفعلية $p \leq 0.4$ أو $p \geq 0.8$.

١٠ - ٢٧ قذفت عملة 6 مرات فأظهرت الصورة في الست مرات هل يمكن أن نستنتج عند مستوى المعنوية

(أ) 0.05 (ب) 0.01 أن العملة متحيزة ؟

اعتبر كلا من الاختبار من طرف واحد والاختبار من طرفين .

الحل :

اعتبر أن p تمثل احتمال ظهور الصورة في رمية واحدة للعملة .

تحت الفرض $H_0 : p = 0.5$ (أى العملة غير متحيزة) ،

$$P(X) = \Pr \{ X \text{ صورة في } 6 \text{ رميات} \} = {}^6C_X \left(\frac{1}{2}\right)^X \left(\frac{1}{2}\right)^{6-X} \\ = {}^6C_X / 64$$

إذن فاحتمال ظهور 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 صورة

هى على الترتيب $\frac{1}{64}, \frac{6}{64}, \frac{15}{64}, \frac{20}{64}, \frac{15}{64}, \frac{6}{64}, \frac{1}{64}$ and $\frac{1}{64}$.

كما هو موضح بيانياً في التوزيع الاحتمالى بالشكل ١٠ - ١٣

الاختبار من طرف واحد :

نريد هنا التقرير بين الفرضين $(H_0 : p = 0.5)$

و $(H_1 : p > 0.5)$ ،

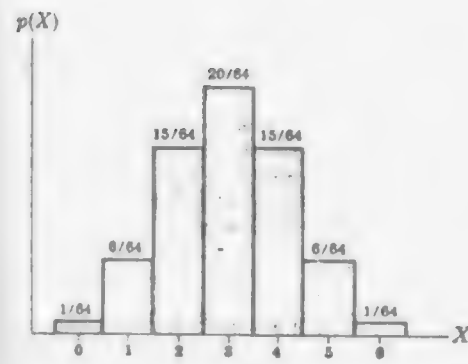
وبما أن $\Pr \{ \text{صور 6} \} = \frac{1}{64} = 0.01562$

و $\Pr \{ \text{صور 6 أو 5} \} = \frac{1}{64} + \frac{6}{64} = 0.1094$.

فيمكن رفض H_0 عند المستوى 0.05 وليس عند

المستوى 0.01 (النتائج المشاهدة معنوية عند المستوى

0.05 وليست عند المستوى 0.01) .



شكل ١٠ - ١٣

الاختبار من طرفين :

نريد هنا التقرير بين الفرضين $(H_0 : p = 0.5)$ و $(H_1 : p \neq 0.5)$ بما أن

$\Pr \{ \text{صفر صورة أو 6 صور} \} = \frac{1}{64} + \frac{1}{64} = 0.03125$ ، فيمكن رفض H_0 عند المستوى 0.05

ولكن ليس عند المستوى 0.01 .

١٠ - ٢٨ حل المسألة ١٠ - ٢٧ إذا ظهرت الصورة 5 مرات .

الحل :

اختبار من طرف واحد :

بما أن $\bar{x}_3 = \bar{x}_4 = \bar{x}_5 = 0.1094$ ، $\Pr \{ 5 \text{ أو } 6 \text{ صور} \}$ ، فلا يمكن رفض H_0 عند مستوى 0.05 أو 0.01 .

اختبار من طرفين :

بما أن $2(\bar{x}_3) = 0.2188$ ، $\Pr \{ 5 \text{ أو } 6 \text{ صور} \}$ ، فلا يمكن رفض H_0 عند المستوى 0.05 أو 0.01 .

مسائل اضافية

اختبارات الاوساط والنسب باستخدام التوزيع الطبيعي :

١٠ - ٢٩ وعاء به كرات أما حمراء أو زرقاء . لاختبار فرض تساوى نسبة هذين اللونين قنا بسحب 64 كرة مع الإرجاع ، وتم ملاحظة لون الكرة وأخذنا القاعدة التالية في اتخاذ القرار

أقبل الفرض إذا كان عدد الكرات الحمراء المسحوبة بين 28 و 36 . ارفض الفرض فيما عد ذلك .

(أ) أوجد احتمال رفض الفرض عندما يكون بالفعل صحيح .

(ب) عبر بيانياً عن القاعدة السابقة في اتخاذ القرار وعن النتيجة التي حصلت عليها في (ب) .

ج : (أ) 0.2606

١٠ - ٣٠ (أ) ماهى القاعدة التي يجب أن تتبعها في اتخاذ القرار في المسألة ١٠ - ٢٩ إذا كان المطلوب أن يكون احتمال رفض الفرض عندما يكون بالفعل صحيح لا يتجاوز 0.01 على الأكثر . أى مستوى المعنوية 0.01 ؟

(ب) عند أى مستوى ثقة تقبل الفرض ؟

(ج) ماهى قاعدة اتخاذ القرار إذا حددنا مستوى المعنوية عند 0.05 ؟

ج : (أ) أقبل الفرض إذا كانت الكرات الحمراء المسحوبة بين 22 و 42 ، ارفض فيما عد ذلك .

(ب) 0.99

(ج) أقبل الفرض إذا كانت الكرات الحمراء المسحوبة بين 24 و 40 ، ارفض فيما عد ذلك .

١٠ - ٣١ افترض أننا نريد في المسألة ١٠ - ٢٩ اختبار الفرض أن هناك نسبة أكبر من الكرات الحمراء عن الكرات الزرقاء

(أ) ماهو فرض المدم الذي يجب أن تفرضه وما هو الفرض البديل ؟

(ب) هل يجب أن نستخدم اختباراً من طرف واحد أو اختباراً من طرفين ؟

p

p

0.05

(ج) ماهي قاعدة اتخاذ القرار التي سوف تتخذها إذا كان مستوى المعنوية هو 0.05 ؟

(د) ماهي قواعد اتخاذ القرار إذا كان مستوى المعنوية 0.01 ؟

ج : (أ) $H_0 : p = 0.5$ و $H_1 : p > 0.5$

(ب) اختبار من طرف واحد

(ج) ارفض H_0 إذا سجلت أكثر من 39 كرة حمراء ، اقبل الفرض فيما عدا ذلك (أو لاتتخذ أى قرار)

(د) ارفض H_0 إذا سجلت أكثر من 41 كرة حمراء ، اقبل الفرض فيما عدا ذلك (أو لاتتخذ أى قرار)

١٠ - ٣٢ قذفت زهرتين طاولة 100 مرة وسجل عدد المرات التي ظهر فيها مجموع « سبعة » ووجد أنه 23 مرة . اختبار الفرض أن الزهرتين غير متحيزتين ، باستخدام (أ) اختبار من طرفين (ب) اختبار من طرف واحد . مستخدماً مستوى معنوية 0.05 . ناقش الأسباب - إذا وجدت - لتفضيل أحد الاختبارين عن الآخر .

ج : (أ) لا يمكن رفض الفرض عند المستوى 0.05 .

(ب) يمكن رفض الفرض عند المستوى 0.05 .

١٠ - ٣٣ حل المسألة ١٠ - ٣٢ إذا كان مستوى المعنوية هو 0.01 .

ج : لا يمكن رفض الفرض عند المستوى 0.01 في أى من (أ) أو (ب)

١٠ - ٣٤ يدعى منتج أن 95% على الأقل من المعدات التي يمد بها مصنع مطابقة للمواصفات . تم اختبار عينة من 200 وحدة من المعدات ووجد أن بها 18 وحدة تالفة . اختبار ادعاء المنتج عند مستوى المعنوية

(أ) 0.01 (ب) 0.05

ج : يمكن رفض ادعائه عند كلا المستويين باستخدام اختبار من طرف واحد .

١٠ - ٣٥ نسبة الذين حصلوا على تقدير A's في مادة الطبيعة في إحدى الجامعات خلال فترة طويلة من الزمن كانت 10% .

خلال فصل دراسي معين حصل 40 طالباً على تقدير A من مجموعة من 300 طالب . اختبار معنوية هذه النتيجة عند المستوى (أ) 0.05 (ب) 0.01 .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد ، النتيجة معنوية عند المستوى 0.05 ولكن غير معنوية عند المستوى 0.01

١٠ - ٣٦ من التجربة وجد أن متوسط المقاومة للقطع لحزمة من الخيوط هو 9.72 N بانحراف معياري 1.40 N . في

الوقت الحاضر سجلت عينة من 36 حزمة من الخيوط وكان متوسط مقاومتها للقطع هو 8.93 N هل يمكن الاستنتاج عند مستوى معنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 بأن الخيوط أصبحت ذات جودة أقل ؟

ج : نعم ، عند كلا المستويين ، باستخدام اختبار من طرف واحد في كل حالة .

١٠ - ٣٧ في أحد الاختبارات التي أعطيت لعدد كبير من المدارس المختلفة ، كان متوسط الدرجات هو 74.5 والانحراف المعياري 8.0 . في مدرسة معينة حيث أدى 200 طالب هذا الامتحان ، كل متوسط درجاتهم 75.9 .

ناقش معنوية هذه النتيجة عند المستوى 0.05 من وجهة نظر :

(أ) الاختبار من طرف واحد (ب) الاختبار من طرفين ، وضع استنتاجاتك بدقة على ضوء هذه الاختبارات .

ج : النتيجة معنوية عند المستوى 0.05 في كل من الاختبارات من طرف واحد والاختبار من طرفين .

١٠ - ٣٨ حل المسألة ١٠ - ٣٧ إذا كان مستوى المعنوية هو 0.01 .

ج : النتيجة معنوية عند مستوى 0.01 إذا كان الاختبار من طرف واحد أما إذا كان الاختبار من طرفين فالنتيجة غير معنوية .

منحنيات توصيف العمليات :

١٠ - ٣٩ باستخدام المسألة ١٠ - ٣٩ ، أوجد احتمال قبول الفرض بأن هناك نسباً متساوية من الكرات الحمراء والكرات الزرقاء إذا كانت النسبة الفعلية للكرات الحمراء هي (أ) 0.6 (ب) 0.7 (ج) 0.8 (د) 0.9 (هـ) 0.3

ج : (أ) 0.3112 (ب) 0.0118 (ج) 0 (د) 0 (هـ) 0.0118 .

١٠ - ٤٠ مثل بيانياً نتائج المسألة السابقة وذلك برسم (أ) β مقابل p (ب) $(1 - \beta)$ مقابل p .

قارن هذه الأشكال بتلك الموضحة في المسألة ١٠ - ١٢ باعتبار أن مايقابل الكرات الحمراء والزرقاء هي الصور والكتابة على الترتيب .

١٠ - ٤١ (أ) حل المسائل ١٠ - ١٣ و ١٠ - ١٤ إذا اتفق على اختبار 400 كابل (ب) ماهي الاستنتاجات التي تصل إليها فيما يختص بالخطأ من النوع الثاني عندما تكبر حجم العينة ؟

١٠ - ٤٢ كون (أ) منحنى OC (ب) منحنى قوة الاختبار المقابل للمسألة ١٠ - ٣٩ . قارن هذه المنحنيات بمنحنيات المسألة ١٠ - ١٤ .

خرائط الرقابة على الإنتاج :

١٠ - ٤٣ إذا كان من المعروف في الماضي أن نوعاً معيناً من الخيوط من إنتاج أحد المصانع متوسط قوة مقاومته للقطع هو 8.64 N بانحراف معياري 1.28 N .

لتحديد ما إذا كان الإنتاج يتم طبقاً للمواصفات ، أخذ عينة من 16 قطعة .

فرض

مستوى

وحدة :

10%

النتيجة

0.01

١ . في

لاستنتاج

أوجد (أ) 99.73% أو 3σ (ب) 99% (ج) 95%
 حدود مراقبة في خرائط الرقابة على الإنتاج . ووضح تطبيقاتها .

ج : (أ) 6

(ب) 4 مسامير ثالثة

١٠ - ٤٤ متوسط نسبة الإنتاج التالف في مصنع لإنتاج المسامير هو 3% . للمحافظة على هذا المستوى في الأداء ، تسحب عينة حجمها 200 مسامير من المسامير المنتجة كل 4 ساعات ويتم اختبارها . أوجد (أ) 99%
 (ب) 95% ، حدود المراقبة لعدد المسامير الثالفة في كل عينة . لاحظ أننا نحتاج في هذه الحالة إلى حد المراقبة الأعلى فقط

ج : حد المراقبة الأعلى هو على الترتيب (أ) 6 (ب) 4 مسامير ثالثة

اختبارا تتضمن الفروق بين المتوسطات والتنسب :

١٠ - ٤٥ عينة مكونة من 100 لمبة كهربائية من إنتاج المصنع A ، كان متوسط عمرها الإنتاجي 1190 ساعة وانحرافها المعياري 90 ساعة . عينة أخرى من 75 لمبة من إنتاج مصنع B كان متوسط عمرها الإنتاجي 1230 ساعة وانحرافها المعياري 120 ساعة . هل هناك فرق معنوي بين متوسط الأعمار الإنتاجية للتوعين عند مستوى المعنوية
 (أ) 0.05 (ب) 0.01 ؟

ج : (أ) نعم (ب) لا .

١٠ - ٤٦ في المسألة السابقة اختبر الفرض أن لمبات المصنع B أكثر جودة من لمبات المصنع A باستخدام مستوى المعنوية
 (أ) 0.05 (ب) 0.01

اشرح الفرق بين هذا الاختبار والاختبار في المسألة السابقة . هل النتيجة تناقض نتيجة المسألة السابقة .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد لكل من مستويات المعنوية يظهر أن النوع B أكثر جودة من A .

١٠ - ٤٧ في اختبار مبادىء الهجاء ، كان متوسط درجات 32 ولد هو 72 بانحراف معياري 8 ، بينما متوسط درجات 36 بنت هو 75 بانحراف معياري 6 . اختبر الفرض عند (أ) 0.05 (ب) 0.01 مستوى معنوية بأن البنات أفضل في الهجاء من الأولاد .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد نجد أن الفروق معنوية عند مستوى 0.05 ولكن غير معنوية عند مستوى 0.01 .

١٠ - ٤٨ : اختبار تأثير نوع جديد من الإسمدة على إنتاج القمح ، قسمت قطعة أرض إلى 60 مربع متساوي المساحة ، كل قطعة لها نفس المواصفات مثل نوع التربة ومقدار ترمضها للشمس وغير ذلك . استخدم السباد الجديد في 30 قطعة والسباد القديم في القطعة الباقية . كان متوسط الحزم من القمح التي تم حصادها لكل مربع من الأرض التي استخدم فيها السباد الجديد هو 18.2 لتر بانحراف معياري 0.63 لتر . والمتوسط المقابل للمربعات التي استخدم فيها السباد القديم هو 17.8 لتر بانحراف معياري 0.54 باستخدام مستوى المنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 . اختبر الفرض بأن السباد الجديد أفضل من السباد القديم .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد نجد أن السباد الجديد أفضل من السباد القديم عند كل من مستويات المنوية .

١٠ - ٤٩ : عينة عشوائية من 200 مسمار من إنتاج A و 100 مسامير من إنتاج B وجد أن 19 مسمار من إنتاج A و 5 مسامير من إنتاج B تالف . اختبر الفرض القائل أن

(أ) هناك اختلاف في أداء الماكينتين .

(ب) الماكينة B تعمل بصورة أفضل من الماكينة A .

استخدم مستوى المنوية 0.05 .

ج : (أ) يظهر الاختبار من طرفين بأنه لا يوجد اختلاف في أداء الماكينتين عند المستوى 0.05 .

(ب) اختبار من طرف واحد يظهر أن B لا تعمل بصورة أفضل من A عند المستوى 0.05 .

١٠ - ٥٠ : وعاءان A و B ، يحتويان على عدد متساو من الكرات ، ولكن نسبة الكرات الحمراء في كل منها مختلف . سميت عينة حجمها 50 كرة مع الإرجاع من كل من الوعائين ، وقد ظهر بها 32 كرة حمراء من الوعاء A و 23 . كرة حمراء من الوعاء B باستخدام مستوى المنوية 0.05 ، اختبر الفرض القائل أن (أ) الوعاء أن يحتويان على نسب متساوية من الكرات الحمراء (ب) A يحتوي على نسبة أكبر من الكرات الحمراء عن B .

ج : (أ) اختبار من طرفين عند مستوى المنوية 0.05 يفشل في رفض فرض تساوي النسب

(ب) اختبار من طرف واحد عند المستوى 0.05 يدل على أن A يحتوي على نسبة أكبر من الكرات الحمراء عن B .

اختبارات تتضمن توزيعات ذي الحدين :

١٠ - ٥١ : بالرجوع إلى المسألة ١٠ - ٢٣ ، أوجد أقل عدد من الأسئلة يجب أن يجيب عليها الطالب إجابة صحيحة قبل أن يكون المدرس متأكداً بأن الطالب لا ينجح الإجابة تقريباً وذلك عند مستوى معنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 (ج) 0.001 (د) 0.06 . ناقش النتائج .

ج : (أ) 9 (ب) 10 (ج) 10 (د) 8

١٠ - ٥٢ : كون الأشكال البيانية كالتالي تمت في المسألة ١٠ - ٠١ لبيانات المسألة ١٠ - ٢١

١٠ - ٥٣ : حل المسائل ١٠ - ٢٣ إلى ١٠ - ٢٥ إذا استبدلت 7 في قاعدة اتخاذ القرار في المسألة ١٠ - ٢٣ إلى 8 .

١٠ - ٥٤ قلقت عملة 8 مرات فأظهرت الصورة 7 مرات . هل يمكن رفض الفرض بأن العملة غير متحيزة عند مستوى المنوية
(أ) 0.05 (ب) 0.10 (ج) 0.01 ؟

استخدم اختبار من طرفين .

ج : (أ) لا (ب) نعم (ج) لا

١٠ - ٥٥ حل المسألة ١٠ - ٥٤ إذا استخدمنا اختباراً من طرف واحد .

ج : (أ) نعم (ب) نعم (ج) لا

١٠ - ٥٦ حل المسألة ١٠ - ٥٤ إذا أظهرت العملة الصورة 8 مرات .

ج : (أ) نعم (ب) نعم (ج) نعم

١٠ - ٥٧ حل المسألة ١٠ - ٥٤ إذا أظهرت العملة الصورة 6 مرات .

ج : (أ) لا (ب) لا (ج) لا

١٠ - ٥٨ وعاء يحتوى على عدد كبير من الكرات الحمراء والبيضاء . بحيث عينة عشوائية من 8 كرات وأظهرت 6 كرات
بيضاء و 2 كرة حمراء . باستخدام اختبار ومستوى معنوية مناسبين ، ناقش نسب الكرات البيضاء
والحمراء الوعاء .

١٠ - ٥٩ ناقش كيف يمكن استخدام نظرية المعاينة في استقصاء نسب أنواع السمك الموجود في بحيرة .

الفصل الحادى عشر

نظرية العينات الصغيرة

توزيع « استودينت » ت
وتوزيع كا - تربيع (كا^٢)

العينات الصغيرة :

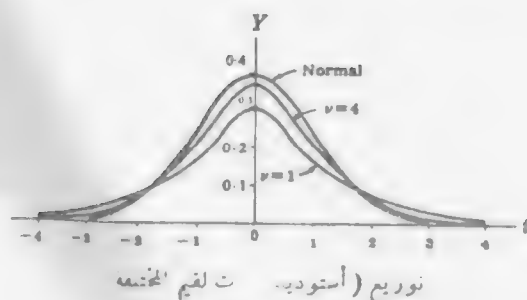
فى الفصول السابقة استخدمنا الحقيقة أنه إذا كان حجم العينة $N > 30$ ، وتسمى بالعينات ذات الحجم الكبير ، فإن توزيع المعاينة لكثير من الإحصائيات سيكون تقريباً كالتوزيع الطبقى ، وتزداد جودة التقريب كلما زادت N . للعينات ذات الحجم $N < 30$ ، وتسمى بالعينات الصغيرة . فإن هذا التقريب غير جيد ويزداد سوءاً كلما صغرت قيمة N ، بحيث يكون من الضرورى إدخال التعديلات الملائمة . تسمى دراسة توزيعات المعاينة للإحصائيات للعينات الصغيرة نظرية العينات الصغيرة . وبصورة أكثر دقة نظرية العينات الدقيقة ، نظراً لأن النتائج التى نحصل عليها تنطبق فى حالة العينات الكبيرة كما فى العينات الصغيرة . فى هذا الفصل سنقوم بدراسة توزيعين مهمين هما توزيع « استودينت » ت ، توزيع كا - تربيع (كا^٢) .

توزيع « استودينت » ت :

عرف الإحصائية

$$(١) \quad t = \frac{\bar{X} - \mu}{s} \sqrt{N-1} = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{N}}$$

والتي تقابل الإحصائية z المعرفة $z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}}$ (أنظر صفحة ٢٧٠)



شكل ١ - ١

إذا أخذنا فى الاعتبار عينات حجمها N مأخوذة من مجتمع يتوزع توزيعاً طبيعياً (أو يقترب من التوزيع الطبقى) متوسطة μ وإذا حسبنا لكل عينة t ، باستخدام الوسط الحسابى للعينة \bar{X} والانحراف المعياري للعينة s أو σ فإنه يمكننا الحصول على توزيع المعاينة للأحصائية t . هذا التوزيع (أنظر الشكل ١١ - ١) يعرف كالتالى :

$$(٢) \quad Y = \frac{Y_0}{\left(1 + \frac{t^2}{N-1}\right)^{N/2}} = \frac{Y_0}{\left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{(v+1)/2}}$$

حيث Y_0 مقدار ثابت يعتمد على N بحيث يجعل المساحة تحت المنحنى مساوية للواحد ، وحيث الثابت $v = (N - 1)$ يسمى عدد درجات الحرية (v هو الحرف اليونانى « نيو ») . لتعريف درجات الحرية ، أنظر صفحة ٣٠٧ .

التوزيع (٢) يسمى توزيع « أستودينت » ت عقب اكتشافه بواسطة جوست ، والذي نشر أعماله فى الجزء الأول من القرن العشرين تحت الاسم المستعار « أستودينت » .

لقيم v أو N الكبيرة (بالتأكيد لقيم $N \geq 30$) المنحنيات (٢) تعد تقريباً لمنحنى التوزيع الطبيعى المعيارى $Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$: كما هو موضح بالشكل ١١ - ١ .

فترات الثقة :

كما شرحنا بالنسبة للتوزيع الطبيعى فى الفصل التاسع ، يمكن أن نعرف 95% و 99% أو غير ذلك من فترات الثقة باستخدام جدول توزيع t فى الملحق ، صفحة ٥٣٤ . بهذه الطريقة يمكن تقدير داخل حدود ثقة معينة متوسط المجتمع μ .

على سبيل المثال ، إذا كانت $t_{0.975} -$ و $t_{0.975}$ هى قيم t التى تجعل 2.5% من المساحة تقع فى كل طرف من طرفى توزيع t فإن 95% فترة ثقة لـ μ هى :

$$(٢) \quad -t_{0.975} < \frac{\bar{X} - \mu}{s} \sqrt{N-1} < t_{0.975}$$

ومنها نرى أنه من المقدّر أن تقع μ فى الفترة

$$(٤) \quad \bar{X} - t_{0.975} \frac{s}{\sqrt{N-1}} < \mu < \bar{X} + t_{0.975} \frac{s}{\sqrt{N-1}}$$

بدرجة ثقة 95% (أى احتمال 0.95) . لاحظ أن $t_{0.975}$ تمثل قيمة المئين الذى رتبته 97.5 ، بينما $t_{0.025} = -t_{0.975}$ تمثل قيمة المئين الذى رتبته 2.5 .

وبشكل عام ، يمكن تمثيل حدود الثقة لمتوسطات المجتمع كالآتى :

$$(٥) \quad \bar{X} \pm t_c \frac{s}{\sqrt{N-1}}$$

حيث القيم $t_c \pm$ ، تسمى بالقيم الحرجة أو معاملات الثقة ، وتعتمد على مستوى الثقة المرغوب فيه وحجم العينة . ويمكن الحصول عليها من الجدول فى صفحة ٥٣٤ .

بما أن $3 = 4 - 1 = \nu$ فإن $\chi^2_{0.95} = 7.81$ ، فإننا نصل إلى نفس الاستنتاج السابق . ومن سوء الحظ أن تقريب χ^2 للتكرارات الصغيرة غير جيد ، ولهذا لا ننصح بضم التكرارات معاً في هذه الحالة ولكن يجب أن نلجأ لطرق الاحتمال الدقيقة المذكورة في الفصل السادس .

١٢ - ٨ في 360 رمية لزهرتين طاولة « ظهر ما مجموعه « سبعة » 74 مرة وما مجموعه « إحدى عشر » 24 مرة باستخدام مستوى المعنوية 0.05 ، اختبر الفرض أن الزهرتين غير متحيزتان .

الحل :

عدد الطرق التي تظهر بها زهرتان هو 36 طريقة . ما مجموعه « سبعة » يمكن أن تحدث بـ 6 طرق ، ما مجموعه « إحدى عشر » يمكن أن تحدث بطريقتين .

إذن $\Pr\{\text{إحدى عشر}\} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ ، $\Pr\{\text{سبعة}\} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ ، هذا فإننا نتوقع $\frac{1}{6}(360) = 60$ « سبعة » و $\frac{1}{18}(360) = 20$ « إحدى عشر » بحيث

$$\chi^2 = \frac{(74 - 60)^2}{60} + \frac{(24 - 20)^2}{20} = 4.07$$

بما أن $\nu = 2 - 1 = 1$ فإن $\chi^2_{0.95} = 3.84$. إذن بما أن $4.07 > 3.84$ فإننا نميل إلى رفض الفرض بأن الزهر غير متحيز . باستخدام تصحيح ييتس ، فإننا نجد :

$$\chi^2 (\text{المصحح}) = \frac{(74 - 60 - 0.5)^2}{60} + \frac{(24 - 20 - 0.5)^2}{20} = \frac{(13.5)^2}{60} + \frac{(3.5)^2}{20} = 3.65$$

هذا فإنه على أساس استخدام χ^2 المصحح ، فإننا لن نرفض الفرض عند مستوى المعنوية 0.05 .

وبشكل عام فإنه في حالة العينات ذات الحجم الكبير كما هو الحال في هذه المسألة ، فإن استخدام تصحيح ييتس أظهر أنه أكثر مأمونية من النتائج غير المصححة . وعلى أية حال ، فيما أن قيمة χ^2 المصححة تقع قرب القيمة الحرجة ، فإننا نتردد في اتخاذ القرار في أي اتجاه . في مثل هذه الحالات قد يكون من الأفضل زيادة حجم العينة بأخذ قراءات أكثر إذا كنا نرغب في الاحتفاظ بمستوى المعنوية 0.05 لسبب من الأسباب . بخلاف ذلك فيمكن رفض الفرض عند مستوى آخر (مثل 0.10) إذا كان ذلك مقبولا .

١٢ - ٩ في بحث شمل 320 أسرة بكل منها 5 أطفال أظهر التوزيع الموضح بالجدول ١٢ - ٣ . هل هذه النتيجة متفقة مع الفرض القائل أن ميلاد الذكور والإناث متساويين في الاحتمال ؟

جدول ١٢ - ٣

عدد الأولاد والبنات	5 أولاد 0 بنات	4 أولاد 1 بنات	3 أولاد 2 بنات	2 أولاد 3 بنات	1 ولد 4 بنات	0 ولد 1 بنات	الإجمالي
عدد الأسر	18	56	110	88	40	8	320

مة χ^2

صل على

الحل :

اعتبر أن p هو احتمال ميلاد ذكر ، $q = 1 - p$ هو احتمال ميلاد أنثى . هذا فإن احتمالات (5 أولاد) ،
(4 أولاد و بنت) ، ، (5 بنات) نحصل عليها من حدود مفكوك ذي الحدين

$$(p + q)^5 = p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5pq^4 + q^5$$

إذا كانت $p = q = 1/2$ فإن :

$$\begin{aligned} \Pr\{2 \text{ ولد ، 3 بنات}\} &= 10\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32} & \Pr\{5 \text{ أولاد ، صفر بنت}\} &= \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \\ \Pr\{4 \text{ أولاد ، بنت}\} &= 5\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{32} & \Pr\{3 \text{ أولاد ، 2 بنت}\} &= 10\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32} \\ \Pr\{3 \text{ أولاد ، 2 بنت}\} &= 10\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32} & \Pr\{2 \text{ ولد ، 3 بنات}\} &= 10\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32} \end{aligned}$$

بهذا فإن عدد الأسر التي بها 0, 1, 2, 3, 4, 5 ولد نحصل عليها بضرب الاحتمالات السابقة في عدد الأسر 320
والنتيجة هي 10, 50, 100, 100, 50, 10 . وبهذا فإن

$$\chi^2 = \frac{(18 - 10)^2}{10} + \frac{(56 - 50)^2}{50} + \frac{(110 - 100)^2}{100} + \frac{(88 - 100)^2}{100} + \frac{(40 - 50)^2}{50} + \frac{(8 - 10)^2}{10} = 12.0$$

وبما أن $\chi_{0.05}^2 = 11.1$ و $\chi_{0.05}^2 = 15.1$ لدرجات حرية $5 = 6 - 1$ ، فيمكن
رفض الفرض عند مستوى المعنوية 0.05 ولكن لا يمكن رفضه عند المستوى 0.01 . من هذا ننهي إلى أن
النتيجة محتملة المعنوية ، وأن ميلاد الذكور والإناث ليسا متساويين الاحتمال .

١٢ - ١٠ بين أن اختبار كا - تربيع المتضمن تصنيفين يكافئ اختبار المعنوية في صفحة ٢٧٢ ، الفصل العاشر .

الحل :

	I	II	الإجمالي
التكرار المشاهد	NP	$N(1 - P)$	N
التكرار المتوقع	Np	$N(1 - p) = Nq$	N

إذا كانت P هي نسبة العينة في المجموعة I

و p هي نسبة المجتمع و N هي إجمال

التكرارات ، فإنه يمكن توضيح الوضع

باستخدام الجدول المرفق . بالتعريف

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(NP - Np)^2}{Np} + \frac{[N(1 - P) - N(1 - p)]^2}{Nq} \\ &= \frac{N^2(P - p)^2}{Np} + \frac{N^2(P - p)^2}{Nq} = N(P - p)^2\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{N(P - p)^2}{pq} = \frac{(P - p)^2}{pq/N} \end{aligned}$$

وهو مربع الإحصائية z في الصفحة ٢٧٢

$$\chi^2 = \sum \frac{o_j^2}{e_j} - N.$$

١١-١٢ (أ) أثبت أن الصيغة (١) ، في صفحة ٢٢٣ ، يمكن كتابتها

(ب) استخدم نتيجة (أ) لإثبات قيمة χ^2 المحسوبة في المسألة ١٢ - ٦ .

الحل :

(أ) بالتعريف

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j} = \sum \left(\frac{o_j^2 - 2o_j e_j + e_j^2}{e_j} \right) \\ &= \sum \frac{o_j^2}{e_j} - 2 \sum o_j + \sum e_j = \sum \frac{o_j^2}{e_j} - 2N + N = \sum \frac{o_j^2}{e_j} - N \end{aligned}$$

حيث استخدمنا النتيجة (٢) في صفحة ٢٢٣

$$\chi^2 = \sum \frac{o_j^2}{e_j} - N = \frac{(315)^2}{312.75} + \frac{(108)^2}{104.25} + \frac{(101)^2}{104.25} + \frac{(32)^2}{34.75} - 556 = 0.470 \quad (\text{ب})$$

جودة التوفيق :

١٢-١٢ استخدم اختبار كا - مربع لتحديد مدى جودة توفيق البيانات بالمسألة ١٧ - ٣١ ، الفصل السابع .

الحل :

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(38 - 33.2)^2}{33.2} + \frac{(144 - 161.9)^2}{161.9} + \frac{(342 - 316.2)^2}{316.2} + \frac{(287 - 308.7)^2}{308.7} + \frac{(164 - 150.7)^2}{150.7} + \frac{(25 - 29.4)^2}{29.4} \\ &= 7.54. \end{aligned}$$

بما أن عدد المعالم المستخدمة في تقدير التكرارات المتوقعة هي $m = 1$ (بالتحديد المعنونة p لتوزيع

$$v = k - 1 - m = 6 - 1 - 1 = 4 , \quad \text{في الحدين (،$$

$$v = 4 , \quad \chi_{0.95}^2 = 9.49 . \quad \text{وبهذا فإن التوفيق جيد}$$

$$v = 4 , \quad \chi_{0.05}^2 = 0.711 , \quad \text{بما أن } \chi^2 = 7.54 > 0.711 , \quad \text{فإن التوفيق ليس على درجة عالية}$$

جداً من الدقة .

١٣-١٢ حدد مدى جودة توفيق بيانات المسألة ٧ - ٣٣ بالمسألة ٧ - ٣٣ ، الفصل السابع .

الحل :

$$\chi^2 = \frac{(5 - 4.13)^2}{4.13} + \frac{(18 - 20.68)^2}{20.68} + \frac{(42 - 38.92)^2}{38.92} + \frac{(27 - 27.71)^2}{27.71} + \frac{(8 - 7.43)^2}{7.43} = 0.959$$

بما أن عدد المعالم المستخدمة في تقدير التكرارات المتوقعة هي $m = 2$ (بالتحديد المتوسط μ والانحراف

$$v = k - 1 - m = 5 - 1 - 2 = 2 , \quad \text{المعياري } \sigma \text{ للتوزيع الطبيعي (،$$

$$v = 2 , \quad \chi_{0.95}^2 = 5.99 . \quad \text{وبهذا نستنتج بأن توفيق البيانات جيد جداً}$$

$$v = 2 , \quad \chi_{0.05}^2 = 0.103 . \quad \text{إذن } \chi^2 = 0.959 > 0.103 , \quad \text{فإن التوفيق ليس على درجة كبيرة من الجودة .}$$

جداول الاقتران :

١٤-١٢ حل المسألة ١٠-٢٠ ، الفصل العاشر ، باستخدام اختبار كا - مربع .

الحل .

يوضح الجدول ١٢ - ٤ بيانات المسألة . (أ) تحت فرض العدم H_0 بأن المصل ليس له تأثير ، فإننا نتوقع 70 شخصاً في كل مجموعة سوف يشفوا من المرض و 30 شخصاً لن يشفوا ، كما هو موضح بالجدول ١٢ - ٤ (ب) . لاحظ أن H_0 يكافئ القول بأن الشفاء مستقل عن المصل ، أي أن التقسيمات مستقلة عن بعضها .

جدول ١٢ - ٤ (أ) التكرار المشاهد

جدول ١٢ - ٤ (ب) التكرارات المتوقعة تحت H_0

المجموعة A			المجموعة B		
استخدمت المصل			لم تستخدم المصل		
شفوا	لم يشفوا	المجموع	شفوا	لم يشفوا	المجموع
70	30	100	70	30	100
70	30	100	70	30	100
140	60	200	140	60	200

$$\chi^2 = \frac{(75-70)^2}{70} + \frac{(65-70)^2}{70} + \frac{(25-30)^2}{30} + \frac{(35-30)^2}{30} = 2.38$$

جدول ١٢ - ٥

المجموعة A			المجموعة B		
شفوا			لم يشفوا		
100			100		
110			110		
200	60	140	200	60	140

لتحديد عدد درجات الحرية ، اعتبر الجدول

١٢ - ٥ وهو يمثل الجداول أعلاه فيما عدا أن المجاميع فقط هي المذكورة . من الواضح أن لنا الحرية في وضع رقم واحد في أي من الخلايا الشاغرة ، وبما أنه إذا تم ذلك فإن الخلايا الباقية ستحدد بصورة وحيدة من المجاميع الموضحة . هذا فإنه توجد درجة حرية واحدة .

طريقة أخرى : بالصيغة (أنظر المسألة ١٢-١٨) . $v = (h-1)(k-1) = (2-1)(2-1) = 1$.

بما أن $\chi^2_{0.95} = 3.84$ لدرجة حرية واحدة . وبما أن $2.38 < 3.84$ ، فإننا نستنتج أن النتائج غير معنوية عند المستوى 0.05 . هذا نكون غير قادرين على رفض H_0 عند هذا المستوى ونستنتج من هذا أن المصل إما أن يكون غير فعال أو نؤجل الحكم لحين إجراء اختبارات أكثر .

لاحظ أن $\chi^2 = 2.38$ هو مربع قيمة $z = 1.54$ ، التي حصلنا عليها في المسألة ١٠ - ٢٠ بالفصل العاشر . وبشكل عام فإن اختبار كا - مربع المتضمن نسب العينات في جدول اقتران 2×2 مكافئ لاختبار ممنوية الفروق بين النسب باستخدام التوزيع الطبيعي كتقريب .

لاحظ كذلك أن اختبار χ^2 من طرف واحد يكافئ اختبار من طرفين باستخدام χ ، على سبيل المثال $\chi^2 > \chi_{0.95}$ تقابل $(\chi > \chi_{0.95})$ أو $(\chi < -\chi_{0.95})$. وبما أنه في جداول 2×2 ، فإن χ^2 هو مربع قيم z ، ينتج عن ذلك أن χ مثل z لهذه الحالة . بهذا فإن رفض الفرض عند المستوى 0.05 باستخدام χ^2 تكافئ الرفض في اختبار من طرف واحد عند المستوى 0.10 باستخدام z .

١٢ - ١٥ حل المسألة السابقة باستخدام تصحيح بيتس .

الحل :

$$\chi^2(\text{مصحح}) = \frac{(75 - 70 - 0.5)^2}{70} + \frac{(65 - 70 - 0.5)^2}{70} + \frac{(25 - 30 - 0.5)^2}{30} + \frac{(35 - 30 - 0.5)^2}{30} = 1.93$$

وبهذا فإن الاستنتاج الذي وصلنا إليه في المسألة السابقة مازال صحيحاً ويمكن التحقق من ذلك بملاحظة أن تصحيح بيتس يؤدي إلى خفض في قيمة χ^2 .

١٢ - ١٦ الجدول ١٢ - ٦ يوضح عدد الطلبة الذين نجحوا

وعدد الطلبة الذين رسبوا عند كل من المحاضرين :

Mr. X و **Mr. Y** و **Mr. Z** اختبر الفرض

بأن نسبة الطلبة الراسبين الثلاثة متساوية .

الحل :

تحت الفرض H_0 بأن نسب الطلبة الراسبين عند

المحاضرين الثلاثة متساوية فإنها تكون $15\% = 27/180$

وبهذا يكون 85% من الطلبة ناجحين . في هذه

الحالة فإن **Mr. X** على سبيل المثال ، يجب أن يرسم عنده 15% من 55 طالباً وينجح 85% من 55 طالباً. التكرارات

المتوقعة تحت N_0 موضحة بالجدول ١٢ - ٧

جدول ١٢ - ٦
التكرارات المشاهدة

المجموع **Mr. Z** **Mr. Y** **Mr. X**

50	47	56	153
5	14	8	27
55	61	64	180

نجح

رسم

المجموع

جدول ١٢ - ٨

المجموع **Mr. Z** **Mr. Y** **Mr. X**

153	85% of 55 = 46.75	85% of 61 = 51.85	85% of 64 = 54.40
27	15% of 55 = 8.25	15% of 61 = 9.15	15% of 64 = 9.60
180	64	61	55

٢٢ - الإحصاء

جدول ١٢ - ٧ التكرارات المتوقعة تحت H_0

المجموع **Mr. X** **Mr. Y** **Mr. Z**

153			
27			
180	55	61	64

نجح

رسم

المجموع

موج
100
110
200

$v =$
يج أن
ن هذا

٢٠ -
اختبار

إذن

$$\chi^2 = \frac{(50 - 46.75)^2}{46.75} + \frac{(47 - 51.85)^2}{51.85} + \frac{(56 - 54.40)^2}{54.40} + \frac{(5 - 8.25)^2}{8.25} + \frac{(14 - 9.15)^2}{9.15} + \frac{(8 - 9.60)^2}{9.60} = 4.84$$

لتحديد عدد درجات الحرية ، اعتبر الجدول ١٢ - ٨ وهو يمثل الجدول المعطاة أعلاه فيما عدا أن المجاميع فقط هي المذكورة . من الواضح أن لنا الحرية في وضع رقم واحد في خلية شاغرة في العمود الأول ورقم واحد في خلية شاغرة في العمود الثاني أو الثالث ، وبعد ذلك فإن جميع الأرقام في الخلايا الباقية تتحدد تماماً من المجاميع الموضحة . أى أن هناك درجتى حرية في هذه المسألة .

$$\nu = (h - 1)(k - 1) = (2 - 1)(3 - 1) = 2 \quad \text{طريقة أخرى : بالصيغة}$$

بما أن $\chi_{0.95}^2 = 5.99$ ، فلا يمكن رفض H_0 عند مستوى 0.05 . لاحظ ، بما أن $\chi_{0.90}^2 = 4.61$ فإنه يمكن رفض H_0 عند مستوى 0.10 إذا كنا على استعداد تحمل مخاطرة أن نكون مخطئين مرة واحدة في كل 10 مرات .

١٢-١٧ استخدم الصيغة (٩) ، صفحة ٣٢٧ ، لحساب قيمة χ^2 بالمسألة السابقة .

الحل :

$$\begin{aligned} & \text{بما أن } a_1 = 50, a_2 = 47, a_3 = 56, b_1 = 5, b_2 = 14, b_3 = 8, N_A = a_1 + a_2 + a_3 = 153, N_B = b_1 + b_2 + b_3 \\ & = 27, N_1 = a_1 + b_1 = 55, N_2 = a_2 + b_2 = 61, N_3 = a_3 + b_3 = 64, N = N_A + N_B = N_1 + N_2 + N_3 = 180 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{N}{N_A} \left[\frac{a_1^2}{N_1} + \frac{a_2^2}{N_2} + \frac{a_3^2}{N_3} \right] + \frac{N}{N_B} \left[\frac{b_1^2}{N_1} + \frac{b_2^2}{N_2} + \frac{b_3^2}{N_3} \right] - N \quad \text{فإن} \\ &= \frac{180}{153} \left[\frac{(50)^2}{55} + \frac{(47)^2}{61} + \frac{(56)^2}{64} \right] + \frac{180}{27} \left[\frac{(5)^2}{55} + \frac{(14)^2}{61} + \frac{(8)^2}{64} \right] - 180 = 4.84 \end{aligned}$$

١٢-١٨ وضع أنه في جداول الاقتران $h \times k$ فإن عدد درجات الحرية هي $(h-1) \times (k-1)$ حيث $h > 1, k > 1$

الحل :

في جدول به h صف و k عمود ، يمكن ترك رقم واحد في كل صف وفي كل عمود حيث أن هذه الأرقام من السهل معرفة قيمتها من معرفة مجاميع كل صف وكل عمود . يتوجب على ذلك أن لنا الحرية في وضع $(h-1)(k-1)$ رقم في الجدول ، أما الأرقام الباقية فتتحدد تلقائياً وبصورة وحيدة . وهذا فإن عدد درجات الحرية هي $(h-1)(k-1)$. لاحظ أن هذه النتيجة صحيحة على أساس أن معالم المجتمع المطلوبة للحصول على التكرارات المتوقعة معلومة .

١٢ - ١٩ أثبت أنه في جدول الاقتران 2×2 الموضحة بالجدول ١٢ - ٩ (أ)

$$\chi^2 = \frac{N(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{N_1N_2N_AN_B}$$

(ب) مثل النتائج في (أ) باستخدام بيانات المسألة ١٢ - ١٤ .

جدول ١٢ - ٩ (ب) النتائج المتوقعة

	II	I	
المجموع			
A	N_1N_A/N	N_2N_A/N	N_A
B	N_1N_B/N	N_2N_B/N	N_B
المجموع	N_1	N_2	N

جدول ١٢ - ٩ (أ) النتائج المشاهدة

	II	I	
المجموع			
A	a_1	a_2	N_A
B	b_1	b_2	N_B
المجموع	N_1	N_2	N

الحل :

كما في المسألة ١٢ - ١٤ ، فإن النتائج المتوقعة تحت فرض العدم موضحة بالجدول ١٢ - ٩ (ب) . إذن

$$\chi^2 = \frac{(a_1 - N_1N_A/N)^2}{N_1N_A/N} + \frac{(a_2 - N_2N_A/N)^2}{N_2N_A/N} + \frac{(b_1 - N_1N_B/N)^2}{N_1N_B/N} + \frac{(b_2 - N_2N_B/N)^2}{N_2N_B/N}$$

$$a_1 - \frac{N_1N_A}{N} = a_1 - \frac{(a_1 + b_1)(a_1 + a_2)}{a_1 + b_1 + a_2 + b_2} = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{N}$$

كذلك فإن $(a_2 - \frac{N_2N_A}{N})$ ، $(b_1 - \frac{N_1N_B}{N})$ ، and $(b_2 - \frac{N_2N_B}{N})$ تساوي أيضاً $(\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{N})$

وبهذا يمكن أن نكتب

$$\chi^2 = \frac{N}{N_1N_A} \left(\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{N} \right)^2 + \frac{N}{N_2N_A} \left(\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{N} \right)^2 + \frac{N}{N_1N_B} \left(\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{N} \right)^2 + \frac{N}{N_2N_B} \left(\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{N} \right)^2$$

$$\chi^2 = \frac{N(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{N_1N_2N_AN_B}$$

في المسألة ١٢ - ١٤ ،

$$a_1 = 75, a_2 = 25, b_1 = 65, b_2 = 35, N_1 = 140, N_2 = 60, N_A = 100, N_B = 100, \text{ and } N = 200$$

إذن ، وكما حصلنا عليه قبل ذلك ،

$$\chi^2 = \frac{200((75)(35) - (25)(65))^2}{(140)(60)(100)(100)} = 2.38$$

$\chi^2 =$

فقط

ساغرة

هناك

$\chi^2_{0.90}$

بل 10

با أن
= 27,

$h >$

لأرقام

وضع

الحرية

ارات

باستخدام معامل تصحيح بيرس ، فإن النتيجة مثل تلك التي بالمسألة ١٢ - ١٥

$$\chi^2(\text{المصحح}) = \frac{N(a_1b_2 - a_2b_1 - \frac{1}{2}N)^2}{N_1N_2N_AN_B} = \frac{200[(75)(85) - (25)(65) - 100]^2}{(140)(60)(100)(100)} = 1.93$$

١٢ - ٢٠ أثبت أن اختباراً كا - تربيع المتضمن نسب عينتين يكافئ اختبار منوية الفروق بين النسب باستخدام التوزيع الطبيعي كتقريب (أنظر صفحة ٢٧٢) .

الحل :

اعتبر P_1 ، P_2 يرمزان إلى نسب العينتين و p إلى نسبة المجتمع . بالرجوع إلى المسألة ١٢ - ١٩ ،

نجد أن

$$P_1 = a_1/N_1, \quad P_2 = a_2/N_2, \quad 1 - P_1 = b_1/N_1, \quad 1 - P_2 = b_2/N_2 \quad (١)$$

$$p = N_A/N, \quad 1 - p = q = N_B/N \quad (٢)$$

بحيث

$$a_1 = N_1P_1, \quad a_2 = N_2P_2, \quad b_1 = N_1(1 - P_1), \quad b_2 = N_2(1 - P_2) \quad (٣)$$

$$N_A = Np, \quad N_B = Nq \quad (٤)$$

باستخدام (٣) و (٤) ، نجد من المسألة ١٢ - ١٩ ،

$$\begin{aligned} \chi^2 (N = N_1 + N_2) &= \frac{N(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{N_1N_2N_AN_B} = \frac{N[N_1P_1N_2(1 - P_2) - N_2P_2N_1(1 - P_1)]^2}{N_1N_2NpNq} \\ &= \frac{N_1N_2(P_1 - P_2)^2}{Npq} = \frac{(P_1 - P_2)^2}{pq(1/N_1 + 1/N_2)} \quad (\text{since } N = N_1 + N_2) \end{aligned}$$

وهو مربع الإحصائية المطاة في صفحة ٢٧٢

معامل الاقتران :

١٢ - ٢١ أوجد معامل الاقتران لبيانات جدول الاقتران بالمسألة ١٢ - ١٤

الحل :

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + N}} = \sqrt{\frac{2.38}{2.38 + 200}} = \sqrt{0.01176} = 0.1084$$

١٢-٢٢ أوجد أكبر قيمة لـ C لجدول 2×2 بالمسألة

١٢-١٤

جدول ١٢-١٠

المجموع	لم يشفوا	شفوا
مجموعة A (استخدموا المصل)	0	100
مجموعة B (لم يستخدموا المصل)	100	0
المجموع	100	100

مجموعة A
(استخدموا المصل)

مجموعة B
(لم يستخدموا المصل)

المجموع

الحل :

أكبر قيمة لـ C تحدث عندما يكون التصنيفان معتمدين على بعضهما اعتماداً كاملاً أو متلازمين .
في هذه الحالة فإن جميع الذين استخدموا المصل سوف يشفوا بينما الذين لم يستخدموه لن يشفوا . ويظهر جدول الاقتران في هذه الحالة كما في الجدول ١٢-١٠ .

بما أن القيمة المتوقعة لتكرارات الخلايا بفرض الاستقلال الكامل ، تساوي كلها 50 .

$$\chi^2 = \frac{(100 - 50)^2}{50} + \frac{(0 - 50)^2}{50} + \frac{(0 - 50)^2}{50} + \frac{(100 - 50)^2}{50} = 200$$

$$C = \sqrt{\chi^2 / (\chi^2 + N)} = \sqrt{200 / (200 + 200)} = 0.7071 \text{ هي } C$$

بشكل عام في حالة الاعتماد الكامل في جداول الاقتران عندما يكون كلا من عدد الصفوف وعدد الأعمدة يساوي k .
فإن الخلايا التي ليس بها أصفار تحدث على القطر من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين في جدول الاقتران . في مثل هذه الحالات ،
 $C_{\max} = \sqrt{(k-1)/k}$ (أنظر المسائل ١٢-٥٢ ، ١٢-٥٣)

الارتباط بين الصفات :

١٢-٢٣ لجدول المسألة ١٢-١٤ ، أوجد معامل الارتباط (أ) بدون استخدام تصحيح بيتس (ب) باستخدام تصحيح بيتس

الحل :

$$r = \sqrt{\frac{\chi^2}{N(k-1)}} = \sqrt{\frac{2.38}{200}} = 0.1091 \text{ فإن } k = 2 \text{ و } N = 200 \text{ و } \chi^2 = 2.38 \text{ (أ) بما أن}$$

يميل على ارتباط ضعيف بين الشفاء واستخدام المصل .

$$r = \sqrt{1.93/200} = 0.0982 \text{ (ب) باستخدام المسألة ١٢-١٥ ، (مصحح) } r$$

١٢-٢٤ أثبت أن معامل الارتباط في جداول الاقتران ، كما هو معروف بالمعادلة (١٢) ، صفحة ٣٢٧ ، يقع بين الصفر والواحد .

الحل :

$$\sqrt{\chi^2 / (\chi^2 + N)} \text{ من المسألة ١٢-٥٣ ، النهاية العظمى } \sqrt{(k-1)/k} \text{ هي}$$

إذن

$$\frac{x^2}{x^2 + N} \leq \frac{k-1}{k}, \quad kx^2 \leq (k-1)(x^2 + N), \quad kx^2 \leq kx^2 - x^2 + kN - N$$

$$x^2 \leq (k-1)N, \quad \frac{x^2}{N(k-1)} \leq 1, \quad \text{and} \quad r = \sqrt{\frac{x^2}{N(k-1)}} \leq 1$$

بما أن $x^2 \geq 0$ و $r \geq 0$. إذن $0 \leq r \leq 1$ وهو المطلوب .

خاصية الانجماع في χ^2

١٢ - ٢٥ اختبار الفرض H_0 ، أجريت تجربة ثلاث مرات . حيث كانت قيم χ^2 هي 3.54 ، 1.86 ، 2.37 ، كل منها يقابله درجة حرية واحدة . وضح أنه لا يمكن رفض H_0 عند مستوى 0.05 على أساس بيانات أى تجربة بمفردها ، فإنه يمكن رفضها إذا جمعنا التجارب الثلاثة معاً .

الحل :

قيمة χ^2 التي نحصل عليها من تجميع نتائج الثلاثة تجارب ، طبقاً لخاصية الانجماع $\chi^2 = 2.37 + 2.86 + 3.54 = 9.77$ بدرجات حرية $3 = 1 + 1 + 1$. بما أن $\chi_{0.95}^2$ لثلاثة درجات حرية هي 7.81 ، فيمكن رفض الفرض عند مستوى المعنوية 0.05 . ولكن بما أن $\chi_{0.95}^2 = 3.84$ لدرجة حرية واحدة ، فلا يمكن رفض H_0 على أساس نتائج أى تجربة بمفردها .

في تجميع التجارب حيث قيم χ^2 المعطاة تقابل درجة حرية واحدة ، فإننا لا نستخدم تصحيح بيتس حيث أنه يميل في هذه الحالة إلى المغالاة في التصحيح .

مسائل إضافية

اختبار كا - تربيع (كا^٢) :

١٢ - ٢٦ في 60 رمية لعملة ، لوحظ ظهور 37 صورة و 23 كتابة . اختبر صحة الفرض القائل أن العملة غير متحيزة باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01

ج : لا يمكن رفض الفرض عند أى من المستويين .

١٢ - ٢٧ حل المسألة ١٢ - ٢٦ باستخدام تصحيح بيتس .

ج : الاستنتاج هو نفسه كما سبق .

١٢ - ٢٨ في خلال فترة طويلة كانت الدرجات التي تمنح بواسطة مجموعة من المحاضرين في مقرر دراسي معين هي في المتوسط

12% A's, 18% B's, 40% C's, 18% D's and 12% F's.

إذا أعطى محاضر جديد 12F's , 16 D's , 66 C's , 34 B's , 22 A's خلال فصلين دراسيين . حدد

بمستوى معنوية 0.05 ما إذا كان المحاضر الجديد يتبع نمط التقديرات التي يعطيها الآخرون .

ج : المحاضر الجديد لا يتبع نمط التقديرات الملاحظة بواسطة الآخرين . (حقيقة أن الدرجات صارت أحسن من المتوسط

وقد تكون راجعة لارتفاع المقدرة على التدريس أو لانخفاض المستويات أو لكليهما) .

جدول ١٢ - ١١

صفر صورة	صورة ١	صورة ٢	صورة ٣
24	108	95	23
30	90	90	30

التكرار المشاهد

التكرار المتوقع

١٢ - ٢٩ قذفت ثلاثة عملات ما مجموعه 240

مرة وفي كل مرة لوحظ عدد الصور

التي ظهرت . الجدول ١٢ - ١١

يوضح النتائج التي حصلنا عليها مع

النتائج المتوقعة تحت الفرض القائل

أن العملة غير متحيزة .

اختبر صحة هذا الفرض عند مستوى المعنوية 0.05 .

ج : لا يوجد مبرر لرفض الفرض بأن العملة غير متحيزة .

جدول ١٢ - ١٢

الإثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
135	108	120	114	146

عدد الكتب

المستعمارة

١٢ - ٣٠ عدد الكتب المستعمارة من مكتبة

عامة خلال أسبوع معين موضح

بالجدول ١٢ - ١٢ . اختبر صحة

الفرض القائل أن عدد الكتب ،

المستعمارة لا يعتمد على أيام الأسبوع ،

مستخدماً ، مستوى معنوية (أ) 0.05

(ب) 0.01

ج : لا يوجد مبرر لرفض الفرض عند أي مستوى

جدول ١٢ - ١٣

0 أحمر	1 أحمر	2 أحمر
2 أبيض	1 أبيض	0 أبيض
6	53	61

عدد السجلات

١٢ - ٣١ وعاء يحتوي على 6 كرات

حمراء و 3 كرات بيضاء . .

اختبرت كرتان من الوعاء عشوائياً

وتم تسجيل لونهما ثم أعيدت

الكرات إلى الوعاء . وقد تم تكرار

هذه العملية 120 مرة وسجلات

النتائج في الجدول ١٢ - ١٣ . (أ) حدد التكرارات المعقوفة (ب) حدد عند مستوى ، المعنوية 0.05 ما إذا

كانت النتائج متسقة مع ما هو متوقع .

ج : (أ) 50 و 10، على الترتيب (ب) لا يمكن رفض الفرض القائل أن النتائج تماثل ما هو متوقع عند

مستوى المعنوية 0.05 .

2 ،

بانات

$\chi^2 =$

ن عند

أساس

نه يحيل

متحيزة

٣٢-١٢ اختر 200 مسار عشوائياً من إنتاج كل من 4 ماكينات . فكان عدد المسامير الثالثة هو 2, 9, 10, 3 . حدد ما إذا كان هناك فروق معنوية بين الماكينات باستخدام مستوى المعنوية 0.05 .
ج : الفروق معنوية عند المستوى 0.05 .

جودة التوفيق :

٣٣-١٢ (أ) استخدم اختبار كا - تربيع لتحديد مدى جودة توفيق بيانات المسألة ٧ - ٧٥ ، الفصل السابع ، (ب) هل التوفيق « متناهي الجودة » ؟
استخدم مستوى المعنوية 0.05 .
ج : (أ) التوفيق جيد (ب) لا .

٣٤-١٢ استخدم اختبار كا - تربيع لتحديد مدى جودة توفيق البيانات المشار إليها في (أ) المسألة ٧ - ٧٧ ، الفصل السابع ، المسألة ٧ - ٧٨ ، الفصل السابع . استخدم مستوى معنوية 0.05 وفي كل حالة حدد ما إذا كان التوفيق « متناهي الجودة » .

ج : (أ) التوفيق « متناهي الجودة » . (ب) التوفيق غير جيد عند مستوى 0.05 .

٣٥-١٢ استخدم اختبار كا - تربيع لتحديد مدى جودة توفيق البيانات المشار إليها في (أ) المسألة ٧ - ٧٩ ، الفصل السابع ، (ب) المسألة ٧ - ٨٠ ، الفصل السابع . هل نتائجك في (أ) متسقة مع تلك في المسألة ١٢ - ٣٣ ؟

ج : (أ) التوفيق غير جيد عند مستوى 0.05 . بما أن توزيع ذى الحدين يعطى توفيقاً جيداً للبيانات ، وهذا يتسق مع المسألة ١٢ - ٣٣ .

(ب) هذا التوفيق جيد ولكنه ليس « متناهي الجودة » .

جداول الاقتران :

٣٦-١٢ الجدول ١٤-١٢ يظهر نتائج تجربة لملاحظة تأثير تطعيم ، حيوانات التجارب ضد مرض معين . استخدم (أ) 0.01 (ب) 0.05 مستوى معنوية ، اختبر صحة الفرض القائل أنه لا يوجد اختلاف بين المجموعة التي طعمت والمجموعة التي لم تطعم ، أي أن التطعيم والإصابة بالمرض مستقلين .

ج : يمكن رفض الفرض عند المستوى 0.05 ولكن ليس عند المستوى 0.01 .

جدول ١٤-١٢

	أصيب بالمرض	لم يصب بالمرض
طعم	9	42
لم يطعم	17	28

٣٧-١٢ حل المسألة السابقة باستخدام تصحيح بيتس .

ج : نفس الاستنتاج .

٣٨-١٢ الجدول ١٥-١٢ يوضح عدد الطلبة في الفصيلين A و B الذين

نجحوا ، والذين رسبوا في امتحان أعلى للفصلين . استخدم

مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 ، لاختبار الفرض

بأنه لا يوجد فروق بين الفصيلين . حل المسألة باستخدام تصحيح

بيتس وبلون استخدام تصحيح بيتس .

ج : لا يمكن رفض الفرض عند أى المستويين .

جدول ١٥-١٢

ناجح	راسب	
72	17	الفصل A
64	23	الفصل B

٣٩-١٢ في مجموعة من المرضى يشكون من عدم قدرتهم على النوم الجيد ، أعطى بعضهم حبوب منومة بينما أعطى الآخريين حبوب

من السكر (على الرغم من أن جميعهم يمتثلون أنهم أعطوا حبوب منومة) . سألوا بعد ذلك عما إذا كانت الحبوب

ساعدتهم على النوم أم لا . وكانت نتيجة إجابتهم كما هو موضح بالجدول ١٦ - ١٢ . مفترضاً أن كل المرضى ذكروا

الحقيقة ، اختبر صحة الفرض القائل أنه لا يوجد فرق بين الحبوب المنومة وحبوب السكر عند مستوى المعنوية 0.05 .

ج : لا يمكن رفض الفرض عند مستوى 0.05 .

جدول ١٧-١٢

موافق	معارض	لم يقرر بعد	
85	78	37	ديمقراطي
118	61	25	جمهوري

جدول ١٦-١٢

نام جيداً	لم ينام بصورة جيدة	
44	10	أخذ الحبوب المنومة
81	35	أخذ حبوب السكر

٤٠-١٢ في اقتراح ذو أهمية قومية ، صوت المنتمين للحزب الديمقراطي والمنتمين للحزب الجمهوري كما هو موضح بالجدول ١٧-١٢

عند مستوى معنوية (أ) 0.01 (ب) 0.05 اختبر صحة الفرض القائل أنه لا يوجد فرق بين الحزبين فيما يختص

بالاقتراح المقدم .

ج : يمكن رفض الفرض عند كلا المستويين .

٤١-١٢ الجدول ١٨-١٢ يوضح العلاقة بين أداء الطلبة في مادتي الرياضة والطبيعة . اختبر الفرض بأن مستوى أداء الطالب ، في

الرياضة مستقل عن مستوى أدائه في الطبيعة ، مستخدماً مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 .

ج : يرفض الفرض عند كلا المستويين .

جدول ١٢-١٨

الرياضة			
درجات مرتفعة	درجات متوسطة	درجات منخفضة	
56	71	12	درجات مرتفعة
47	163	38	درجات متوسطة
14	42	85	درجات منخفضة

الطبيعة

١٢-٤٧ في نتيجة استقصاء عما إذا كان لعمر السائق الذي يبلغ من العمر 21 عام أو أكبر أى تأثير على عدد حوادث السيارات التي يكون هو طرفاً فيها (بما في ذلك الحوادث الصغيرة) موضح بالجدول ١٢-١٩ . اختبر عند مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 صحة الفرض القائل أن عدد الحوادث مستقل عن عمر السائق . ماهي مصادر الصعوبة في أساليب المعاينة والاعتبارات الأخرى التي قد تؤثر في استنتاجك ؟

جدول ١٢-١٩

عدد الحوادث	سن السائق				
	21 — 30	31 — 40	41 — 50	51 — 60	61 — 70
0	748	821	786	720	672
1	74	60	51	66	50
2	31	25	22	16	15
أكثر من 2	9	10	6	5	7

ج : لا يمكن رفض عند أى من المستويين .

١٢-٤٣ (أ) أثبت أن $\chi^2 = \sum (o^2/e_j) - N$ لجميع جداول الاقتران ، حيث N هو التكرار الكلي في جميع الخلايا ، (ب) استخدم النتائج في (أ) ، حل المسألة ١٢-٤١ .

٤٤-١٢ إذا كانت N_i و N_j تعبر على الترتيب عن مجموع التكرارات في الصف i والعمود j في جدول اقتران ، (التكرارات الهامشية) ، وضع أن التكرار المتوقع للخلية في الصف i والعمود j هو $N_i N_j / N$ حيث N هو مجموع التكرارات في جميع الخلايا .

٤٥-١٢ أثبت الصيغة (٩) ، صفحة ٣٢٧ (ملحوظة : استخدم المسائل ٤٣-١٢ ، ٤٤-١٢) .

٤٦-١٢ عم نتيجة الصيغة (٩) ، صفحة ٣٢٧ ، إلى حالة جداول الاقتران $2 \times k$ حيث $k > 3$.

٤٧-١٢ أثبت الصيغة (٨) ، صفحة ٣٢٧ .

٤٨-١٢ بالمناظرة للأفكار التي أثبتت لجداول الاقتران $h \times k$ ، ناقش جداول الاقتران $h \times k \times l$ ، مع ذكر التطبيقات الممكنة لهذه الجداول .

معامل الاقتران :

جدول ٢٠-١٢

لون الشعر			
غير شقراء	شقراء		
25	49	زرقاء	لون العين
96	30	غير زرقاء	

٤٩-١٢ الجدول ٢٠-١٢ يبين العلاقة بين لون الشعر ولون العين في عينة من 200 طالب . (أ) احسب معامل الاقتران باستخدام تصحيح ييتس وبنون استخدام تصحيح يقيس . (ب) قارن النتيجة في (أ) بأكبر قيمة لمعامل الاقتران .

ج : (أ) باستخدام تصحيح ييتس 0.3779 ، 0.3863

٥٠-١٢ أوجد معامل الاقتران لبيانات (أ) المسألة ٣٦-١٢ (ب) المسألة ٣٨-١٢ بنون استخدام تصحيح ييتس وباستخدامه . ج : (أ) 0.2205 ، 0.1985 (مصحح) (ب) 0.0872 ، 0.0738 (مصحح) .

٥١-١٢ أوجد معامل الاقتران لبيانات المسألة ٤١-١٢

ج : 0.4651

٥٢-١٢ أثبت أن النهاية العظمى لمعامل الاقتران في جداول 3×3 هي $\sqrt{4} = 0.8165$ تقريباً .

٥٣-١٢ أثبت أن النهاية العظمى لمعامل الاقتران في جداول $k \times k$ هي $\sqrt{(k-1)/k}$

ارتباط الصفات :

٥٤-١٢ أوجد معامل الارتباط لبيانات في الجدول ٤٩-١٢

ج : (أ) 0.4188 ، 0.4082 (باستخدام تصحيح ييتس) .

ات
0.0
مائة

عدد الجداول

٥٦

٥٥-١٢ أوجد معامل الارتباط للبيانات في جداول (أ) ١٢-٢٦ (ب) المسألة ١٢-٣٨ ، بدون استخدام تصحيح بيتس ، وباستخدامه .

ج : (أ) 0.2261 ، 0.2026 (مصحح)

(ب) 0.0875 ، 0.0740 (مصحح)

٥٦-١٢ أوجد معامل الارتباط بين درجات الرياضة والطبيعة في الجدول بالمسألة ١٢-٤١

ج : 0.3715

٥٧-١٢ إذا كانت C هي معامل الاقتران في جدول $k \times k$ و r هو معامل الارتباط المقابل ، أثبت أن

$$r = C / \sqrt{(1 - C^2)(k - 1)}$$

خاصية الانجماع في χ^2

٥٨-١٢ لاختبار الفرض H_0 ، أجريت تجربة خمس مرات ، حيث كانت قيم χ^2 ، كل منها يقابل 4 درجات حرية

هي 8.6, 9.1, 7.8, 8.3 على الترتيب . وضح أنه بينما لا يمكن رفض الفرض H_0 عند المستوى 0.05

على أساس بيانات أى تجربة بمفردها ، فإنه يمكن رفضها عند المستوى 0.005 إذا جمعنا التجارب الخمس معاً .

الفصل الثالث عشر

توفيق المنحنيات وطريقة المربعات الصغرى

العلاقة بين المتغيرات :

في كثير من النواحي العملية نجد أن هناك علاقة بين متغيرين (أو أكثر) على سبيل المثال نجد أن أوزان الذكور البالغين تعتمد بدرجة معينة على أطوالهم ، محيط الدائرة يعتمد على نصف قطرها ، ضغط وزن معين من الغاز يعتمد على درجة حرارته ، وحجمه .

حرية
0.0

وفي أغلب الأحيان يكون من المرغوب فيه التعبير عن هذه العلاقة بصورة رياضية وذلك بتحديد المعادلة التي تربط بين المتغيرات .

توفيق المنحنيات :

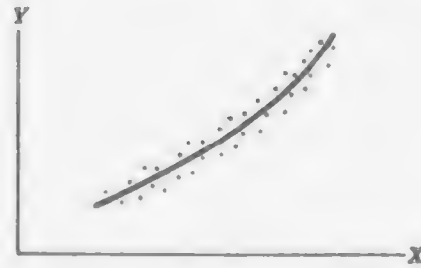
للمساعدة في تحديد المعادلة التي تربط بين المتغيرات ، كخطوة أولى نجمع بيانات تظهر القيم المتقابلة للمتغيرات تحت الدراسة .

على سبيل المثال ، افترض أن X و Y يعبران عن أطوال وأوزان ذكور بالغين . فإن عينة مكونة من N شخص تعطي الأطوال X_1, X_2, \dots, X_N والأوزان المقابلة لها Y_1, Y_2, \dots, Y_N .

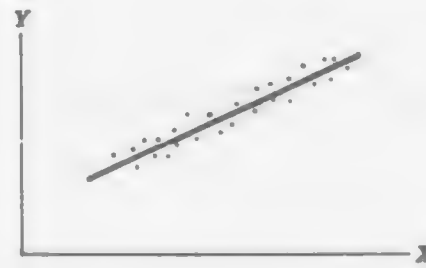
الخطوة التالية هي توضيح النقاط $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$ في رسم طبقاً لنظام الإحداثيات المتعامدة . وتسمى النقاط الناتجة بشكل الانتشار .

ومن شكل الانتشار يمكن بالنظر تمهيد منحنى كتقريب لهذه البيانات ، مثل هذا المنحنى يسمى بالمنحنى التقريبي . في الشكل ١٣-١ ، على سبيل المثال ، يظهر أن البيانات يمكن تقريبها بصورة جيدة بخط مستقيم ومن ثم نقول أن هناك علاقة خطية بين المتغيرات . في الشكل ١٣-٢ ، فعل الرغم من أن هناك علاقة موجودة بين المتغيرات إلا أنها علاقة غير خطية وبهذا يمكن أن نسميها علاقة غير خطية .

المشكلة العامة في الحصول على معادلة المنحنيات التقريبية والتي تعطي أحسن توفيق لمجموعة من البيانات تسمى بتوفيق المنحنيات .



٢-١٣٠



١-١٣

معادلات المنحنيات التقريبية :

فما يلي قائمة بعدد من الأشكال الشائعة للمنحنيات التقريبية ومعادلاتها وقد ذكرناها بهدف الرجوع إليها . جميع الحروف غير Y و X تمثل ثوابت . المتغير X يشار إليه بأنه متغير مستقل والمتغير Y بأنه المتغير التابع ، على الرغم من أنه يمكن أن تمكس التسميات لهما .

- | | |
|---|--|
| (١) $Y = a_0 + a_1X$ | خط مستقيم |
| (٢) $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2$ | منحنى قطع مكافئ أو منحنى من الدرجة الثانية |
| (٣) $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ | منحنى من الدرجة الثالثة |
| (٤) $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4$ | منحنى من الدرجة الرابعة |
| (٥) $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ | منحنى من الدرجة n |

الجانب الأيسر من المعادلات السابقة يسمى كثيرات الحدود من الدرجة الأولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة ، الدرجة n على الترتيب . النوال المعرفة بالمعادلات الأربعة الأولى تسمى أحياناً دوال خطية ، دوال من الدرجة الثانية ، دوال من الدرجة الثالثة ودوال من الدرجة الرابعة على الترتيب .

وهناك معادلات أخرى (من بين عدد من المعادلات) تستخدم في النواحي العملية نذكر منها ما يلي :

- | | |
|--|----------------------|
| (٦) $Y = \frac{1}{a_0 + a_1X}$ or $\frac{1}{Y} = a_0 + a_1X$ | قطع زائد |
| (٧) $Y = ab^X$ or $\log Y = \log a + (\log b)X = a_0 + a_1X$ | المنحنى الأسى |
| (٨) $Y = aX^b$ or $\log Y = \log a + b \log X$ | المنحنى الهندسى |
| (٩) $Y = ah^X \cdot g$ | المنحنى الأسى المعدل |

- (١٠) $Y = aX^b + g$ المنحنى الهندسي المعدل
- (١١) $Y = pq^{bX}$ or $\log Y = \log p + b^X \log q = ab^X + g$ منحنى جومبرتز
- (١٢) $Y = pq^{bX} + h$ منحنى جومبرتز المعدل
- (١٣) $Y = \frac{1}{ab^X + g}$ or $\frac{1}{Y} = ab^X + g$ المنحنى اللوجيسى
- (١٤) $Y = a_0 + a_1(\log X) + a_2(\log X)^2$

لتحديد المنحنى الذى يجب استخدامه ، من المفيد الحصول على شكل انتشار المتغيرات المحولة ، على سبيل المثال ، إذا كان شكل انتشار $\log Y$ vs. X يظهر علاقة خطية فإن المعادلة التى يجب استخدامها هى المعادلة (٧) بينما إذا كان $\log Y$ vs. $\log X$ يظهر علاقة خطية فإن المعادلة تكون فى الصورة (٨) ، لتسهيل ذلك فإننا نستخدم ورق رسم بياني من نوع معين والذى يقسم أحد محوريه أو كلاهما تقسيماً لوغاريتمياً ، ونشر إليه بالورق البياني النصف لوغاريتمى أو بالورق البياني لوغاريتم - لوغاريتم .

التجهيد باليد فى توفيق المنحنى :

يمكن أن نستخدم الحكم الشخصى فى رسم منحنى تقريبي لتوفيق مجموعة من البيانات وهذا يسمى بطريقة التجهيد باليد فى توفيق المنحنى . فإذا كان نوع معادلة المنحنى معروفاً ، فن الممكن الحصول على الثوابت باختبار عدد من النقاط على المنحنى تساوى عدد الثوابت بالمعادلة . على سبيل المثال ، إذا كان المنحنى خط مستقيم ، فإننا نحتاج إلى نقطتين ، إذا كان المنحنى قطع مكافئ ، فإننا نحتاج إلى ثلاثة نقاط ، ولكن عيب هذه الطريقة أن الأشخاص المختلفين يحصلون على منحنيات ومعادلات مختلفة .

الخط المستقيم :

أبسط صورة المنحنى التقريبي هو الخط المستقيم ، والذى يمكن كتابته معادلته كالاتى :

$$(١٥) \quad Y = a_0 + a_1 X$$

بمعرفة أى نقطتين (X_1, Y_1) و (X_2, Y_2) على الخط ، فإن الثوابت a_0 ، a_1 يمكن تحديدهما . والمعادلة المستنتجة للخط يمكن كتابتها :

$$(١٦) \quad Y - Y_1 = \left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \right) (X - X_1) \text{ or } Y - Y_1 = m(X - X_1)$$

حيث $m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$ تسمى ميل الخط ويمثل مقدار التغير فى Y مقسوماً على مقدار التغير فى X .

وعندما نكتب المعادلة فى الشكل (١٥) ، فإن الثابت a_1 هو الميل m ، الثابت a_0 وهو قيمة Y عند $X = 0$

يسمى بالجزء المقطوع من المحور Y .

رؤف غير
ن أنه يمكن

(١) Y

(٢) Y

(٣) Y

(٤) Y

(٥) Y

درجة n على

الدرجة الثالثة

(٦) $Y =$

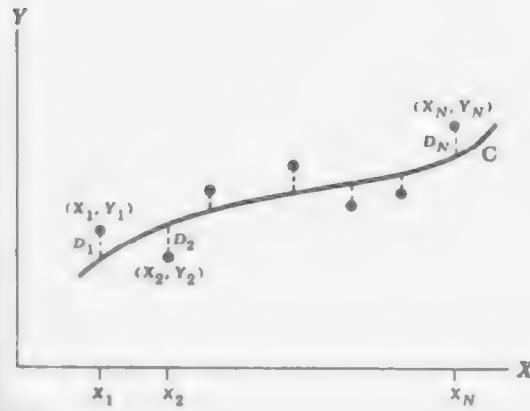
(٧) $Y =$

(٨) $Y =$

(٩) $Y =$

طريقة المربعات الصغرى :

لتلافى الحكم الشخصى فى تكوين الخطوط ، القطاعات المكافئة أو غيرها من المنحنيات التقريبية فن الضرورى الاتفاق على تعريف « أفضل توفيق للخط » ، « أفضل توفيق لقطع المكافئ » ، وهكذا .



يهدف الحصول على تعريف ممكن ، اعتبر الشكل ١٣-٣ حيث نقط البيانات هي النقط $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$.

لقيمة معينة من قيم X ، ولتكن X_1 ، سيكون هناك فرق بين القيمة Y_1 والقيمة المقابلة كما هي محددة بالمنحنى C كما هو موضح بالشكل فإننا نعبّر عن هذا الفرق بالرمز D_1 ، والتي يسمي أحياناً بالانحراف ، الخطأ أو الباقي وقد يكون

شكل ١٣ - ٣

موجباً أو سالباً أو صفراً . بنفس الأسلوب نحصل لقيم X_2, \dots, X_N على الانحرافات المقابلة D_2, \dots, D_N .

لقياس « جودة التوفيق » للمنحنى C للبيانات المطاة نستخدم السكبة $D_1^2 + D_2^2 + \dots + D_N^2$ فإذا كانت هذه السكبة صغيرة فإن التوفيق جيد ، وإذا كانت كبيرة فإن التوفيق يكون سيئاً . لهذا نعطي التعريف التالى :

تعريفه : من بين جميع المنحنيات التقريبية لمجموعة من البيانات ، المنحنى الذى له خاصية أن

$$D_1^2 + D_2^2 + \dots + D_N^2 \text{ نهاية صغرى (أصغرها يمكن) .}$$

يسمى أفضل منحنى يمكن توقيته .

المنحنى الذى له هذه الخاصية يقال أنه يوفق البيانات بمفهوم المربعات الصغرى ويسمى بمنحنى المربعات الصغرى . فالخط الذى له هذه الخاصية يسمى بخط المربعات الصغرى ، والقطع المكافئ الذى له هذه الخاصية يسمى قطع مكافئ المربعات الصغرى ، وهكذا .

من المعتاد استخدام التعريف السابق عندما يكون X هو المتغير المستقل و Y هو المتغير التابع . إذا كان X هو المتغير التابع فإننا نعدل التعريف بحيث نعتبر الانحرافات الرأسية بدلا من الانحرافات الأفقية ، والتي تعادل تغير محورى Y ، X هذان التعريفان يؤديان بشكل عام إلى منحنيات مربعات صغرى مختلفة . مالم يذكر خلاف ذلك فإننا سوف نعتبر Y هو المتغير التابع و X هو المتغير المستقل .

ومن الممكن تعريف منحنى مربعات صغرى آخر باعتبار البعد الممدود من كل نقطة من نقط البيانات إلى المنحنى بدلا من الأبعاد الرأسية والأفقية . ولكن هذا التعريف لا يستخدم بكثرة .

خط المربعات الصغرى :

معادلة الخط التقريبي للمربعات الصغرى لمجموعة من النقاط $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$ هي

$$(18) \quad Y = a_0 + a_1 X$$

حيث تتحدد قيمة الثوابت a_0, a_1 بحل المعادلتين الآتيتين :

$$(19) \quad \left. \begin{aligned} \sum Y &= a_0 N + a_1 \sum X \\ \sum XY &= a_0 \sum X + a_1 \sum X^2 \end{aligned} \right\}$$

والتي تسمى بالمعادلات الاعتدالية لخط المربعات الصغرى (١٨).

ويمكن الحصول على قيمة الثوابت a_0, a_1 بالمعادلة (١٩) ، وإذا أردنا ، بالصيغ

$$(20) \quad a_0 = \frac{(\sum Y)(\sum X^2) - (\sum X)(\sum XY)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2} \quad a_1 = \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

المعادلات الاعتدالية (١٩) يمكن تذكرها بسهولة بملاحظة أن المعادلة الأولى يمكن الحصول عليها بتجميع طرفي المعادلة (١٨) ، أي ، $\sum Y = \sum (a_0 + a_1 X) = a_0 N + a_1 \sum X$ ، بينما المعادلة الثانية يمكن الحصول عليها بغرب طرفي المعادلة (١٨) أولاً في X ثم تجميع طرفي لمعادلة $\sum XY = \sum X (a_0 + a_1 X) = a_0 \sum X + a_1 \sum X^2$. لاحظ أن هذه ليست خطوات لإثبات المعادلة الاعتدالية ولكنها ببساطة أسلوب لتذكر هذه المعادلات . لإثبات هذه العلاقة تستخدم التفاضل . أنظر الملحق VIII ، صفحة ٥٤٠ .

لاحظ كذلك أنه في (١٩) و (٢٠) استخدمنا الرموز المختصرة $\sum X, \sum XY$ ، وغيرها ، بدلا من $\sum_{i=1}^N X_i, \sum_{i=1}^N X_i Y_i$ وغيرها .

ويمكن أحيانا اختصار العمل في إيجاد خط المربعات الصغرى بتحويل البيانات بحيث $y = Y - \bar{Y}, x = X - \bar{X}$ وهذا تكتب معادلة خط المربعات الصغرى كالآتي (أنظر المسألة ١٢ - ١٥)

$$(21) \quad y = \left(\frac{\sum xy}{\sum x^2} \right) x \quad \text{أو} \quad y = \left(\frac{\sum xY}{\sum x^2} \right) x$$

وعلى وجه الخصوص إذا كانت X تحقق العلاقة $\sum X = 0$ ، أي أن $\bar{X} = 0$ فإن

$$(22) \quad Y = \bar{Y} + \left(\frac{\sum XY}{\sum X^2} \right) X$$

من هذه المعادلة يتضح أن خط المربعات الصغرى يمر خلال النقطة (\bar{X}, \bar{Y}) وتسمى مركز القوة أو مركز شغل البيانات



D

إذا كانت

نقط الذي له
، وهكذا .

لتغير التابع
ن التعريفان
لا هو المتغير

لا من الأبعاد

إذا أخذنا المتغير X كتغير تابع بدلا من كونه متغير مستقل ، فإننا نكتب المعادلة (١٨) على صورة $X = b_0 + b_1 Y$ فإن النتائج السابقة تنطبق إذا أبدلنا X بدلا من Y وأحللنا $b_0 + b_1$ بدلا من a_0, a_1 على الترتيب . خط المربعات الذى سنحصل عليه فى هذه الحالة لن يكون بشكل عام مثل الذى حصلنا عليه أعلاه (أنظر المسائل ١٣ - ١١ و ١٣ - ١٥ (د) .

العلاقات غير الخطية :

العلاقات غير الخطية يمكن فى بعض الأحيان تحويلها إلى علاقات خطية باستخدام تحويلة مناسبة للمتغيرات . (أنظر المسألة ١٣ - ٢١) .

المربعات الصغرى للقطع المكافئ :

معادلة القطع المكافئ التقريبي للمربعات الصغرى لمجموعة من النقط $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$ هى

$$(٢٢) \quad Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$$

حيث تتحدد قيمة الثوابت a_0, a_1, a_2 بحل المعادلات التالية آنياً

$$(٢٤) \quad \left. \begin{aligned} \sum Y &= a_0 N + a_1 \sum X + a_2 \sum X^2 \\ \sum XY &= a_0 \sum X + a_1 \sum X^2 + a_2 \sum X^3 \\ \sum X^2 Y &= a_0 \sum X^2 + a_1 \sum X^3 + a_2 \sum X^4 \end{aligned} \right\}$$

والتي تسمى بالمعادلات الاعتدالية لقطع مكافئ المربعات الصغرى .

المعادلات (٢٤) يمكن تذكرها بسهولة بملاحظة أن هذه المعادلات يمكن الحصول عليها بضرب المعادلة (٢٢) فى $1, X, X^2$ على الترتيب والتجميع على الطرفين للمعادلات الناتجة . وهذا الأسلوب يمكن تعميمه للحصول على المعادلات الاعتدالية لمنحنى المربعات الصغرى من الدرجة الثالثة ، منحنى المربعات الصغرى من الدرجة الرابعة وبشكل عام أى من منحنيات المربعات الصغرى المقابلة للمعادلة (٥) .

وكما هو الحال فى خط المربعات الصغرى ، فإنه يمكن تبسيط المعادلة (٢٤) باختيار X بحيث تكون $\sum X = 0$. ويمكن أيضاً إجراء التبسيط باختيار المتغيرات الجديدة $\bar{x} = X - \bar{X}$ ، $\bar{y} = Y - \bar{Y}$.

الانحدار :

فى أغلب الأحيان يكون المطلوب هو تقدير قيمة المتغير Y المقابلة لقيمة معطاة للمتغير X وذلك باستخدام بيانات مأخوذة من عينة . ويمكن أن يتم ذلك بتقدير قيمة Y من منحنى المربعات الصغرى الذى توفى بيانات العينة . المنحنى الناتج يسمى منحنى انحدار Y على X حيث أن Y تقدر من X .

إذا كان المطلوب هو تقدير قيمة X من قيمة معطاة لـ Y فإننا نستخدم منحى انحدار X على Y ، والتي تتضمن تبديل المتغيرات في شكل الانتشار بحيث تكون X هو المتغير التابع و Y هو المتغير المستقل . وهذه تكافئ أحلال الانحرافات الرأسية في تعريف منحنيات المربعات الصغرى في صفحة ٢٥٢ بالانحرافات الأفقية .

وبشكل عام فإن خط أو منحى انحدار Y على X يماثل خط أو منحى انحدار X على Y .

تطبيقات على السلاسل الزمنية :

إذا كان المتغير المستقل X هو الزمن ، فإن البيانات تظهر قيم X عند أوقات مختلفة ، تسمى البيانات المرتبة حسب الزمن بالسلاسل الزمنية . ويسمى خط أو منحى انحدار Y على X في هذه الحالة خط الاتجاه العام أو منحى الاتجاه العام ويستخدم غالباً لأهداف التقدير أو التنبؤ .

مسائل تتضمن أكثر من متغيرين :

المسائل المتضمنة أكثر من متغيرين يمكن معالجتها بأسلوب مماثل لهذا الذى استخدم في حالة المتغيرين . على سبيل المثال ، قد تكون هناك علاقة بين المتغيرات الثلاثة X, Y, Z والتي يمكن وضعها بالمعادلة .

$$(٢٥) \quad Z = a_0 + a_1X + a_2Y$$

وتسمى معادلة خطية في المتغيرات X, Y, Z .

هذه المعادلات يمكن تمثيلها بمستوى في نظام للاحداثيات المتعامدة ذو ثلاثة أبعاد والنقط الفعلية للعينات $(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), \dots, (X_N, Y_N, Z_N)$ قد « تكتشر » بصورة ليست متباعدة من هذا المستوى . والذي يمكن تسميته بالمستوى التقريبي .

بتميم طريقة المربعات الصغرى ، يمكن أن نتكلم عن مستوى المربعات الصغرى الذى يقرب البيانات . فإذا كنا نقدر Z من قيم معطاة لـ X و Y ، فهذا يسمى مستوى انحدار Z على X و Y . المعادلات الاعتدالية المقابلة لمستوى المربعات الصغرى (٢٥) تعطى كما يلي :

$$(٢٦) \quad \left. \begin{aligned} \sum Z &= a_0N + a_1 \sum X + a_2 \sum Y \\ \sum XZ &= a_0 \sum X + a_1 \sum X^2 + a_2 \sum XY \\ \sum YZ &= a_0 \sum Y + a_1 \sum XY + a_2 \sum Y^2 \end{aligned} \right\}$$

ويمكن تذكرها بأننا نحصل عليها بضرب (٢٥) في $1, X, Y$ بالتتالى ثم التجميع .

ويمكن أيضاً اعتبار معادلات أكثر تعقيداً من (٢٥) . وهذه تمثل سطوح الانحدار وإذا زاد عدد المتغيرات عن ثلاثة ، فإن التمثيل الهندسي لا يمكن استخدامه حيث أن هذا يتطلب فراغاً ذا أربعة ، خمسة . . . أبعاد .

المشاكل التى تتضمن تقدير متغير من متغيرين أو أكثر تسمى مشاكل الانحدار المتعدد وسوف يتم دراستها بالتفصيل فى الفصل الخامس عشر .

مسائل محلولة

الخطوط المستقيمة :

١٣ - ١ (أ) ارسم خطاً مستقيماً يقرب البيانات بالجدول

١٣ - ١ (ب) أوجد معادلة هذا الخط .

الحل :

(أ) ضع النقط

(2,1), (3,3), (5,7), (7,11), (9,15), (10,17)

فى نظام للاحداثيات المتعامدة كما هو موضح

بالشكل ١٣ - ٤ . من الواضح من هذا الشكل

أن جميع النقط تقع على خط مستقيم (يظهر

على شكل خطوط منقطعة) . أى أن الخط

مستقيم يوفق هذه البيانات تماماً .

(ب) لتحديد معادلة الخط المعروف بما يلى :

$$(١) \quad Y = a_0 + a_1 X$$

فإنه يكتفى بتحديد نقطتين . اختر النقطتين (2, 1)

و (3, 3) على سبيل المثال .

لنقطة (2, 1) ، $X = 2$ ، $Y = 1$. بالتعويض بهذه النقط فى ١ ينتج

$$(٢) \quad 1 = a_0 + 2a_1$$

كذلك للنقطة (3, 3) ، $X = 3$ ، $Y = 3$ ، بالتعويض فى (١) ينتج

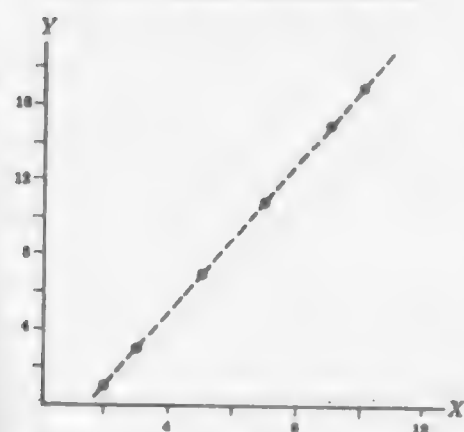
$$(٣) \quad 3 = a_0 + 3a_1$$

بحل (٢) و (٣) آنياً نجد أن $a_0 = -3$ ، $a_1 = 2$ والمعادلة المطلوبة هى

$$Y = 2X - 3 \text{ أو } Y = -3 + 2X$$

الجدول ١٣ - ١

X	2	3	5	7	9	10
Y	1	3	7	11	15	17



شكل ١٣ - ٤

كوسيلة للمراجعة ، يمكن أن نثبت أن لنقط (5, 7), (7, 11), (9, 15), (10, 17) تقع كذلك على الخط .

١٢-٧ في المسألة ١٣-١ أوجد (أ) Y عند $X = 4$ (ب) Y عند $X = 15$ (ج) Y عند $X = 0$
(د) X عند $Y = 7.5$ (هـ) X عند $Y = 0$ (و) الزيادة في Y المقابلة لزيادة X بوحدة واحدة .

الحل :

نفترض أن نفس العلاقة $Y = 2X - 3$ تتحقق لقيم X و Y غير تلك الموضحة في الجدول ١٣-١
بالمسألة ١٣-١

(أ) إذا كانت $X = 4$ فإن $Y = 2(4) - 3 = 8 - 3 = 5$. وبما أننا نحصل على قيمة Y المقابلة لقيمة X الواقعة بين قيمتين معينتين لـ X فإن هذه العملية تسمى بالاستكمال الخطي .

(ب) إذا كانت $X = 15$ فإن $Y = 2(15) - 3 = 30 - 3 = 27$. وبما أننا نحصل على قيمة Y المقابلة لقيمة X خارج قيم X المعطاة ، فإن هذه العملية تسمى بالاستكمال الخطي الخارجى .

(ج) إذا كانت $X = 0$ ، $Y = 2(0) - 3 = 0 - 3 = -3$. فإن قيمة Y عند $X = 0$ تسمى الجزء المقطوع من محور Y وهي قيمة Y عند تقاطع الخط (إذا ما كان ذلك ضرورياً) مع محور Y .

(د) إذا كانت $Y = 7.5$ فإن $7.5 = 2X - 3$ ، إذن $2X = 7.5 + 3 = 10.5$ و $X = 10.5/2 = 5.25$.

(هـ) إذا كانت $Y = 0$ فإن $0 = 2X - 3$ ، إذن $2X = 3$ و $X = 1.5$ وهي قيمة X عند $Y = 0$ وتسمى الجزء المقطوع من محور X . وهي قيمة X عند نقطة تقاطع الخط (إذا ما كان ذلك ضرورياً) مع محور X .

(و) إذا زادت X وحدة من 2 إلى 3 فإن Y تزيد من 1 إلى 3 أى تتغير بمقدار وحدتين .

إذا زادت X من 2 إلى 10 ، أى ، $8 = (10 - 2)$ وحدات ، فإن Y تزيد من 1 إلى 17 أو $16 = (17 - 1)$ وحدة . إذن Y تزيد 16 وحدة مقابلة لزيادة 8 وحدات في X أو أنها تزيد وحدتين مقابل زيادة وحدة في X .

بشكل عام إذا كانت ΔY تغير عن التغير في Y الناتج من تغير في X مقداره ΔX فإن التغير في Y مقابل تغير وحدة واحدة في X هو $\Delta Y / \Delta X = 2$. وهذا يسمى ميل الخط ويساوى دائماً a_1 في المعادلة $Y = a_0 + a_1 X$. الثابت a_0 يسمى الجزء المقطوع من محور الصادات لمخطط (أنظر الجزء (ج)) .

الأسئلة السابقة يمكن إجابتها بالرجوع مباشرة إلى الشكل ١٣-٤ .

١٣-٣ (أ) وضع أن معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقط (X_1, Y_1) و (X_2, Y_2) يعطى بالمعادلة

$$Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X - X_1)$$

(ب) أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر خلال النقط $(2, -3)$ و $(4, 5)$

الحل :

(أ) معادلة الخط المستقيم هي :

$$Y = a_0 + a_1 X \quad (1)$$

$$Y_1 = a_0 + a_1 X_1 \quad (2)$$

$$Y_2 = a_0 + a_1 X_2 \quad (3)$$

$$Y - Y_1 = a_1(X - X_1) \quad (4)$$

بما أن (X_1, Y_1) تقع على الخط فإن

بما أن (X_2, Y_2) تقع على الخط فإن

يطرح المعادلة (٢) من (١) فإن

$$a_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \quad \text{أو} \quad Y_2 - Y_1 = a_1(X_2 - X_1) \quad \text{، من (٣) ، يطرح المعادلة (٢) من (١) ،}$$

بالتعويض بقيمة a_1 هذه في (٤) نحصل على $Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X - X_1)$ وهو المطلوب
الكية $\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$ يرمز لها غالباً بالحرف m ، وتمثل التغير في Y مقسوماً على التغير المقابل له في X وهو ميل الخط . وبهذا يمكن كتابة المعادلة المطلوبة في الصورة $Y - Y_1 = m(X - X_1)$.

(ب) الطريقة ١ : باستخدام النتيجة في (أ)

بالمقابلة للنقطة الأولى $(2, -3)$ فإن $X_1 = 2$ ، $Y_1 = -3$.

بالمقابلة للنقطة الثانية $(4, 5)$ فإن $X_2 = 4$ ، $Y_2 = 5$.

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{5 - (-3)}{4 - 2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{إذن الميل}$$

والمعادلة المطلوبة هي $Y - Y_1 = m(X - X_1)$ or $Y - (-3) = 4(X - 2)$

والتي يمكن كتابتها في الصورة $Y + 3 = 4(X - 2)$ أو $Y = 4X - 11$

الطريقة ٢ : باستخدام طريقة المسألة ١٣-١ (ب) .

معادلة الخط المستقيم هي $Y = a_0 + a_1 X$

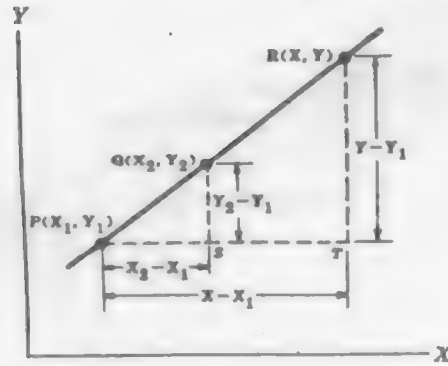
بما أن النقطة $(2, -3)$ على الخط فإن (١) $-3 = a_0 + 2a_1$

بما أن النقطة $(4, 5)$ على الخط فإن (٢) $5 = a_0 + 4a_1$

بحل (١) ، (٢) آنياً ، نحصل على $a_0 = -11$ و $a_1 = 4$ وبهذا فإن المعادلة المطلوبة هي

$$Y = -11 + 4X \quad \text{أو} \quad Y = 4X - 11$$

١٣ - ٤ فسر بالرسم خطوات حل المسألة ١٣-٣ (أ)



شكل ١٣ - ٥

الحل :

في الشكل ١٣-٥ وضعنا الخط الذي يمر خلال النقط P و Q والتي كانت إحداثياتها (X_1, Y_1) و (X_2, Y_2) على الترتيب . النقطة R والتي إحداثياتها (X, Y) تمير عن أى نقطة أخرى على الخط .

من المثلثين المتشابهين PRT ، PQS

نجد أن

$$(١) \quad \frac{RT}{TP} = \frac{QS}{SP} \text{ or } \frac{Y - Y_1}{X - X_1} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

بضرب الطرفين في $X - X_1$

$$Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X - X_1)$$

وهي المعادلة المطلوبة للخط .

لاحظ أن كلا النسبتين في (١) هو الميل m وبهذا فإنه يمكن كتابة :

$$Y - Y_1 = m(X - X_1)$$

١٣ - ٥ أوجد (أ) الميل ، (ب) المعادلة (ج) الجزء المقطوع من محور Y (د) الجزء المقطوع من محور X ، للخط الذي

يمر بالنقط $(1, 5)$ ، $(4, -1)$.

الحل :

$$(أ) \quad (X_1 = 1, Y_1 = 5) \text{ و } (X_2 = 4, Y_2 = -1)$$

إذن

$$m = \text{الميل} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{-1 - 5}{4 - 1} = \frac{-6}{3} = -2$$

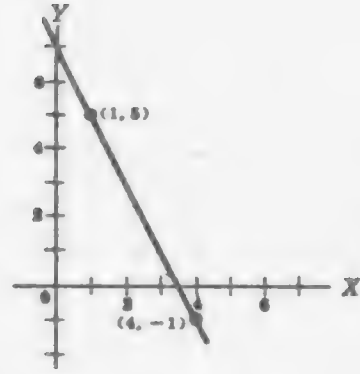
المطلوب

المقابل

$Y -$

المطلوبة هي

والإشارة السالبة في الميل تشير إلى أنه
بزيادة X فإن Y تتناقص ، كما هو موضح
بالشكل ١٣ - ٦ .



شكل ١٣ - ٦

(ب) معادلة الخط هي

$$Y - Y_1 = m(X - X_1) \quad \text{أو} \quad Y - 5 = -2(X - 1)$$

أي

$$Y = 7 - 2X \quad \text{أو} \quad Y - 5 = -2X + 2$$

وهذه يمكن أيضاً الحصول عليها باستخدام الطريقة الثانية في المسألة ١٣ - ٣ (ب) .

(ج) الجزء المقطوع من محور Y ، وهو قيمة Y عند $X = 0$ ، يعطى بالمعادلة $Y = 7 - 2(0) = 7$ وهذه يمكن أيضاً الحصول عليها مباشرة من الرسم .

(د) الجزء المقطوع من محور X ، وهو قيمة X عند $Y = 0$ نحصل عليه بالتعويض عن $Y = 0$ في المعادلة $Y = 7 - 2X$ ، وعلى ذلك فإن $0 = 7 - 2X$ أو $2X = 7$ أي $X = 3.5$.

و هذا يمكن ملاحظته أيضاً مباشرة من الرسم .

٩ - ١ أوجد معادلة الخط الذي يمر خلال النقطة (4, 2) والذي يوازي الخط $2X + 3Y = 6$.

الحل :

إذا كان الخطان متوازيين ، فإن ميلهما متساو . من المعادلة $2X + 3Y = 6$ فإن $3Y = 6 - 2X$ أو $Y = 2 - \frac{2}{3}X$ بحيث أن ميل الخط هو $m = -\frac{2}{3}$. إذن معادلة الخط المطلوبة هي

$$Y - 2 = -\frac{2}{3}(X - 4) \quad \text{أو} \quad Y - Y_1 = m(X - X_1)$$

والتي يمكن أيضاً كتابتها على الصورة $2X + 3Y = 14$

طريقة أخرى :

أي خط مواز لـ $2X + 3Y = 6$ معادلته تكون على الصورة $2X + 3Y = c$ والحصول على c ، اعتبر $X = 4$ ، $Y = 2$. إذن $c = 2(4) + 3(2) = 14$ والمعادلة المطلوبة هي $2X + 3Y = 14$.

بالمقارنة بين (٥) وحدود الثقة $(\bar{X} \pm z_c \sigma / \sqrt{N})$ المذكورة في الفصل التاسع ، صفحة ٢٥٧٢ ، نجد أنه في العينات أحللتنا بدلا من z_c (والتي نحصل عليها من التوزيع الطبيعي) ، t_c (والتي نحصل عليها من توزيع t) وبدلا من σ استخدمنا $s = \sqrt{N/(N-1)}s$ ، تقدير σ من العينة .

و كلما زادت N ، فإن كلا الطريقتين يتجهان نحو الاتفاق .

اختبار الفروض والمعنوية :

اختبارات الفروض والمعنوية التي نوقشت بالفصل العاشر يمكن بسهولة أن تمتد لتشمل المشاكل الخاصة بالعينات الصغيرة ، والاختلاف الوحيد هو أن قيم z أو إحصائية z يستبدل بها القيم t أو إحصائية t الملائمة .

١ - الأوساط :

لاختبار الفرض H_0 إن مجتمعا يتوزع توزيعاً طبيعياً متوسط μ ، فإننا نستخدم قيم t أو إحصائية t .

$$(٦) \quad t = \frac{\bar{X} - \mu}{s} \sqrt{N-1} = \frac{\bar{X} - \mu}{s} \sqrt{N}$$

حيث \bar{X} هو الوسط الحسابى لعينة حجمها N

وهذا مناظر لاستخدام قيم $z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{N}}$ ، لقيم N الكبيرة فيها عدأ استخدام

$s = \sqrt{N/(N-1)}s$ بدلا من σ . الفرق أنه بينما z تتوزع توزيعاً طبيعياً ، فإن t تتبع توزيع أستودينت . كلما كبرت N فإنهما يتجهان نحو الاتفاق .

٢ - الفروق بين الأوساط :

افترض أن عينتين عشوائيتين حجمهما N_1 و N_2 مأخوذتان من مجتمعات تتوزع توزيعاً طبيعياً انحرافاتها المعيارية متساوية $(\sigma_1 = \sigma_2)$ افترض كذلك أن متوسطات العينتين هما \bar{X}_1 ، \bar{X}_2 وانحرافاتهما المعيارية هي s_1 ، s_2 . لاختبار الفرض H_0 أن العينتين مسحوبتين من نفس المجتمع (أى أن $\mu_1 = \mu_2$) وكذلك $(\sigma_1 = \sigma_2)$ فإننا نستخدم قيم t المعرفة كالاتى :

$$(٧) \quad t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s \sqrt{1/N_1 + 1/N_2}} \quad \text{حيث} \quad s = \sqrt{\frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2 - 2}}$$

حيث تتبع t توزيع أستودينت بدرجات حرية $v = N_1 + N_2 - 2$.

بالرجوع إلى المعادلة (٢) ، صفحة ٢٧٢ ، نجد أننا نحصل على المعادلة (٧) أعلاه بوضع

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ في قيم z في المعادلة (٢) المشار إليها ثم نستخدم كتقدير σ^2 الوسط المرجح

$$\frac{N_1 - 1}{N_1 + N_2 - 2} s_1^2 + \frac{N_2 - 1}{N_1 + N_2 - 2} s_2^2 = \frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2 - 2}$$

حيث s_1^2 و s_2^2 تقديرات غير متحيزة لقيم σ_1^2 و σ_2^2 (أنظر الخاصية (٢) ، صفحة ١١٦) .

توزيع كاي - تربيع (كا^٢)

عرف الاحصائية

$$(٨) \quad \chi^2 = \frac{Ns^2}{\sigma^2} = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_N - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

حيث χ هو الحرف اليوناني كاي و χ^2 تقرأ كاي تربيع .

إذا أخذنا في الاعتبار عينات حجمها N مأخوذة من مجتمع طبيعي انحرافه المعياري σ ، وإذا حسبنا لكل عينة χ^2 ، فإنه يمكننا الحصول على توزيع المعاينة لـ χ^2 .
ويسمى توزيع كاي - تربيع (أو كاي^٢) ، ويعرف كالتالي :

$$(٩) \quad Y = Y_0 (\chi^2)^{\frac{1}{2}(\nu-2)} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} = Y_0 \chi^{\nu-2} e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$$

حيث $\nu = N - 1$ هو عدد درجات الحرية .
 Y_0 هو مقدار ثابت يعتمد على ν بحيث يجعل المساحة تحت المنحنى مساوية الواحد .

يبين الشكل ١١ - ٢ توزيعات كاي^٢ المقابلة لبعض قيم ν المختلفة . نهاية Y العظمى تتحقق عند $\chi^2 = \nu - 2$ لقيم $\nu \geq 2$.

فترات الثقة لـ χ^2 :

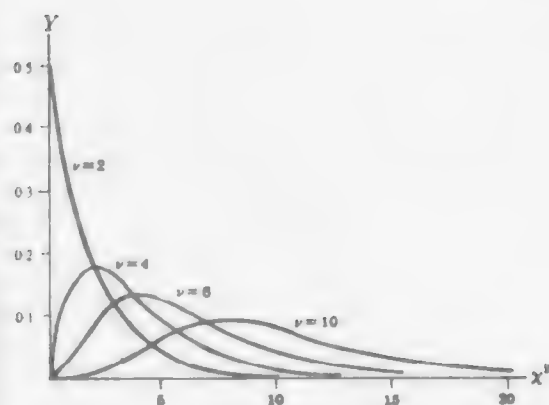
كما فعلنا بالنسبة للتوزيع الطبيعي وتوزيع t ، فيمكن أن نعرف 95% ، 99% أو غيرها من حدود الثقة أو فترات الثقة لـ χ^2 باستخدام جداول توزيع χ^2 بالملحق ، صفحة ٥٣٥ . بهذه الطريقة يمكن تقدير داخل حدود ثقة معينة الانحراف المعياري للمجتمع σ بدلالة الانحراف المعياري للعينة s .

على سبيل المثال ، إذا كانت $\chi_{0.025}^2$ و $\chi_{0.975}^2$ هي قيم χ^2 (تسمى القيم الحرجة) حيث 2.5% من المساحة تقع في كل من « طرف » التوزيع ، فإن 95% حدود ثقة هي

$$(١٠) \quad \chi_{0.025}^2 < \frac{Ns^2}{\sigma^2} < \chi_{0.975}^2$$

ومنها نجد أن σ قدرت بحيث تقع داخل الفترة

$$(١١) \quad \frac{s\sqrt{N}}{\chi_{0.975}} < \sigma < \frac{s\sqrt{N}}{\chi_{0.025}}$$



توزيع كاي^٢ لقيم ν المختلفة

شكل ١١ - ٢

بدرجة ثقة 95% . بنفس الطريقة فإنه يمكن الحصول على فترات الثقة الأخرى . القيم $\chi_{0.035}$ و $\chi_{0.975}$ تمثل قيم الثنائيات 2.5 و 97.5 على الترتيب .

الجدول فى الملحق (IV) ، صفحة ٥٣٥ يعطى الثنائيات المقابلة لدرجات الحرية ν . لقيم ν الكبيرة ($\nu \geq 30$) ν يمكن أن نستفيد من أن $(\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1})$ قريب جداً من التوزيع الطبيعي الذى متوسطه الصفر وانحرافه المعيارى الواحد ، بحيث يمكن استخدام جداول التوزيع الطبيعي إذا كانت $\nu \geq 30$. إذن إذا كانت χ^2_p و z_p ثنائيات توزيع كا^٢ والتوزيع الطبيعي على الترتيب فإن

$$\chi^2_p = \frac{1}{2}(z_p + \sqrt{2\nu - 1})^2 \quad (١٢)$$

فى هذه الحالات تتفق النتائج بدرجة كبيرة مع النتائج التى حصلنا عليها فى الفصل الثامن والتاسع .

لمزيد من تطبيقات توزيع كا^٢ أنظر الفصل الثانى عشر .

درجات الحرية :

حتى يمكن حساب إحصائية مثل (١) أو (٨) ، فن الضرورى استخدام مشاهدات نحصل عليها من العينة كذلك بعض معالم المجتمع . فإذا كانت هذه المعالم غير معروفة فيجب تقديرها من العينة .

عدد درجات الحرية فى إحصائية بشكل عام يرمز لها بالرمز ν وتعرف بأنها العدد N من المشاهدات المستقلة فى العينة (أى حجم العينة) ناقص العدد k لمعالم المجتمع والذى يجب تقديره من مشاهدات العينة . بالرموز ، $\nu = N - k$.

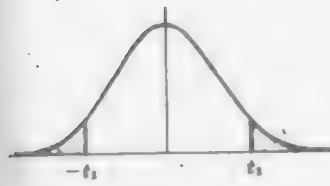
فى حالة الإحصائية (١) فإن عدد المشاهدات المستقلة فى العينة هو N ، ومنها يمكن حساب قيم \bar{X} و s . وحيث أنه يجب أن نقدر μ ، فإن $k = 1$ بحيث $\nu = N - 1$.

فى حالة الإحصائية (٨) ، عدد المشاهدات المستقلة فى العينة هو N ، ومنها يمكن حساب قيمة s . وحيث أنه يجب أن نقدر σ ، فإن $k = 1$ وعلى ذلك فإن $\nu = N - 1$.

مسائل محلولة

توزيع « أستودينت » ت

١١-١ شكل توزيع أستودينت t بدرجات حرية 9 موضح بالشكل ١١-٣ .



شكل ١١-٣

أوجد قيم t_1 التي تحقق الآتي :

(أ) المساحة المظلة إلى اليمين $= 0.05$

(ب) المساحة الكلية المظلة $= 0.05$

(ج) المساحة الكلية الغير مظلة $= 0.99$

(د) المساحة المظلة إلى اليسار $= 0.01$

(هـ) المساحة إلى يسار t_1 تساوى 0.90

الحل :

(أ) إذا كانت المساحة المظلة إلى اليمين هي 0.05 ، فإن المساحة إلى يسار t_1 هي $0.95 = (1 - 0.05)$ و $t_{0.95}$ تمثل المئينة 95 ، $t_{0.95}$.

بالرجوع إلى الجدول بالملحق III صفحة ٥٣٤ ، نتجه إلى أدنى تحت العمود المعنون v حتى نصل إلى الرقم 9 . ثم نتجه إلى اليمين حتى نصل إلى العمود المعنون $t_{0.95}$. والنتيجة هي 1.83 وهي قيمة t المطلوبة .

(ب) إذا كانت المساحة الكلية المظلة تساوى 0.05 ، فإن المساحة المظلة إلى اليمين هي 0.025 بالتناظر . بهذا فإن المساحة إلى يسار t_1 هي $0.975 = (1 - 0.025)$ وتمثل t_1 المئين 97.5 . $t_{0.975}$ من الجدول بالملحق III صفحة ٥٣٤ نجد أن قيمة t المطلوبة هي 2.26 .

(ج) إذا كانت المساحة الكلية غير المظلة هي 0.99 ، فإن المساحة الكلية المظلة هي $0.01 = (1 - 0.99)$ والمساحة المظلة إلى اليمين هي $0.005 = 0.01/2$. من الجدول نجد أن $t_{0.995} = 3.25$.

(د) إذا كانت المساحة المظلة إلى اليسار تساوى 0.01 ، بالتناظر فإن المساحة المظلة إلى اليمين هي 0.01 . من الجدول $t_{0.99} = 2.82$. بهذا فإن القيمة t الحرجة والتي تساوى المساحة المظلة إلى يسارها 0.01 هي -2.82 .

(هـ) إذا كانت المساحة إلى يسار t_1 هي 0.90 ، فإن t_1 تقابل المئين التسمين $t_{0.90}$ ، ومن الجدول يساوى 1.38 .

١٠-٢ أوجد القيم الحرجة t والتي تجعل المساحة في الطرف الأيمن لتوزيع t هي 0.05 إذا كانت درجات الحرية v تساوى (أ) 16 (ب) 27 (ج) 200 .

الحل :

باستخدام الجدول فى الملحق III ، صفحة ٥٣٤ ، نجد فى العمود المعنون $t_{0.95}$ القيم :

$$(أ) 1.75 \text{ مقابلة } v = 16$$

$$(ب) 1.70 \text{ مقابلة } v = 27$$

$$(ج) 1.645 \text{ مقابلة } v = 200$$

(القيمة الأخيرة هى القيمة التى يمكن الحصول عليها باستخدام المنحنى الطبيعى . فى الجدول بالملحق III ، صفحة ٥٣٤ ، وتقابل هذه القيمة الموجودة فى الصف الأخير المعنون ∞ أى ، ما لانهاية) .

١١ - ٣ تعطى 95% معاملات الثقة (من طرفين) للتوزيع الطبيعى بالقيم ± 1.96 . ماهى المعاملات المقابلة لتوزيع إذا كانت (أ) $v = 9$ (ب) $v = 20$ (ج) $v = 30$ (د) $v = 60$ ؟

الحل :

لمعاملات الثقة 95% « من طرفين » فإن المساحة الكلية المظلة فى الشكل ١١ - ٣ يجب أن تساوى 0.05 . بهذا فإن المساحة المظلة فى الطرف الأيمن هى 0.025 والقيمة الحرجة المقابلة t هى $t_{0.975}$. إذن معاملات الثقة المطلوبة هى $\pm t_{0.975}$. ولقيم v المعطاة نجد أن القيم المناظرة هى :

$$(أ) \pm 2.26 \quad (ب) \pm 2.09 \quad (ج) \pm 2.04 \quad (د) \pm 2.00$$

١١ - ٤ عينة من 10 قياسات لأقطار كرة أعطت متوسط $X = 4.38 \text{ mm}$ وانحراف معيارى $s = 0.06 \text{ mm}$. أوجد (أ) 95% (ب) 99% حدود ثقة القطر الفعل .

الحل :

$$(أ) 95\% \text{ حدود ثقة تعطى كما يلى } X \pm t_{0.975}(s/\sqrt{N-1}) \text{ بما أن } v = N-1 = 10-1 = 9$$

$$\text{نجد أن } t_{0.975} = 2.26 \text{ (أنظر أيضاً المسألة ١١ - ٣ (أ)) . إذن باستخدام } X = 4.38 \text{ و } s = 0.06$$

$$\text{فإن } 95\% \text{ حدود الثقة المطلوبة هى } 4.38 \pm 2.26(0.06)/\sqrt{10-1} = 4.38 \pm 0.0452 \text{ mm} \text{ ، أى أننا نكون}$$

عل ثقة بنسبة 95% بأن الوسط الحقيقى يقع بين

$$(4.38 - 0.045) = 4.335 \text{ mm} \text{ و } (4.38 + 0.045) = 4.425 \text{ mm}$$

$$(ب) 99\% \text{ حدود ثقة تعطى كما يلى } X \pm t_{0.995}(s/\sqrt{N-1}) \text{ . لقيمة } v = 9, t_{0.995} = 3.25$$

$$\text{إذن } 99\% \text{ حدود الثقة هى } 4.38 \pm 3.25(0.06)/\sqrt{10-1} = 4.38 \pm 0.0650 \text{ mm} \text{ ، فترة ثقة هى}$$

$$4.315 \text{ إلى } 4.445$$

١١ - ٥ (أ) حل المسألة السابقة مفترضاً صلاحية نظرية العينات ذات الحجم الكبير .

(ب) قارن نتائج كلا الطريقتين .

الحل :

(أ) باستخدام نظرية العينات ذات الحجم الكبير ، 95% حدود الثقة هي

$$\bar{X} \pm 1.96\sigma/\sqrt{N} = 4.38 \pm 1.96(0.06/\sqrt{10}) = 4.38 \pm 0.037 \text{ mm}$$

وقد استخدمنا الانحراف المعياري للعينه 0.06 ، كتقدير σ .

كذلك ، فإن 99% حدود الثقة هي

$$\bar{X} \pm 2.58\sigma/\sqrt{N} = 4.38 \pm 2.58(0.06/\sqrt{10}) = 4.38 \pm 0.049 \text{ mm}$$

(ب) في كل حالة فإن فترة الثقة باستخدام طريقة العينات الصغيرة أو الطريقة المبسطة للعينات ، أوسع من تلك التي حصلنا عليها باستخدام نظرية العينات الكبيرة . وهذا متوقع لأن درجة أقل تكون متاحة باستخدام العينات الصغيرة عنها باستخدام العينات الكبيرة .

١١-٦ آلة لإنتاج الجلب المستديرة أنتجت في الماضي جلب سمكها 0.50 mm ، لتقرير ما إذا كانت الآلة تعمل بصورة مرضية ، أخذت عينة من 10 جلب ووجد أن متوسط سمكها هو 0.53 mm وانحرافها المعياري 0.03 mm . اختبر الفرض أن الآلة تعمل بصورة مرضية باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01

الحل :

المطلوب التقرير بين الفروض

$$H_0 : \mu = 0.50 \text{ ، الآلة تعمل بصورة مرضية .}$$

$$H_1 : \mu \neq 0.50 \text{ ، الآلة لا تعمل بصورة مرضية .}$$

بحيث يكون المطلوب هو اختبار من طرفين .

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} = \frac{0.53 - 0.50}{0.03/\sqrt{10}} = 3.00 \text{ ، فإن تحت الفرض } H_0$$

(أ) لاختبار من طرفين عند مستوى المعنوية 0.05 ، تنبئ قاعدة اتخاذ القرارات التالية :

(١) اقبل H_0 إذا كانت t تقع داخل الفترة من - $t_{0.975}$ إلى $t_{0.975}$ والتي لدرجات حرية $10 - 1 = 9$ تساوى الفترة من 2.26 — إلى 2.26 .

(٢) ارفض H_0 فيما عدا ذلك .

بما أن $t = 3.00$ ، فإننا نرفض H_0 عند المستوى 0.05 .

(ب) لاختبار من طرفين عند مستوى المعنوية 0.01 ، تنبئ قاعدة اتخاذ القرارات التالية :

(١) اقبل H_0 إذا كانت t تقع داخل الفترة من - $t_{0.995}$ إلى $t_{0.995}$ والتي لدرجات حرية $10 - 1 = 9$ تساوى الفترة من 3.25 — إلى 3.25 .

(٢) ارفض H_0 فيما عدا ذلك .

بما أن $t = 3.00$ ، فإننا نرفض H_0 عند المستوى 0.01 . وحيث أنه يمكننا رفض H_0 عند المستوى 0.05 ولكن ليس عندى المستوى 0.01 ، فيمكن القول بأن نتائج العينة محتملة المعنوية .

(أنظر المصطلح في نهاية المسألة ١٠ - ٥ الفصل العاشر) . وينصح في هذه الحالة باختبار الآلة أو تختبر عينة ثانية على الأقل .

١١ - ٧ اختبرت 6 حبال من إنتاج أحد المصانع لمعرفة قوة مقاومتها للقطع فأظهرت متوسط قوة مقاومة للقطع 7750 N بانحراف معيارى 145 N ، بينما يدعى المصنع المنتج الرقم 8000 N كقوة مقاومة للقطع لإنتاجه . هل يمكن تأييد ادعاء المنتج عند مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 ؟

الحل :

يجب أن نقرر بين الفرضين

$H_0 : \mu = 8000 \text{ N}$ ، وادعاء المصنع له ما يبرره

$H_1 : \mu < 8000 \text{ N}$ ، وادعاء المصنع ليس له ما يبرره .

أى أن المطلوب هو استخدام اختبار من طرف واحد .

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s} \sqrt{N-1} = \frac{7750 - 8000}{145} \sqrt{6-1} = -3.86 \quad \text{فإن} \quad \text{تحت الفرض } H_0$$

(أ) لاختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.05 ، نتبنى قاعدة اتخاذ القرارات التالية :

(١) اقبل H_0 إذا كانت t أكبر من $t_{0.05} = -2.01$ ، والى لدرجات حرية $5 = 6 - 1$ تعنى $t > -2.01$.

(٢) ارفض H_0 فيما عدا ذلك .

(ب) لاختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.01 ، نتبنى قاعدة اتخاذ القرارات التالية :

(١) اقبل H_0 إذا كانت t أكبر من $t_{0.01} = -3.36$ ، والى لدرجات حرية 5 تعنى $t > -3.36$.

(٢) ارفض H_0 فيما عدا ذلك .

بما أن $t = -3.86$ ، نرفض H_0 .

نستنتج من ذلك أنه من الصعب بشكل كبير قبول ادعاء المصنع .

١١ - ٨ نسبة الذكاء I.Q لـ 16 طالباً من منطقة معينة في مدينة كان متوسطها 107 بانحراف معيارى 10 ، بينما نسبة الذكاء

I.Q لـ 14 طالباً من منطقة أخرى بالمدينة كان متوسطها 112 بانحراف معيارى 8 .

هل هناك اختلاف معنوى بين نسب الذكاء في المجموعتين عند مستوى معنوية .

(أ) 0.01 (ب) 0.05 .

الحل :

إذا كانت μ_1 و μ_2 تمثل متوسط مجتمع نسبة الذكاء الطلبة من المنطقتين ، فإننا يجب أن نقرر بين الفرضين :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ، ولا يوجد فرق أساسي بين المجموعتين

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ، ويوجد فرق معنوي بين المجموعتين

تحت الفرض H_0 ، $t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma \sqrt{1/N_1 + 1/N_2}}$ where $\sigma = \sqrt{\frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2 - 2}}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{16(10)^2 + 14(8)^2}{16 + 14 - 2}} = 9.44 \text{ and } t = \frac{112 - 107}{9.44 \sqrt{1/16 + 1/14}} = 1.45. \quad \text{إذن}$$

(أ) باستخدام اختبار من طرفين عند مستوى معنوية 0.01 ، فيجب رفض H_0 إذا وقعت t خارج المدى من

$t_{0.995} -$ إلى $t_{0.995}$ والتي لدرجات حرية $(N_1 + N_2 - 2) = (16 + 14 - 2) = 28$

نعني المدى من 2.76 إلى 2.76 .

بهذا لا يمكن رفض الفرض H_0 عند مستوى معنوية 0.01 .

(ب) باستخدام اختبار من طرفين عند مستوى معنوية 0.05 ، فيجب رفض H_0 إذا وقعت t خارج المدى من

$t_{0.975} -$ إلى $t_{0.975}$ والتي لدرجات حرية 28 نعني المدى من 2.05 إلى 2.05 . بهذا لا يمكننا رفض

H_0 عند مستوى المعنوية 0.05 .

نستنتج من هذا أنه لا يوجد اختلاف معنوي بين نسبة الذكاء في المجموعتين .

١١ - ٩ في محطة للتجارب الزراعية كان المطلوب هو اختبار تأثير سماد من نوع معين على إنتاج القمح لهذا الفرض ، اختبرت

24 قطعة من الأرض لها نفس المساحة ، عولج نصفها بالسماد أما النصف الآخر فترك بدون معالجة (مجموعة ضابطة)

فيما عدا ذلك فالظروف بينهم متشابهة . وكان متوسط الغلة من القمح في المجموعة الضابطة هو 4.8 لتر بانحراف

معياري 4 لتر ، بينما متوسط غلة الفدان للقطع التي تم معالجتها هو 5.1 لتر بانحراف معياري 3.6 لتر . هل

يمكن أن نستنتج من ذلك أن هناك تحسن معنوي في إنتاج القمح نتيجة لاستخدام السماد ، إذا استخلصنا مستوى معنوية .

(أ) 1% (ب) 5% ؟

الحل :

إذا كانت μ_1 و μ_2 تمثل متوسط مجتمع غلة القمح من الأرض المعالجة والأرض غير المعالجة ، والمطلوب هو أن

نقرر بين الفرضين :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ، والفروق ترجع إلى الصدفة

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$ ، والسماد يؤدي إلى تحسين الغلة .

تحت الفرض H_0 ، $t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma \sqrt{1/N_1 + 1/N_2}}$ where $\sigma = \sqrt{\frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2 - 2}}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{12(4)^2 + 12(3.6)^2}{12 + 12 - 2}} = 3.97 \text{ and } t = \frac{5.1 - 4.8}{3.97 \sqrt{1/12 + 1/12}} = 1.85. \quad \text{إذن}$$

(أ) باستخدام اختبار من طرفين عند مستوى معنوية 0.01 ، فيجب رفض H_0 إذا كانت t أكبر من $t_{0.99}$ ،
والتي لدرجات حرية $22 = (12 + 12 - 2) = (N_1 + N_2 - 2)$ تساوى 2.52 .

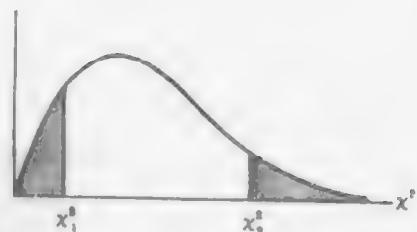
بهذا لا يمكن رفض H_0 عند مستوى المعنوية 0.01 .

(ب) باستخدام اختبار من طرف واحد عند مستوى معنوية 0.05 ، فيجب رفض H_0 إذا كانت t أكبر من
 $t_{0.95}$ ، والتي لدرجات حرية 22 تساوى 1.72 .

بهذا يمكن رفض H_0 عند مستوى المعنوية 0.05 . نستنتج من هذا أن التحسن في غلة القمح باستخدام السماد
هو محتمل المعنوية . أى أنه قبل الوصول إلى قرار حاسم خاص بفائدة السماد فقد يكون من المستحسن الحصول على
أدلة أكثر .

توزيع كا - تربيع (كا) :

١١ - ١٠ رسم توزيع كا - تربيع بـ 5 درجات حرية 5 موضع
بالشكل ١١ - ٤ .



شكل ١١ - ٤

أوجد القيم الحرجة لـ χ^2 التي تحقق الآتى :

(أ) المساحة المظللة إلى اليمين = 0.05

(ب) المساحة الكلية المظللة = 0.05

(ج) المساحة المظللة إلى اليسار = 0.10

(د) المساحة المظللة إلى اليمين = 0.01

الحل :

(أ) إذا كانت المساحة المظللة إلى اليمين هي 0.05 ، فإن المساحة إلى يسار χ^2 هي $0.95 = (1 - 0.05)$
و $\chi^2_{0.95}$ تمثل المئين 95 . $\chi^2_{0.95}$.

بالرجوع إلى الجدول فى المنق (IV) ، صفحة ٥٣٥ ، اتجه إلى أسفل تحت العمود المعلنون ٧ حتى
نصل إلى الرقم 5 . ثم اتجه إلى اليمين حتى نصل إلى العمود المعلنون $\chi^2_{0.95}$.

والنتيجة 11.1 هي القيمة الحرجة لـ χ^2 .

(ب) بما أن التوزيع غير متماثل ، فإن هناك عدداً كبيراً من القيم الحرجة والتي تجعل المساحة الكلية المظللة = 0.05
على سبيل المثال ، المساحة المظللة إلى اليمين قد تكون 0.04 ، بينما المساحة المظللة إلى اليسار 0.01 . ومن
المعتاد ، ما لم يذكر خلاف ذلك ، اختيار المساحتين متساويتين . فى هذه الحالة كل مساحة تساوى 0.025 .

إذا كانت المساحة المظلة إلى اليمين 0.025 ، فإن المساحة إلى يسار χ^2_2 هي $0.975 = 1 - 0.025$ و χ^2_2 تمثل المئين 97.5 ، $\chi^2_{0.975}$ والتي يساوي 0.831 .
هذا فإن القيم الحرجة هي 0.831 و 12.8 .

(ج) إذا كانت المساحة المظلة إلى اليسار هي 0.10 ، فإن χ^2_1 تمثل المئين العاشر $\chi^2_{0.10}$ ويساوي 1.61 .
(د) إذا كانت المساحة المظلة إلى اليمين هي 0.01 ، فإن المساحة إلى يسار χ^2_2 هي 0.99 و χ^2_2 تمثل المئين 99 ، $\chi^2_{0.99}$ والتي تساوي 15.1 .

١١-١١ أوجد القيم الحرجة لـ χ^2 والتي تجعل المساحة في الطرف الأيمن من توزيع χ^2 تساوي 0.05 ، إذا كان عدد درجات الحرية v (أ) 15 (ب) 21 (ج) 50 .

الحل :

باستخدام الجدول بالملحق IV ، صفحة ٥٣٥ ، في العمود المعنون $\chi^2_{0.95}$ نجد أن (أ) 25.0 تقابل $v = 15$ ،
(ب) 32.7 تقابل $v = 21$ (ج) 67.5 تقابل $v = 50$.

١٢-١١ أوجد وسيط χ^2 المقابل لدرجات حرية (أ) 9 (ب) 28 (ج) 40 .

الحل :

باستخدام الجدول بالملحق IV ، صفحة ٥٣٥ ، في العمود المعنون $\chi^2_{0.50}$ (بما أن الوسيط هو المئين الخمسين)
نجد أن القيم :

(أ) 8.34 تقابل $v = 9$ (ب) 27.3 تقابل $v = 28$ (ج) 39.3 تقابل $v = 40$.

من المهم ملاحظة أن قيم الوسيط قريبة جدا من عدد درجات الحرية . وفي الواقع فإنه لقيم $v > 10$ تساوي قيمة الوسيط (0.7 - v) ، كما يمكن ملاحظته من الجدول .

١٣-١١ الانحراف المعياري لأوزان 16 طالبا اختيروا بصورة عشوائية من مدرسة بها 1000 طالب كان 2.40 kg .
أوجد (أ) 95% (ب) 99% حدود ثقة للانحراف المعياري لجميع الطلبة بالمدرسة .

الحل :

(أ) 95% حدود ثقة تعطى بالصيغة $s\sqrt{N}/\chi_{0.025}$ و $s\sqrt{N}/\chi_{0.975}$ لدرجات حرية $v = 16 - 1 = 15$ ، $\chi^2_{0.975} = 27.5$ أو $\chi_{0.975} = 5.24$ و $\chi^2_{0.025} = 6.26$ أو $\chi_{0.025} = 2.50$.

إذن 95% حدود ثقة هي $2.40\sqrt{16}/5.24$ و $2.40\sqrt{16}/2.50$ أي 1.83 Kg و 3.84 Kg .
ونكون واثقين بدرجة 95% من أن الانحراف المعياري للمجتمع يقع بين 1.83 و 3.84 kg .

(ب) 99% حدود ثقة تعطي بالصيغة $s\sqrt{N}/\chi_{0.995}$ و $s\sqrt{N}/\chi_{0.005}$ لدرجات حرية $\nu = 16 - 1 = 15$ ، $\chi_{0.995}^2 = 32.8$ أو $\chi_{0.995} = 5.73$ و $\chi_{0.005}^2 = 4.60$ أو $\chi_{0.005} = 2.14$.

إذن 99% حدود ثقة هي $2.40\sqrt{16}/5.73$ و $2.40\sqrt{16}/2.14$ أى 1.68 kg و 4.49 kg ونكون واثقين بدرجة 99% من أن الانحراف المعياري للمجتمع يقع بين 1.68 و 4.49 kg .

١٤-١١ أوجد $\chi_{0.95}^2$ لدرجات الحرية (أ) $\nu = 50$ (ب) $\nu = 100$.

الحل :

لقيم ν أكبر من 30 ، يمكن أن نستخدم حقيقة أن $(\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1})$ تقترب بدرجة كبيرة من التوزيع الطبيعي الذي متوسطه الصفر وانحرافه المعياري واحد . إذن إذا كانت z_p هي قيم مئينات z للتوزيع الطبيعي المعياري ، فيمكن أن نكتب ، بدرجة تقريب جيدة .

$$\sqrt{2\chi_p^2} - \sqrt{2\nu - 1} = z_p \text{ or } \sqrt{2\chi_p^2} = z_p + \sqrt{2\nu - 1}$$

حيث

$$\chi_p^2 = \frac{1}{2}(z_p + \sqrt{2\nu - 1})^2$$

$$\chi_{0.95}^2 = \frac{1}{2}(z_{0.95} + \sqrt{2(50) - 1})^2 = \frac{1}{2}(1.64 + \sqrt{99})^2 = 69.2 \quad \text{فإن } \nu = 50 \text{ إذا كانت}$$

والتي تتفق بشكل جيد مع القيمة 67.5 المعطاة بالجدول في صفحة ٥٣٥

$$\chi_{0.95}^2 = \frac{1}{2}(z_{0.95} + \sqrt{2(100) - 1})^2 = \frac{1}{2}(1.64 + \sqrt{199})^2 = 124.0 \quad \text{فإن } \nu = 100 \text{ إذا كانت}$$

(القيمة الفعلية = 124.3)

١٥-١١ الانحراف المعياري للعمر الانتاجي لمينة من 200 من لمبات الاضاءة هو 100 ساعة . أوجد (أ) 95% (ب) 99% حدود ثقة للانحراف المعياري لجميع لمبات الاضاءة من هذا النوع .

الحل :

$$(أ) 95\% \text{ حدود ثقة تعطي بالصيغة } s\sqrt{N}/\chi_{0.975} \text{ و } s\sqrt{N}/\chi_{0.025}$$

لدرجات حرية $\nu = 200 - 1 = 199$ ، نجد كافي المسألة ١٤-١١

$$\chi_{0.975}^2 = \frac{1}{2}(z_{0.975} + \sqrt{2(199) - 1})^2 = \frac{1}{2}(1.96 + 19.92)^2 = 239$$

$$\chi_{0.025}^2 = \frac{1}{2}(z_{0.025} + \sqrt{2(199) - 1})^2 = \frac{1}{2}(-1.96 + 19.92)^2 = 161$$

ومنها $\chi_{0.975} = 15.5$ و $\chi_{0.025} = 12.7$

إذن 95% حدود ثقة هي $100\sqrt{200}/15.5 = 91.2$ و $100\sqrt{200}/12.7 = 111.3$ ساعة
 أى أننا نكون واثقين بدرجة 95% من أن الانحراف المعياري للمجتمع يقع بين 91.2 و 111.3 ساعة .
 يجب مقارنة هذه النتيجة بالمسألة ١٧-٩ (١) بالفصل التاسع .

(ب) 99% حدود ثقة تعطى بالصيغة $\sqrt{N}/\chi_{0.005}$ و $\sqrt{N}/\chi_{0.995}$ لدرجات حرية
 $\nu = 200 - 1 = 199$.

$$\begin{aligned}\chi_{0.995}^2 &= \frac{1}{2}(z_{0.995} + \sqrt{2(199) - 1})^2 = \frac{1}{2}(2.58 + 19.92)^2 = 253 \\ \chi_{0.005}^2 &= \frac{1}{2}(z_{0.005} + \sqrt{2(199) - 1})^2 = \frac{1}{2}(-2.58 + 19.92)^2 = 150\end{aligned}$$

ومنها $\chi_{0.005} = 12.2$ و $\chi_{0.995} = 15.9$

إذن 99% حدود ثقة هي $100\sqrt{200}/15.9 = 88.9$ و $100\sqrt{200}/12.2 = 115.9$ ساعة
 على الترتيب .

أى أننا نكون واثقين بدرجة 99% من أن الانحراف المعياري للمجتمع يقع بين 88.9 و 115.9 ساعة .
 يجب مقارنة هذه النتيجة بالمسألة ١٧-٩ (١) بالفصل التاسع .

١٦-١١ هل يمكن الحصول على 95% فترة ثقة للانحراف المعياري للمجتمع بحيث يكون طولها أقل من تلك التى حصلنا عليها
 في المسألة ١٥-١١ (١)

الحل :

حدود الثقة 95% للانحراف المعياري للمجتمع بالمسألة ١٥-١١ (١) حصلنا عليها باختيار قيم χ^2 الحرجة
 بحيث تكون المساحة في كل طرف هي 2.5% . من الممكن الحصول على 95% حدود ثقة أخرى باختيار
 قيم χ^2 الحرجة بحيث تكون المساحات على الأطراف تساوى 5% أو 0.05 ، ولكن المساحة في طرف لاتساوى
 المساحة في الطرف الآخر .

الجدول ١١-١ يظهر عديد من القيم الحرجة (باستخدام طريقة المسألة ١٤-١١) و 95% فترات الثقة
 المقابلة .

جدول ١١-١

القيم الحرجة	فترة ثقة	الطول
$\chi_{0.01} = 12.44, \chi_{0.99} = 15.32$	92.3 to 113.7	21.4
$\chi_{0.02} = 12.64, \chi_{0.97} = 15.42$	91.7 to 111.9	20.2
$\chi_{0.03} = 12.76, \chi_{0.96} = 15.54$	91.0 to 110.8	19.8
$\chi_{0.04} = 12.85, \chi_{0.95} = 15.73$	88.9 to 110.0	20.1

من هذا الجدول نجد أن هناك 95% فترة ثقة طولها 19.8 فقط وهي من 91.0 إلى 110.8 .
ويمكن الحصول على فترة ثقة طولها أقل عن طريق تكرار نفس أسلوب الحل ، باستخدام قيم حرجة مثل $\chi_{0.031}$ و $\chi_{0.981}$ و $\chi_{0.032}$ و $\chi_{0.982}$.
وهكذا . بشكل عام ، فإن النقص في الفترة التي يمكن الحصول عليها بهذه الطريقة يكون في العادة قيمة صغيرة يمكن إهمالها ولا يستحق المجهود المبذول في الحصول عليها .

١٧-١١ في فترات سابقة كان الانحراف المعياري لأوزان عبوات زنة 40.0 N تملأ بواسطة آلة معينة هو 0.25 .
سحبت عينة عشوائية من 20 عبوة فكان انحرافها المعياري 0.32 N . هل هذه الزيادة الظاهرة في التشتت
معنوية عند مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 .

الحل :

يجب أن نقرر بين الفروض :

$$H_0 : \sigma = 0.25 \text{ ، والنتيجة المشاهدة ترجع إلى الصدفة}$$

$$H_1 : \sigma > 0.25 \text{ ، وهناك زيادة في التشتت .}$$

$$\chi^2 \text{ قيمة العينة هي } \chi^2 = Ns^2/\sigma^2 = 20(0.32)^2/(0.25)^2 = 32.8.$$

(أ) باستخدام اختبار من طرف واحد ، فيجب أن نرفض H_0 عند مستوى المعنوية 0.05 إذا كانت
قيمة χ^2 المحسوبة من العينة أكبر من $\chi_{0.95}^2$ ، وهي تساوي 30.1 لدرجات حرية $\nu = 20 - 1 = 19$.
بهذا يجب رفض H_0 عند مستوى معنوية 0.05 .

(ب) باستخدام اختبار من طرف واحد ، فيجب أن نرفض H_0 عند مستوى المعنوية 0.01 إذا كانت قيمة χ^2
المحسوبة من العينة أكبر من $\chi_{0.99}^2$ ، وهي تساوي 36.2 لدرجات حرية 19 . بهذا لا يمكن رفض H_0
عند مستوى معنوية 0.01 .

من هذا تستنتج أن التشتت من المحتمل أن يكون قد زاد ويجب اختيار الآلة .

مسائل اضافية

توزيع كا - تربيع (كا^٢) :

١٨-١١ لتوزيع استودينت بـ ١٥ درجات حرية ، أوجد قيم t_1 بحيث تكون :

(أ) المساحة إلى يمين t_1 هي 0.10

(ب) المساحة إلى يسار t_1 هي 0.95

(ج) المساحة إلى يمين t_1 هي 0.01

(د) مجموعة المساحة إلى يمين t_1 وإلى يسار $-t_1$ هي 0.01

(هـ) المساحة بين $-t_1$ إلى t_1 هي 0.95 .

ج : (أ) 2.60 (ب) 1.75 (ج) 1.34 (د) 2.95 (هـ) 2.13

١٩-١١ أوجد القيم الحرجة لـ t والتي تجعل المساحة في الطرف الأيمن لتوزيع t مساوية 0.01 . إذا كانت درجات

الحرية v مساوية (أ) 4 (ب) 12 (ج) 25 (د) 60 (هـ) 150 .

ج : (أ) 3.75 (ب) 2.68 (ج) 2.48 (د) 2.39 (هـ) 2.33 .

٢٠-١١ أوجد قيم t_1 لتوزيع استودينت والتي تحقق كل من الشروط التالية :

(أ) المساحة بين $-t_1$ و t_1 تساوى 0.9 و $v = 25$

(ب) المساحة إلى اليسار من $-t_1$ تساوى 0.025 و $v = 20$

(ج) مجموع المساحة إلى اليمين من t_1 وإلى اليسار من $-t_1$ هي 0.01 و $v = 5$

(د) المساحة إلى يمين t_1 هي 0.55 و $v = 16$.

ج : (أ) 1.71 (ب) 2.09 (ج) 4.03 (د) 0.128 - .

٢١-١١ إذا كان المتغير U يتبع توزيع استودينت حيث $v = 10$. أوجد الثابت C بحيث تكون :

(أ) $\Pr \{ U > C \} = 0.05$

(ب) $\Pr \{ -C \leq U \leq C \} = 0.98$

(ج) $\Pr \{ U \leq C \} = 0.20$

(د) $\Pr \{ U \geq C \} = 0.90$.

ج : (أ) 1.81 (ب) 2.76 (ج) 8.79 - (د) 1.37 -

٢٢-١١ إذا كان 99% معاملات الثقة (« من طرفين ») للتوزيع الطبيعي تعطى بالقيمة ± 2.58 .
ماهى المعاملات المقابلة لتوزيع t إذا كانت :

$$(أ) \nu = 4 \quad (ب) \nu = 12 \quad (ج) \nu = 25 \quad (د) \nu = 30 \quad (هـ) \nu = 40$$

ج : (أ) ± 4.60 (ب) ± 3.06 (ج) ± 2.79 (د) ± 2.75 (هـ) ± 2.70 .

٢٣-١١ عينة من 12 قياس لقوة مقاومة خيوط النايلون للقطع أعطت متوسطا $7.38 N$ وانحراف معيارى $1.24 N$.
أوجد (أ) 95% (ب) 99% حدود ثقة للقيمة الفعلية لقوة المقاومة للقطع .

$$ج : (أ) 7.38 \pm 0.82 N \quad (ب) 7.38 \pm 1.16 N$$

٢٤-١١ حل المسألة السابقة مفترضا أنه يمكن استخدام نظرية العينات الكبيرة وقارن بين النتائج التى حصلت عليها .

$$ج : (أ) 7.38 \pm 0.73 N \quad (ب) 7.38 \pm 0.96 N$$

٢٥-١١ خمسة قياسات لرد فعل شخصى لمنشط معين سجلت كالاتى 0.28, 0.30, 0.27, 0.33, 0.31 ثانية .

أوجد (أ) 95% (ب) 99% حدود ثقة لرد الفعل الحقيقى .

$$ج : (أ) 0.298 \pm 0.030 \text{ ثانية} \quad (ب) 0.298 \pm 0.049 \text{ ثانية}$$

٢٦-١١ كان متوسط العمر الإنتاجى للمبات إضاءة من إنتاج أحد الشركات هو 1120 ساعة بانحراف معيارى 125 ساعة

سجبت حديثا عينة من 8 لمبات إضاءة من إنتاج جديد فكان متوسط عمرها الإنتاجى 1070 ساعة . اختبر الفرض

أن متوسط العمر الإنتاجى للمبات لم يتغير ، باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01

ج : باستخدام اختبار من طرفين نجد أنه لا يوجد دليل عند أى المستويين 0.05 أو 0.01 يشير إلى أن متوسط

الإنتاجى قد تغير .

٢٧-١١ فى المسألة السابقة اختبر الفرض $\mu = 1120$ ساعة ضد الفرض البديل $\mu < 1120$ ساعة ، باستخدام مستوى

المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01

ج : الاختبار من طرف واحد لا يشير إلى تناقص فى المتوسط عند أى المستويين 0.05 أو 0.01 .

٢٨-١١ مواصفات إنتاج شبكة معدنية تتطلب أن يكون بها 23.2% نحاس . حلت عينة من 10 من المنتج أظهرت أن

متوسط نسبة النحاس 23.5% وانحراف معيارى 0.24% .

هل يمكن أن نستنتج عند مستوى المعنوية :

(أ) 0.01 (ب) 0.05 بأن الإنتاج يطابق المواصفات ؟

ج : باستخدام اختبار من طرفين عند كلا المستويين نجد أن الإنتاج لا يقابل المواصفات المطلوبة .

٢٩-١١ فى المسألة ٢٨-١١ اختبر صحة الفرض القائل أن متوسط محتويات النحاس أعلى مما هو مطلوب طبقاً للمواصفات ، باستخدام مستوى المعنوية (١) 0.01 (ب) 0.05

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد عند كلا المستويين يظهر أن متوسط محتويات النحاس أعلى من المطلوب طبقاً للمواصفات .

٣٠-١١ خبير فى الكفاية الإنتاجية يدعى ، أنه بإدخال نوع جديد من النظام الآلى فى عمليات الإنتاج فإنه يمكن خفض الوقت المطلوب للإنتاج بصورة ملحوظة . ونظراً للتكاليف المتضمنة فى عملية صيانة الآلات ، فإن المدير يشعر بأنه ما لم ينخفض وقت الإنتاج بما لا يقل عن 8.0% فإنه لا يمكن الموافقة على إدخال العملية الجديدة . أظهرت نتائج ست تجارب بأن وقت الانتاج انخفض بنسبة 8.4% بانحراف معيارى 0.32% .

باستخدام مستوى المعنوية (١) 0.01 (ب) 0.05

اختبر صحة الفرض القائل أن النظام الجديد يجب إدخاله .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد يظهر أن النظام الجديد يجب ألا يدخل إذا استخدم مستوى المعنوية 0.01 ، ولكن يجب إدخاله إذا كان مستوى المعنوية المستخدم 0.05 .

٣١-١١ باستخدام النوع A من البترول كان متوسط عدد الكيلومترات المقطوعة بواسطة 5 موشيكلات متماثلة تحت ظروف متماثلة لكل لتر من البترول هو 22.6 بانحراف معيارى 0.48 . وباستخدام النوع B ، كان المتوسط هو 21.4 بانحراف معيارى 0.54 . باستخدام مستوى معنوية 0.05 ، اختبر ما إذا كان النوع A أفضل حقيقة من النوع B فيما يختص بعدد الكيلومترات المقطوعة .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد يظهر أن النوع A أفضل من النوع B عند مستوى المعنوية 0.05 .

٣٢-١١ اختبر نوعان من الكيماويات A و B لقياس درجة أكسبتها PH . أظهر تحليل ، عينات من A أن متوسط أكسبتها pH هو 7.52 بانحراف معيارى 0.024 . وأظهر تحليل 5 عينات من B متوسط أكسبتها pH هو 7.49 بانحراف معيارى 0.032 . باستخدام مستوى معنوية 0.05 ، حدد ما إذا كان هناك اختلاف بين نوعى المحلول فيما يختص بقيم pH .

ج : باستخدام اختبار من طرفين عند مستوى المعنوية 0.05 ، لا يمكن أن نستنتج على أساس هذه العينات من أن هناك اختلافاً فى درجة الأكسدة بين نوعى المحلول .

٣٣-١١ فى اختبار فى علم النفس ، كان متوسط درجات 12 طالباً فى فصل هو 78 والانحراف المعيارى 6 ، بينما كان درجات 15 طالباً فى فصل آخر هو 74 بانحراف معيارى 8 . باستخدام مستوى معنوية 0.05 ، حدد ما إذا كانت المجموعة الأولى أعلى مستوى من المجموعة الثانية .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.05 ، نستنتج أن المجموعة الأولى ليست أعلى مستوى من المجموعة الثانية .

توزيع كا - تربيع (كا^٢) :

٣٤-١١ لتوزيع كا - تربيع بدرجات حرية 12 ، أوجد قيم χ^2_c بحيث تكون :

(أ) المساحة إلى يمين χ^2_c هي 0.05

(ب) المساحة إلى يسار χ^2_c هي 0.99

(ج) المساحة إلى يمين χ^2_c هي 0.025

ج : (أ) 21.0 (ب) 26.2 (ج) 23.3

٣٥-١١ أوجد القيم الحرجة لـ χ^2 والتي تكون المساحة في الطرف الأيمن من توزيع χ^2 بالنسبة لها هي 0.05 ،

إذا كانت درجات الحرية ν لها مساوية :

(أ) 8 (ب) 19 (ج) 28 (د) 40

ج : (أ) 15.5 (ب) 30.1 (ج) 41.3 (د) 55.8

٣٦-١١ حل المسألة ٣٥-١١ إذا كانت المساحة في الطرف الأيمن هي 0.01

ج : (أ) 20.1 (ب) 36.2 (ج) 48.3 (د) 63.7

٣٧-١١ (أ) أوجد قيم χ^2_1 و χ^2_2 بحيث تكون المساحة تحت توزيع χ^2 المقابلة لـ $\nu = 20$ بين χ^2_1 و χ^2_2 هي

0.95 مفترضا تساوى المساحات إلى اليمين من χ^2_2 وإلى اليسار من χ^2_1 .

(ب) وضع أنه إذا لم يوضع فرض تساوى المساحات في (أ) ، فإن قيم χ^2_1 و χ^2_2 ليست وحيدة .

ج : (أ) 9.59 و 34.2

٣٨-١١ إذا كان المتغير U يتبع توزيع كا - تربيع بدرجات حرية $\nu = 7$ أوجد χ^2_1 و χ^2_2 بحيث :

(أ) $\Pr \{ U > \chi^2_2 \} = 0.025$

(ب) $\Pr \{ U < \chi^2_1 \} = 0.50$

(ج) $\Pr \{ \chi^2_1 \leq U \leq \chi^2_2 \} = 0.90$.

ج : (أ) 16.0 (ب) 6.35 (ج) مفترضا تساوى المساحات على الطرفين فإن

$\chi^2_1 = 2.17$ و $\chi^2_2 = 14.1$

٣٩-١١ الانحراف المعياري للعمز الانتاجي لـ 10 لمبات إضاءة من إنتاج إحدى الشركات هو 120 ساعة .

أوجد (أ) 95% (ب) 99% حدود ثقة للانحراف المعياري لجميع اللمبات من إنتاج الشركة .

ج : (أ) 87.0 إلى 230.9 (ب) 78.1 إلى 288.5 ساعة .

٤٠-١١ حل المسألة السابقة إذا كان الانحراف المعياري لـ 25 من لمبات الإضاءة هو 120 ساعة .

ج : (أ) 95.6 إلى 170.4 (ب) 88.9 إلى 190.8 ساعة .

٤١-١١ أوجد (١) $\chi^2_{0.05}$ (ب) $\chi^2_{0.95}$ لقيمة $v = 150$

ج : (١) 122.5 (ب) 179.2

٤٢-١١ أوجد (١) $\chi^2_{0.025}$ (ب) $\chi^2_{0.975}$ لقيمة $v = 250$

ج : (١) 207.7 (ب) 295.2

٤٣-١١ وضع أنه لقيم χ^2 الكبيرة فإنه يمكن تقريب χ^2 تقريب جيد بالصيغة $(v + z_p\sqrt{2v})$ ، حيث z_p هي

المئين ذى الرتبة P للتوزيع الطبيعي المعياري .

٤٤-١١ حل المسألة ٣٩-١١ باستخدام توزيع χ^2 إذا كان الانحراف المعياري لعينة حجمها 100 لمبة كهربائية هو 120

ساعة . قارن النتائج بتلك التى حصلت عليها بطرق الفصل التاسع .

ج : (١) من 106.1 إلى 140.1 (ب) من 102.1 إلى 148.1 ساعة .

٤٥-١١ ما هى 95% حدود ثقة للمسألة ٤٤-١١ والتي لها أقل طول ؟

ج : من 105.5 إلى 139.6 ساعة .

٤٦-١١ الانحراف المعياري لقوة المقاومة للكسر لكابلات من إنتاج شركة معينة هو 240 kN . بعد إدخال تعديلات

على عملية تصنيع الكابلات ، أظهرت عينة من 8 كابلات أن الانحراف المعياري لقوة مقاومتها للكسر هو 300 kN

أدرس معنوية الزيادة الظاهرة في التشتت ، باستخدام مستوى معنوية (١) 0.05 (ب) 0.01

ج : على أساس بيانات العينة المعطاة فإن الزيادة الظاهرة في التشتت ليست معنوية عند أى من المستويين .

٤٧-١١ الانحراف المعياري لدرجات الحرارة السنوية في مدينة خلال مدة 100 سنة هي 8° درجات مئوية . باستخدام

متوسط درجة الحرارة في خمسة عشر يوما خلال الخمس عشرة سنة الأخيرة ، وجد أن الانحراف المعياري لدرجات

الحرارة السنوية هو 5° درجات مئوية . اختبر صحة الفرض القائل أن درجات الحرارة في المدينة أصبحت أقل

تغيرا عنها عن الماضي ، باستخدام مستوى المعنوية (١) 0.05 (ب) 0.01 .

ج : الانخفاض الظاهر معنوى عند المستوى 0.05 ولكن غير معنوى عند 0.01 .

الفصل الثاني عشر

اختبار كا - تربيع (كا²)

التكرارات المشاهدة والنظرية

كما سبق أن شاهدنا أنه في عديد من المرات ، لا تتفق النتائج التي نحصل عليها من العينات في جميع الحالات مع النتائج المتوقعة طبقاً لقواعد الاحتمالات . على سبيل المثال ، فعل الرغم من أن الاعتبارات النظرية تؤدي بنا إلى توقع 50 صورة و 50 كتابة في رمية عملة غير متحيزة 100 مرة ، فن النادر أن نحصل على هذه النتيجة بالضبط .

جدول ١٢ - ١

الحدث	E_1	E_2	E_3	...	E_k
التكرار المشاهد	o_1	o_2	o_3	...	o_k
التكرار المتوقع	e_1	e_2	e_3	...	e_k

افترض أنه في عينة معينة لوحظ أن مجموعة من الأحداث الممكنة $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k$ (أنظر الجداول ١٢ - ١) تحدث بتكرارات $o_1, o_2, o_3, \dots, o_k$ نسمى بالتكرارات المشاهدة ، وأنه طبقاً لقواعد الاحتمالات فإنه يتوقع أن تحدث بتكرارات $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$ نسمى بالتكرارات المتوقعة أو التكرارات المشاهدة .

غالباً ما نريد معرفة ما إذا كانت التكرارات المشاهدة تختلف معنوياً عن التكرارات المتوقعة . في الحالة عندما يكون هناك حدثين فقط E_1, E_2 من الممكن حلوثهم (نسمى أحياناً بالتقسيم الثنائي) ، على سبيل المثال ، كما في حالة ، الصورة والكتابة ، مسابير تالفة أو غير تالفة وما إلى ذلك ، فإن المشكلة يمكن حلها بصورة مرضية بالطرق التي درست في الفصول السابقة . في هذا الفصل سوف ندرس المشكلة بصورة عامة .

تعريف :

تعطى إحصائية χ^2 (تقرأ كا - تربيع) مقياساً لمدى التفاوت الموجود بين التكرارات المتوقعة والتكرارات المشاهدة وتعرف كالتالي :

$$(١) \quad \chi^2 = \frac{(o_1 - e_1)^2}{e_1} + \frac{(o_2 - e_2)^2}{e_2} + \dots + \frac{(o_k - e_k)^2}{e_k} = \sum_{j=1}^k \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j}$$

إذا كان مجموع التكرارات N فإن ،

$$(٢) \quad \sum o_j = \sum e_j = N$$

تميز مكافئ للتميز (١) هو (أنظر المسألة ١٢ - ١١)

$$(٣) \quad \chi^2 = \sum \frac{o_j^2}{e_j} - N$$

إذا كانت $\chi^2 = 0$ ، فإن التكرار المتوقع والتكرار المشاهد يتفقان معاً بالضبط ، بينما إذا كانت $\chi^2 > 0$ ، فإنهم لا يتفقان معاً بالضبط . وكلما زادت قيمة χ^2 كلما زاد التفاوت بين التكرارات المتوقعة .

توزيع المعاينة لـ χ^2 يمكن تقريبه بشكل كبير بتوزيع كا - تربيع

$$(٤) \quad Y = Y_0(\chi^2)^{\frac{1}{2}(r-2)} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} = Y_0 \chi^{r-2} e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$$

(سبق دراسته في الفصل الحادي عشر) إذا كانت التكرارات المتوقعة تساوى 5 على الأقل ويتم تحسين التقريب للقيم الأكبر وتغطي درجات الحرية كالاتي :

(أ) $\nu = k - 1$ إذا أمكن حساب التكرار المتوقع بدون الحاجة لتقدير معالم المجتمع من إحصائيات العينة . لاحظ أننا طرحنا 1 من k نظراً للقيود الموضوع على المعادلة (٢) والذي ينص على أنه في حالة معرفة $k - 1$ من التكرارات المتوقعة فإن التكرار الباقي يمكن تحديده .

(ب) $\nu = k - 1 - m$ إذا كانت التكرارات المتوقعة يمكن حسابها فقط في حالة تقدير m من معالم المجتمع من إحصائيات العينة .

اختبارات المعنوية :

من الناحية العملية ، نحسب التكرارات المتوقعة على أساس الفرض H_0 . فإذا كانت قيمة χ^2 المحسوبة تحت هذا الفرض بالصيغة (١) أو (٣) أكبر من بعض القيم الحرجة (مثل $\chi_{0.95}^2$ أو $\chi_{0.99}^2$ ، وهى القيم الحرجة عند مستوى المعنوية 0.05 و 0.01 على الترتيب) ، فإننا نستنتج أن التكرارات المشاهدة تختلف معنوياً عن التكرارات المتوقعة ومن ثم نرفض H_0 عند مستوى المعنوية المقابل . وغير ذلك نقبل الفرض أو على الأقل لانرفض . وهذا الأسلوب يسمى اختبار كا - تربيع للفرض أو اختبار كا - تربيع للمعنوية .

ويجب ملاحظة أنه يجب أن ننظر بشك نحو الظروف التي تكون فيها χ^2 قريبة من الصفر حيث أنه من النادر أن تتفق التكرارات المشاهدة بدرجة جيدة جداً مع التكرارات المتوقعة . لاختبار مثل هذه الأحوال ، يمكن أن نقرر ما إذا كانت القيم المحسوبة لـ χ^2 أقل من $\chi^2_{0.05}$ أو $\chi^2_{0.01}$ ، في مثل هذه الحالات فيمكن أن نقرر بأن الاتفاق جيد عند مستوى الممنوعة 0.05 أو 0.01 على الترتيب .

اختبار كا^٢ لجودة التوفيق :

يمكن استخدام اختبار كا^٢ لتحديد مدى جودة توفيق توزيعات نظرية ، مثل التوزيع الطبيعي ، ذي الحدين ، وغيرها لتوزيعات اعتيادية ، أي تلك التي نحصل عليها من بيانات العينة . (أنظر المسائل ١٢ - ١٢ و ١٢ - ١٢) .

جداول الاقتران :

الجدول ١٢ - ١ أعلاه ، حيث تشغل التكرارات المشاهدة صف واحد ، يسمى جدول تصنيف في اتجاه واحد . وحيث أن عدد الأعمدة k . يسمى أيضاً جدول $1 \times k$ (يقرأ ١ في k) . بتعميم هذه الفكرة نصل إلى جداول تصنيف في اتجاهين أو جداول $h \times k$ حيث تشغل التكرارات المشاهدة h صف و k عمود مثل هذه الجداول تسمى أيضاً بجدول الاقتران .

ويقابل كل تكرار مشاهد في جدول الاقتران $h \times k$ ، تكرار متوقع أو نظري والذي تم حسابه طبقاً لبعض الفروض حسب قواعد الاحتمالات . هذه التكرارات التي تشغل خلايا جدول الاقتران تسمى تكرارات الخلايا . التكرار الكلي في كل صف أو في كل عمود يسمى بالتكرار الهامشي .

لنتحقق من الاتفاق بين التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعة ، نحسب الاحصائية

$$\chi^2 = \sum_j \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j} \quad (٥)$$

حيث يتم التجميع على جميع الخلايا بجدول الاقتران ، الرموز o_j و e_j تمثل التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعة على الترتيب في الخلية j . وهذا المجموع والذي يناظر المعادلة (١) يحتوي على hk حد . مجموع جميع التكرارات المشاهدة يساوي N وهو يساوي مجموع التكرارات المتوقعة (قارن بالمعادلة (٢)) .

كاسبق ، فإن الاحصائية (٥) لها توزيع معينة قريب جداً من التوزيع المعطى بالمعادلة (٤) ، بشرط أن تكون التكرارات المتوقعة ليست صغيرة جداً . وتعطى درجات الحرية ν لتوزيع كا - مربع لقيم $h > 1$ ، $k > 1$ كالآتي :

(أ) $\nu = (h - 1)(k - 1)$ إذا كانت التكرارات المتوقعة يمكن حسابها بدون تقدير معالم المجتمع من إحصائيات العينة . لإثبات ذلك أنظر المسألة ١٢ - ١٨ .

(ب) $\nu = (h - 1)(k - 1) - m$ إذا كانت التكرارات المتوقعة يمكن حسابها فقط بتقدير m من معالم المجتمع من إحصائيات العينة .

اختبارات الفروض لجداول $h \times k$ ماثلة لتلك في جداول $1 \times k$. يمكن الحصول على التكرارات المتوقعة تحت فرض معين H_0 . ومن المعتاد أن نفترض أن التصنيفين مستقلين عن بعضهما . ويمكن أن نعمم جداول الاقتران لتشمل أبعاد أكبر . فعل سبيل المثال ، يمكن أن يكون لدينا جداول $h \times k \times l$ عندما نأخذ في الاعتبار 3 تصنيفات .

تصحيح بيتس للمتغير المتصل :

عندما نستخدم نتائج لتوزيع متصل في حالة البيانات المتقطعة ، فإننا نستخدم تصحيحات للاتصال كما سبق أن شاهدنا في الفصول السابقة . ومن المألوف أيضاً معامل تصحيح عندما نستخدم توزيع كا - مربع . ويتضمن التصحيح إعادة كتابة (١) كالآتي :

$$\chi^2 \text{ (مصحح)} = \frac{(|o_1 - e_1| - 0.5)^2}{e_1} + \frac{(|o_2 - e_2| - 0.5)^2}{e_2} + \dots + \frac{(|o_k - e_k| - 0.5)^2}{e_k}$$

ويشار إليها بتصحيح بيتس . وهناك تعديل مناظر للمعادلة (٥) .

بشكل عام فإن معامل التصحيح يستخدم إذا كان عدد درجات الحرية يساوي 1 . للعينات ذات الحجم الكبير فإننا نحصل من الناحية العملية على نتيجة ماثلة لقيم χ^2 الغير مصححة ، ولكن تنشأ الصعوبات بالقرب من القيم الحرجة (أنظر المسألة ١٢ - ٨) . قد يكون من الأفضل في حالة العينات الصغيرة حيث تقع كل من التكرارات المتوقعة بين 5 و 10 ، أن تقارن بين قيم χ^2 المصححة وغير المصححة . فإذا كانت القيمتان تؤديان إلى نفس الاستنتاج فيما يتعلق بالفرض ، مثل الفرض عند مستوى 0.05 ، فإنه من النادر أن تصادف أية صعوبة . أما إذا أدوا إلى نتائج مختلفة فإنه يمكن اللجوء إلى زيادة حجم العينة أو إذا كان ذلك غير عملي ، فيمكن استخدام الطرق المبسطة للاحتالات والمتضمنة استخدام توزيع كثيرات الحدود والمشار إليه ، في الفصل السادس .

صيغة مبسطة لحساب χ^2 :

يمكن استنتاج صيغ مبسطة لحساب χ^2 حيث تتضمن استخدام التكرارات المشاهدة فقط . ونعطى فيما يلي النتائج لجداول الاقتران 2×2 و 2×3 جداول 2×2 .

$$\chi^2 = \frac{N(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)} = \frac{N\Delta^2}{N_1N_2N_A N_B}$$

حيث

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1, N = a_1 + a_2 + b_1 + b_2, N_1 = a_1 + b_1, N_2 = a_2 + b_2, N_A = a_1 + a_2, N_B = b_1 + b_2.$$

أنظر المسألة ١٢ - ١٩

باستخدام تصحيح بيتس تصحيح

$$\chi^2 \text{ (صح) } = \frac{N(|a_1b_2 - a_2b_1| - \frac{1}{2}N)^2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)}$$

$$(٨) \quad = \frac{N(|\Delta| - \frac{1}{2}N)^2}{N_1N_2N_A N_B}$$

	I	II	Totals
A	a_1	a_2	N_A
B	b_1	b_2	N_B
Totals	N_1	N_2	N

جداول 2×3

$$(٩) \quad \chi^2 = \frac{N}{N_A} \left[\frac{a_1^2}{N_1} + \frac{a_2^2}{N_2} + \frac{a_3^2}{N_3} \right] + \frac{N}{N_B} \left[\frac{b_1^2}{N_1} + \frac{b_2^2}{N_2} + \frac{b_3^2}{N_3} \right] - N$$

حيث استخدمنا النتيجة العامة والتي تصلح لجميع جداول الاقتران

	I	II	III	Totals
A	a_1	a_2	a_3	N_A
B	b_1	b_2	b_3	N_B
Totals	N_1	N_2	N_3	N

$$(١٠) \quad \chi^2 = \sum \frac{O_j^2}{e_j} - N$$

أنظر المسألة ١٢ - ٤٣ النتيجة (٩) للجداول $2 \times k$ حيث
 $k > 3$ ، يمكن تعميمها (أنظر المسألة ١٢ - ٤٦) .

معامل الاقتران :

لقياس درجة العلاقة ، التوافق أو الاعتماد بين التقسيمات في جداول الاقتران نستخدم المعامل

$$(١١) \quad C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + N}}$$

ويسمى معامل الاقتران . وكلما زادت قيمة C ، تزيد درجة التوافق . ويحدد عدد الصفوف والأعمدة في جدول الاقتران أكبر قيمة يمكن أن تأخذها C ، حيث لا يمكن أن تزيد عن الواحد . فإذا كان عدد الصفوف والأعمدة في جدول اقتران يساوي k ، فإن النهاية العظمى لـ C هي $\sqrt{(k-1)/k}$.

(أنظر المسائل ١٢ - ١٢ ، ١٢ - ١٢ ، ٥٢ - ١٢ ، ٥٣ - ١٢) .

$\Delta = a_1$

ارتباط الصفات :

نظراً لأن التصنيف في جداول الاقتران تصف غالباً ميزات أشخاص أو أشياء، فإننا نشير إليها صفات، وتسمى درجة الاعتماد أو التلازم أو العلاقة، بارتباط الصفات. لجداول $k \times k$ نعرف

$$r = \sqrt{\frac{\chi^2}{N(k-1)}} \quad (١٢)$$

كعامل الارتباط بين الصفات أو التصنيفات. ويقع هذا المعامل بين صفر وواحد (أنظر المسألة ١٢ - ٢٤). لجداول $k \times k$ حيث $k=2$ يسمى هذا الارتباط بمعامل الارتباط الرباعي.

سوف ندرس المشكلة العامة للارتباط بين المتغيرات الرقية في الفصل الرابع عشر.

خاصية الانجماع في χ^2 :

افترض أن نتائج تكرار تجربة تعطى قيم χ^2 المحسوبة من العينة كالآتي $\chi_1^2, \chi_2^2, \chi_3^2, \dots$ بدرجات حرية $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ على الترتيب. بهذا فإن نتيجة كل هذه التجارب يمكن اعتبارها مكافئة لقيمة χ^2 المعطاة $\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 + \dots$ بدرجات حرية $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \dots$ أنظر المسألة ١٢ - ٢٥.

مسائل محلولة**اختبار كا^٢ - تربع (كا^٢) :**

١٢ - ١ في 200 رمية لعملة، ظهرت 115 صورة و 85 كتابة. احتر الفرض القائل أن العملة غير متحيزة باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01.

الحل :

التكرارات المشاهدة للصورة والكتابة هي على الترتيب $o_1 = 115$ ، $o_2 = 85$ التكرارات المتوقعة للصورة والكتابة إذا كانت العملة غير متحيزة هي $e_1 = 100, e_2 = 100$ على الترتيب إذن

$$\chi^2 = \frac{(o_1 - e_1)^2}{e_1} + \frac{(o_2 - e_2)^2}{e_2} = \frac{(115 - 100)^2}{100} + \frac{(85 - 100)^2}{100} = 4.50$$

بما أن عدد الطبقات أو التقسيمات (الصور ، الكتابة) هي $k = 2$ و $\nu = k - 1 = 2 - 1 = 1$ (أ) بما أن القيمة الحرجة $\chi_{0.05}^2$ لدرجة حرية واحدة تساوي 3.84 وأن $4.50 > 3.84$ فإننا نرفض الفرض القائل أن العملة غير متحيزة عند مستوى المعنوية 0.05.

(ب) القيمة الحرجة $\chi^2_{0.99}$ لدرجة حرية واحدة تساوى 6.63 . وبما أن $4.50 < 6.63$ ، فلا يمكن رفض الفرض القائل أن العملة غير متحيزة عند مستوى المعنوية 0.01 .

نستنتج من ذلك أن النتائج المشاهدة هي محتملة المعنوية وأن العملة من المحتمل أن تكون متحيزة .
المقارنة بين هذه الطريقة والطرق سابق استخدامها ، أنظر المسألة ١٢ - ٣ .

١٢ - ٢ حل المسألة ١٢ - ١ باستخدام تصحيح يونس .

الحل

$$\frac{(|o_1 - e_1| - 0.5)^2}{e_1} + \frac{(|o_2 - e_2| - 0.5)^2}{e_2} = \frac{(|115 - 100| - 0.5)^2}{100} + \frac{(|85 - 100| - 0.5)^2}{100}$$

$$= \frac{(14.5)^2}{100} + \frac{(14.5)^2}{100} = 4.205$$

بما أن $3.84 < 4.205$ و $4.205 < 6.63$ ، فإن الاستنتاج الذي وصلنا إليه في المسألة ١٢ - ١ ، مازال صحيحاً .

للمقارنة بالطرق السابقة ، أنظر المسألة ١٢ - ٣ .

١٢ - ٣ حل المسألة ١٢ - ١ باستخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين .

الحل :

تحت الفرض القائل أن العملة غير متحيزة ، فإن المتوسط والانحراف المعياري لعدد الصور المشوقة في 200 رمية لعملة هي $\mu = np = (200)(0.5) = 100$ and $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(200)(0.5)(0.5)} = 7.07$.

الطريقة الأولى :

115 صورة معبراً عنها بوحدات معيارية $= 2.12 = (115 - 100)/7.07$

باستخدام مستوى معنوية 0.05 واختبار من طرفين ، فإنه يجب رفض الفرض القائل أن العملة غير متحيزة إذا كانت قيم z تقع خارج الفترة من -1.96 إلى 1.96 . وبمستوى ثقة 0.01 فإن الفترة المقابلة هي من -2.58 إلى 2.58 . ينتج عن ذلك كافي المسألة ١٢ - ١ أنه يمكن رفض الفرض عند المستوى 0.05 ولكن ليس عند المستوى 0.01 .

لاحظ أن مربع القيم المعيارية أعلاه $= (2.12)^2 = 4.50$ ، مثل قيمة χ^2 التي حصلنا عليها في المسألة ١٢ - ١ . وهذا دائماً الحال لاختبار كـ في حالة التقسيم الثنائي . أنظر المسألة ١٢ - ١٠ .

الطريقة الثانية :

باستخدام التصحيح للمتغير المتصل ، 115 صورة أو أكثر تكلفه 114.5 صورة أو أكثر . إذن 114.5 معياراً عنها بوحدات معيارية $= 2.05 = (114.5 - 100) / 7.07$ وهذا يؤدي إلى نفس الاستنتاج كما في الطريقة الأولى .

لاحظ أن مربع هذه القيمة المعيارية $4.20 = (2.05)^2$ ، يتفق مع قيمة χ^2 المصححة للمتغير المتصل باستخدام تصحيح ييتس بالمسألة ١٢ - ٢ . وهذا دائماً الحال لاختبار كاي^٢ في حالة التقسيم الثنائي عند استخدام تصحيح ييتس .

١٢ - ٤ الجدول ١٢ - ٢ يوضح التكرارات المشاهدة والمتوقعة في رمية زهرة طاولة 120 مرة . اختبر الفرض القائل أن الزهرة غير متحيزة ، باستخدام مستوى معنوية 0.05 .

جدول ١٢ - ٢

الوجه	1	2	3	4	5	6
التكرار المشاهد	25	17	15	23	24	16
التكرار المتوقع	20	20	20	20	20	20

الحل :

$$\chi^2 = \frac{(o_1 - e_1)^2}{e_1} + \frac{(o_2 - e_2)^2}{e_2} + \frac{(o_3 - e_3)^2}{e_3} + \frac{(o_4 - e_4)^2}{e_4} + \frac{(o_5 - e_5)^2}{e_5} + \frac{(o_6 - e_6)^2}{e_6}$$

$$= \frac{(25 - 20)^2}{20} + \frac{(17 - 20)^2}{20} + \frac{(15 - 20)^2}{20} + \frac{(23 - 20)^2}{20} + \frac{(24 - 20)^2}{20} + \frac{(16 - 20)^2}{20} = 5.00$$

بما أن عدد الأقسام أو التصنيفات (الأوجه 6 ، 5 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1) هي $k=6$ فإن $v=k-1=6-1=5$.
القيمة الحرجة $\chi_{0.05}^2$ بدرجات حرية 5 هي 11.1 . وبما أن $5.00 < 11.1$ ، فلا يمكن رفض الفرض القائل أن الزهرة غير متحيزة .

لدرجات حرية 5 ، فإن $\chi_{0.95}^2 = 1.15$ ، بحيث $\chi^2 = 5.00 > 1.15$ ينتج عن ذلك أن الاتفاق ليس جيداً بدرجة استثنائية ، مما يجعلنا ننظر إليه بشك .

١٢ - ٥ في جدول للأرقام العشوائية به 250 رقم أظهر التوزيع التالي للأرقام 0, 1, 2, ... , 9 . هل التوزيع المشاهد يختلف بشكل معنوي عن التوزيع المتوقع ؟

الرقم	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
التكرار المشاهد	17	31	29	18	14	20	35	30	20	36
التكرار المتوقع	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25

الحل :

$$\chi^2 = \frac{(17 - 25)^2}{25} + \frac{(31 - 25)^2}{25} + \frac{(29 - 25)^2}{25} + \frac{(18 - 25)^2}{25} + \dots + \frac{(36 - 25)^2}{25} = 23.3$$

القيمة الحرجة $\chi_{0.99}^2$ لدرجات حرية $v = k - 1 = 9$ تساوي 21.7 وحيث أن $23.3 > 21.7$ لذلك نستنتج أن التوزيع المشاهد يختلف معنوياً عن التوزيع المتوقع عند مستوى المعنوية 0.01 . وينتج عن ذلك أن هناك بعض الشك حول جدول الأرقام العشوائية .

١٢ - ٦ في تجارب مندل على البسلة لاحظ أن 315 مستديرة ولونها أصفر ، 108 مستديرة ولونها أخضر ، 101 مجمدة ولونها أصفر و 32 مجمدة ولونها أخضر . طبقاً لنظريته في الوراثة فإن الأعداد يجب أن تكون حسب النسب 1 : 3 : 3 : 9 . هل هناك أى دليل لتشكك في نظريته . عند مستوى المعنوية (أ) 0.01 (ب) 0.05 ؟

الحل :

العدد الكلي للبسلة = 315 + 108 + 101 + 32 = 556 بما أن الأعداد المتوقعة هي حسب النسب 1 : 3 : 3 : 9 (16 = 9 + 3 + 3 + 1) فإننا نتوقع

$$^{9/16}(556) = 312.75 = \text{مستديرة ولونها أصفر}$$

$$^{3/16}(556) = 104.25 = \text{مجمدة ولونها أصفر}$$

$$^{3/16}(556) = 104.25 = \text{مستديرة ولونها أخضر}$$

$$^{1/16}(556) = 34.75 = \text{مجمدة ولونها أخضر}$$

$$\chi^2 = \frac{(315 - 312.75)^2}{312.75} + \frac{(108 - 104.25)^2}{104.25} + \frac{(101 - 104.25)^2}{104.25} + \frac{(32 - 34.75)^2}{34.75} = 0.470 \quad \text{إذن}$$

بما أن هناك أربعة تقسيمات ، $k = 4$ فإن عدد درجات الحرية $v = 4 - 1 = 3$.

(أ) لـ $v = 3$ فإن $\chi_{0.99}^2 = 11.3$ بحيث لا يمكننا رفض النظرية عند المستوى 0.01 .

(ب) لـ $v = 3$ فإن $\chi^2_{0.95} = 7.81$ بحيث لا يمكننا رفض النظرية عند المستوى 0.05 .
نستنتج من ذلك أن هناك تطابق بين النظرية والتجربة .

لاحظ أنه لدرجات حرية 3 ، $\chi^2_{0.95} = 0.352$ و $\chi^2 = 0.470 > 0.352$ هذا على الرغم من أن الاتفاق جيد ، فإن النتيجة التي حصلنا عليها معرضة لدرجة معقولة لأخطاء المعاينة .

١٧-٧ وعاء يحتوي على عدد كبير من الكرات لها أربعة ألوان مختلفة : أحمر ، برتقالي ، أصفر ، وأخضر . عينة من 12 كرة بحيث عشوائياً من الوعاء وأظهرت 2 أحمر ، 5 برتقالي ، 4 أصفر ، 1 أخضر . اختبر الفرض القائل أن الوعاء يحتوي على نسب متساوية من الكرات ذات الألوان المختلفة .

الحل :

تحت الفرض القائل أن الوعاء يحتوي على نسب متساوية من الكرات مختلفة الألوان ، فإننا نتوقع 3 من كل نوع في عينة من 12 كرة .

بما أن العدد المتوقع أقل من 5 ، فإن تقريب كا² - مربع معرض للخطأ . ولتلاف ذلك ، فإننا نضم الخلايا بحيث يكون العدد المتوقع في كل خلية 5 على الأقل .

إذا كنا نريد رفض الفرض ، فإننا نضم الخلايا بطريقة تجعل الدليل ضد الفرض يظهر بصورة أحسن ما يمكن . ويمكن تحقيق ذلك في حالتنا هذه باعتبار الخلية « أحمر أو أخضر » و « برتقالي أو أصفر » ، والتي تظهر 3 و 9 كرات على الترتيب . وبما أن العدد المتوقع في كل خلية تحت فرض تساوي النسب هو 6 فإن :

$$\chi^2 = \frac{(3-6)^2}{6} + \frac{(9-6)^2}{6} = 3$$

لقيمة $v = 2 - 1 = 1$ ، فإن $\chi^2_{0.95} = 3.84$. بهذا لا يمكن رفض الفرض عند مستوى المعنوية 0.05 (على الرغم من أنه يمكن رفضه عند المستوى 0.01) . ومن الممكن تصور أن النتائج المشاهدة يمكن أن تنشأ لمجرد الصدفة على الرغم من أن تساوي نسب الألوان قد يكون موجوداً .

طريقة أخرى : باستخدام تصحيح ييتس ، نجد أن

$$\chi^2 = \frac{(13-6|-0.5)^2}{6} + \frac{(19-6|-0.5)^2}{6} = \frac{(2.5)^2}{6} + \frac{(2.5)^2}{6} = 2.1$$

وهذه تؤدي إلى نفس الاستنتاج أعلاه . وهذا متوقع بالطبع لأن تصحيح ييتس يؤدي دائماً إلى التقليل من قيمة χ^2 ويجب أن نلاحظ أنه إذا استعملنا تقريب χ^2 على الرغم من حقيقة أن التكرارات صغيرة ، فإننا سوف نحصل على

$$\chi^2 = \frac{(2-3)^2}{3} + \frac{(5-3)^2}{3} + \frac{(4-3)^2}{3} + \frac{(1-3)^2}{3} = 3.33$$

١٣-٧ أوجد معادلة الخط الذى ميله هو 4- والجزء المقطوع من محور Y هو 16.

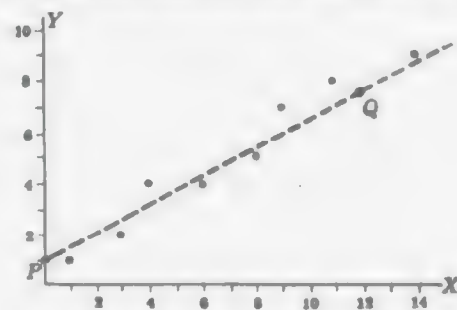
الحل :

في المعادلة $Y = a_0 + a_1 X$ ، $a_0 = 16$ هو الجزء المقطوع من محور Y و $a_1 = -4$ هو الميل .

إذن المعادلة المطلوبة هي $Y = 16 - 4X$

جدول ١٣-٧

X	1	3	4	6	8	9	11	14
Y	1	2	4	4	5	7	8	9



شكل ١٣-٧

١٣-٨ (أ) كون خطأ مستقيماً يقرب البيانات بالجدول

١٣-٧ .

(ب) أوجد معادلة هذا الخط .

الحل :

(أ) وقع النقط ، (1, 1), (3, 2), (4, 4), (6, 4), (8, 5), (9, 7), (11, 8), (14, 9)

على نظام الإحداثيات

المتعامدة كما في الشكل ١٣-٧

الخط المستقيم الذى يقرب البيانات يتم رسمه

بالتقريب باليد في الشكل . كطريقة لحذف

عامل الحكم الشخصى ، أنظر : المسألة

١٣-١١ والى تستخدم طريقة المربعات الصغرى .

(ب) للحصول على معادلة الخط الذى رسمه في (أ) ، اختر أى نقطتين على الخط مثل P ، Q على سبيل المثال .

أحداثيات هذه النقط كما يمكن قراءتها من الرسم هي بالتقريب (0, 1) ، (12, 7.5)

وتكون معادلة الخط هي $Y = a_0 + a_1 X$. باستخدام النقط (0, 1) ، (12, 7.5) نحصل على

الترتيب على

$$1 = a_0 + a_1(0) \quad (1)$$

$$7.5 = a_0 + 12a_1 \quad (2)$$

من (١) $a_0 = 1$ ، إذن من (٢) $a_1 = 6.5/12 = 0.542$.

وبهذا فإن المعادلة المطلوبة هي $Y = 1 + 0.542X$.

$Y=7-$

ل المعادلة

$3Y =$ أو

ل على c ،

المطلوبة هي

طريقة اخرى :

$$Y = 1 + 0.542X \text{ أو } Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X - X_1), Y - 1 = \frac{7.5 - 1}{12 - 0}(X - 0), Y - 1 = 0.542X$$

١٢ - ٩ (أ) قارن قيم Y التي تحصل عليها من الخط التقريبي مع تلك الموجودة في الجدول ١٣ - ٢ بالمسألة ١٣ - ٨

(ب) ماهي قيمة Y المقدرة عند $X = 10$ ؟

الحل :

(أ) إذا كانت $X = 1$ فإن $Y = 1 + 0.542(1) = 1.542$ أو $Y = 1 + 0.542(3) = 2.626$. إذا كانت $X = 3$ فإن

$Y = 1 + 0.542(1) = 1.542$ أو $Y = 1 + 0.542(1) = 1.542$. بنفس الصورة ، يمكن الحصول على قيم Y المقابلة لقيم X

الأخرى ونشير إلى قيم Y هذه المقدرة من المعادلة $Y = 1 + 0.54X$ بالرمز Y_{est} . هذه القيم

مشار إليها بالجدول ١٣ - ٣ مع القيم الفعلية للبيانات في الجدول ١٣ - ٢ .

الجدول ١٣ - ٣

X	1	3	4	6	8	9	11	14
Y	1	2	4	4	5	7	8	9
Y_{est}	1.5	2.6	3.2	4.3	5.3	5.9	7.0	8.6

(ب) قيمة Y المقدرة عند $X = 10$ هي 6.42 أو $Y = 1 + 0.542(10) = 6.4$

١٢ - ١٠ الجدول ١٣ - ٤ يوضح القوة إلى أقرب كيلو وات والسرعة القصوى إلى أقرب km/h لعينة من 12 سيارة سباق

مأخوذة بصورة عشوائية من توكيل سيارات

(أ) ارسم شكل الانتشار لهذه البيانات .

(ب) ارسم الخط الذي يقرب هذه البيانات .

(ج) أوجد معادلة الخط المرسوم في (ب) .

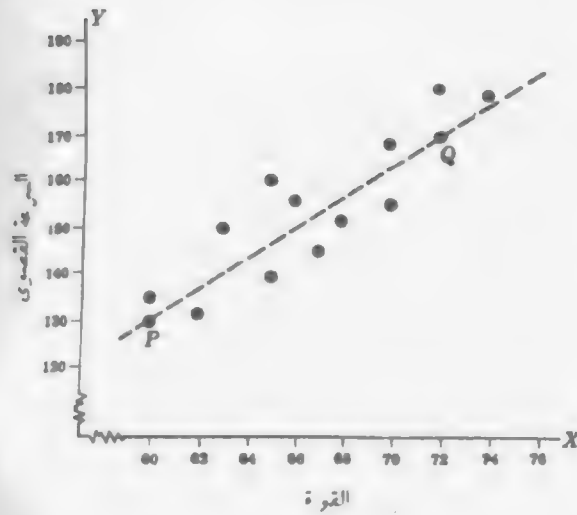
(د) قدر السرعة القصوى للعربة التي قوتها 63 kw .

(هـ) قدر قوة العربة التي من المعروف أن سرعتها القصوى 168 km/h .

جدول ١٣ - ٤

70	63	72	60	66	70	74	65	62	67	65	68	القوة
155	160	180	135	166	168	178	160	132	145	139	152	السرعة القصوى

الحل :



شكل ١٣ - ٨

(أ) نحصل على شكل الانتشار ، الموضح ،

بالشكل ١٣ - ٨ ، بتوزيع النقط

(70,155), (63,150), ..., (68,152)

(ب) الخط المستقيم الذي يقرب البيانات موضح

بالشكل على صورة خطوط متقطعة .

هذا الخط أحد الخطوط الكثيرة التي يمكن

يمكن رسمها .

(ج) اختر أي نقطتين على الخط المرسوم في

(ب) . مثل P, Q على سبيل المثال .

أحداثيات هذه النقط كما يمكن قراءتها من ،

هي على وجه التقريب (72, 170) ،

(60,130)

إذن

$$Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X - X_1)$$

$$Y - 130 = \frac{170 - 130}{72 - 60}(X - 60)$$

$$Y = \frac{10}{3}X - 70$$

(د) إذا كانت $X=63$ فإن $Y = \frac{10}{3}(63) - 70 = 140 \text{ km/h}$ (ج) إذا كانت $Y = 168$ فإن $168 = \frac{10}{3}X - 70, \frac{10}{3}X = 238, X = 71.4 \text{ or } 71 \text{ kW}$

خط المربعات الصغرى :

١١-١٢ وفق خط المربعات الصغرى لبيانات المسألة ١٣ - ٨ باستخدام

(أ) كتغير مستقل ، (ب) X كتغير تابع

الحل

(أ) معادلة الخط هي $Y = a_0 + a_1X$. والمعادلات الاعتدالية هي

$$\left. \begin{aligned} \sum Y &= a_0 N + a_1 \sum X \\ \sum XY &= a_0 \sum X + a_1 \sum X^2 \end{aligned} \right\}$$

إن
X
قيم

سباق

70

155

يمكن ترتيب خطوات العمل لحساب المجاميع كما في الجدول ١٣ - ٥ . عل الرغم من أن العمود الأخير غير مطلوب لهذا الجزء من المسألة . فإننا قد أضفناه لاستخدامه في الجزء (ب) .

جدول ١٣ - ٥

X	Y	X ²	XY	Y ²
1	1	1	1	1
3	2	9	6	4
4	4	16	16	16
6	4	36	24	16
8	5	64	40	25
9	7	81	63	49
11	8	121	88	64
14	9	196	126	81
$\Sigma X = 56$	$\Sigma Y = 40$	$\Sigma X^2 = 524$	$\Sigma XY = 364$	$\Sigma Y^2 = 256$

ما أن هناك ثمانية أزواج من قيم X, Y فإن $N = 8$ والمعادلات الاعتدالية تصبح .

$$\begin{cases} 8a_0 + 56a_1 = 40 \\ 56a_0 + 524a_1 = 364 \end{cases}$$

بالحل آتياً ، $a_0 = \frac{1}{11}$ أو 0.0909 ، $a_1 = \frac{7}{11}$ or 0.636 وخط المربعات الصغرى هي

$$Y = 0.0909 + 0.636X \text{ أو } Y = \frac{1}{11} + \frac{7}{11}X$$

طريقة أخرى :

$$a_0 = \frac{(\Sigma Y)(\Sigma X^2) - (\Sigma X)(\Sigma XY)}{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} = \frac{(40)(524) - (56)(364)}{(8)(524) - (56)^2} = \frac{6}{11} \text{ or } 0.545$$

$$a_1 = \frac{N \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} = \frac{(8)(364) - (56)(40)}{(8)(524) - (56)^2} = \frac{7}{11} \text{ or } 0.636$$

إذن $Y = a_0 + a_1X$ أو $Y = 0.545 + 0.636X$ كما سبق

(ب) إذن اعتبرنا X هو المتغير التابع و Y هو المتغير المستقل ، فإن معادلة خط المربعات الصغرى هو

$$\begin{cases} \Sigma X = b_0N + b_1 \Sigma Y \\ \Sigma XY = b_0 \Sigma Y + b_1 \Sigma Y^2 \end{cases} \text{ والمعادلات الاعتدالية هي } X = b_0 + b_1 Y$$

إذا باستخدام الجدول ١٣ - ب ، فإن المعادلات الاعتدالية تصبح

$$\begin{cases} 8b_0 + 40b_1 = 56 \\ 40b_0 + 256b_1 = 364 \end{cases}$$

ومنها $b_0 = -\frac{1}{2}$ or -0.50 , $b_1 = \frac{3}{2}$ أو 1.50

هذه القيم يمكن أن نحصل عليها من الصيغ

$$b_0 = \frac{(\sum X)(\sum Y^2) - (\sum Y)(\sum XY)}{N \sum Y^2 - (\sum Y)^2} = \frac{(56)(256) - (40)(364)}{(8)(256) - (40)^2} = 0.50$$

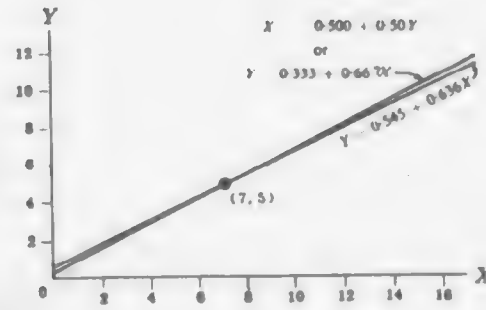
$$b_1 = \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{N \sum Y^2 - (\sum Y)^2} = \frac{(8)(364) - (56)(40)}{(8)(256) - (40)^2} = 1.50$$

وبهذا فإن معادلة المربعات الصغرى هي $X = -0.50 + 1.50Y$ أو $X = b_0 + b_1Y$

لاحظ أنه بمل هذه المعادلة في Y نحصل على $X = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}Y$ أو $Y = 0.333 + 0.667X$ وهي ليست مثل الخط الذي حصلنا عليه في (أ).

١٢ - ١٧ ارسم الخطين اللذين حصلنا عليهما في المسألة السابقة

الحل :



شكل ١٣ - ٩

الرسم البياني للخطين $Y = 0.545 + 0.636X$

و $X = -0.500 + 1.50Y$ موضع

بالشكل ١٣ - ٩ .

لاحظ أن الخطين من الناحية العملية متفقان ، هذا دليل على أن البيانات توصف وصفاً جيداً بالملاقة الخطية .

الخط الذي حصلنا عليه في (أ) يسمى بخط انحدار Y على X ويستخدم في تقدير Y لقيم X المعطاة ، أما الخط الذي حصلنا عليه في (ب) يسمى بخط انحدار X على Y ويستخدم لتقدير X لقيم Y المعطاة .

١٢ - ١٣ (أ) وضع أن خطي المربعات الصغرى اللذين حصلنا عليهما في ١٣ - ١١ يتقاطعان في النقطة (\bar{X}, \bar{Y}) .

(ب) قدر قيمة Y عند $X = 12$ (ج) قدر قيمة X عند $Y = 3$

الحل :

$$\text{النقطة } (\bar{X}, \bar{Y}) \text{ وتسمى مركز القوة ، هي } \bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{56}{8} = 7, \bar{Y} = \frac{\sum Y}{N} = \frac{40}{8} = 5$$

(أ) النقطة $(7, 5)$ تقع على خط $Y = 0.545 + 0.636X$ أو ، أكثر دقة ، $Y = \frac{6}{11} + \frac{7}{11}X$ ،

حيث أن $5 = \frac{6}{11} + \frac{7}{11}(7)$. النقطة $(7, 5)$ تقع على الخط $X = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}Y$ ، حيث أن

$$7 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}(5)$$

طريقة أخرى :

معادلة الخطين هما $Y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}X$ و $Y = \frac{6}{11} + \frac{7}{11}X$

بحل المعادلتين آنياً ، نجد أن $X = 7, Y = 5$. هذا فإن الخطين يتقاطعان في النقطة (7, 5) .

(ب) بوضع $X = 12$ في خط انحدار Y (المسألة ١٣ - ١١) فإن $Y = 0.545 + 0.636(12) = 8.2$.

(ج) بوضع $Y = 3$ في خط انحدار X (المسألة ١٣ - ١١) فإن $X = -0.50 + 1.50(3) = 4.0$.

١٣ - ١٤ أثبت أن خط المربعات الصغرى يمر دائماً خلال النقطة (\bar{X}, \bar{Y}) .

الحل :

المسألة ١ : X هو المتغير المستقل

معادلة المربعات الصغرى هي (١) $Y = a_0 + a_1X$

معادلة اعتدالية لخط المربعات الصغرى هي (٢) $\sum Y = a_0N + a_1 \sum X$

بقسمة طرفي المعادلة (٢) على N يملأ (٣) $\bar{Y} = a_0 + a_1\bar{X}$

بطرح (٣) من (١) ، فإن خط المربعات الصغرى يمكن كتابته

$$(٤) \quad Y - \bar{Y} = a_1(X - \bar{X})$$

وهذا يوضح أن الخط يمر خلال النقطة (\bar{X}, \bar{Y})

المسألة ٢ : Y هو المتغير المستقل .

نسير على نفس خطوات الحالة (١) مع تبديل X و Y والثوابت a_0 و a_1 بالثوابت b_0 و b_1 على الترتيب نجد أن خط المربعات الصغرى يمكن كتابته كالآتي :

$$(٥) \quad X - \bar{X} = b_1(Y - \bar{Y})$$

وهذا يوضح أن الخط يمر خلال النقطة (\bar{X}, \bar{Y}) .

لاحظ أن الخطين (٤) و (٥) ليسا متطابقين ، ولكنهما يتقاطعان في النقطة (\bar{X}, \bar{Y}) .

١٣ - ١٥ اعتبر أن X هو المتغير المستقل ، وضح أن معادلة خط المربعات الصغرى يمكن أن تكتب في الصورة

$$y = \left(\frac{\sum xy}{\sum x^2} \right) x, \quad y = \left(\frac{\sum xy}{\sum x^2} \right) x$$

حيث $x = X - \bar{X}$ و $y = Y - \bar{Y}$.

(ب) إذا كانت $\bar{X} = 0$ وضح أن خط الانحدار في (أ) يمكن كتابته على صورة

$$Y = \bar{Y} + \left(\frac{\sum XY}{\sum X^2} \right) X$$

(ت) اكتب معادلة خط المربعات الصغرى المقابلة للجزء (أ) إذا كان Y هو المتغير المستقل

(ث) أثبت أن الخطين في (١) و (٢) ليسا بالضرورة متماثلين

الحل :

(أ) المعادلة (٤) بالمسألة ١٢ - ١٤ يمكن كتابتها في الصورة $y = a_1 x$ حيث $x = X - \bar{X}$

و $y = Y - \bar{Y}$. كذلك من حل المعادلات الاعتدالية آنياً (أنظر صفحة ٣٥٢) ، نحصل على .

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{N \sum (x + \bar{X})(y + \bar{Y}) - \{ \sum (x + \bar{X}) \} \{ \sum (y + \bar{Y}) \}}{N \sum (x + \bar{X})^2 - \{ \sum (x + \bar{X}) \}^2} \\ &= \frac{N \sum (xy + x\bar{Y} + \bar{X}y + \bar{X}\bar{Y}) - \{ \sum x + N\bar{X} \} \{ \sum y + N\bar{Y} \}}{N \sum (x^2 + 2x\bar{X} + \bar{X}^2) - \{ \sum x + N\bar{X} \}^2} \\ &= \frac{N \sum xy + N\bar{Y} \sum x + N\bar{X} \sum y + N^2 \bar{X}\bar{Y} - \{ \sum x + N\bar{X} \} \{ \sum y + N\bar{Y} \}}{N \sum x^2 + 2N\bar{X} \sum x + N^2 \bar{X}^2 - \{ \sum x + N\bar{X} \}^2} \end{aligned}$$

لكن $\sum x = \sum (X - \bar{X}) = 0$ و $\sum y = \sum (Y - \bar{Y}) = 0$ ، بهذا يمكن تبسيط ما سبق إلى

$$a_1 = \frac{N \sum xy + N^2 \bar{X}\bar{Y} - N^2 \bar{X}\bar{Y}}{N \sum x^2 + N^2 \bar{X}^2 - N^2 \bar{X}^2} = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

ويمكن أيضاً كتابتها كما يلي :

$$a_1 = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{\sum x(Y - \bar{Y})}{\sum x^2} = \frac{\sum xY - \bar{Y} \sum x}{\sum x^2} = \frac{\sum xY}{\sum x^2}$$

إذن خط المربعات الصغرى هو $y = a_1 x$ ، أى $y = \left(\frac{\sum xY}{\sum x^2} \right) x$ ، أو $y = \left(\frac{\sum xY}{\sum x^2} \right) x$

(ب) إذا كانت $\bar{X} = 0$ ، $x = X - \bar{X} = X$

$$Y = \bar{Y} + \left(\frac{\sum XY}{\sum X^2} \right) X \quad \text{أو} \quad y = \left(\frac{\sum xY}{\sum x^2} \right) x, \quad y = \left(\frac{\sum XY}{\sum X^2} \right) X \quad \text{إذن}$$

طريقة أخرى :

المعادلات الاعتدالية لخط المربعات الصغرى $Y = a_0 + a_1 X$ هي

$$\sum XY = a_0 \sum X + a_1 \sum X^2, \quad \sum Y = a_0 N + a_1 \sum X$$

إذا كانت $\bar{X} = (\sum X) / N = 0$ فإن $\sum X = 0$ وتصبح المعادلات الاعتدالية كالآتي :

$$\sum XY = a_1 \sum X^2 \quad \text{و} \quad \sum Y = a_0 N$$

$$a_1 = \frac{\sum XY}{\sum X^2} \quad \text{أو} \quad a_0 = \frac{\sum Y}{N} = \bar{Y}$$

ومنها $Y = \bar{Y} + \left(\frac{\sum XY}{\sum X^2}\right)X$ أو $Y = a_0 + a_1X$ وهذا فإن المعادلة المطلوبة لخط المربعات الصغرى هي

$$x = \left(\frac{\sum xy}{\sum y^2}\right)y \quad \text{(ج) بإبدال } X \text{ و } Y \text{ أو } x \text{ و } y \text{ يمكن أن تثبت كافي (أ) أن}$$

$$y = \left(\frac{\sum xy}{\sum x^2}\right)x \quad \text{(د) من (أ) ، خط المربعات الصغرى هو (١)}$$

$$\text{من (ج) ، خط المربعات الصغرى هو } x = \left(\frac{\sum xy}{\sum y^2}\right)y \quad \text{أو} \quad y = \left(\frac{\sum y^2}{\sum xy}\right)x \quad \text{(2)}$$

بما أن $\frac{\sum xy}{\sum x^2} \neq \frac{\sum y^2}{\sum xy}$ ، بشكل عام ، فإن خطي المربعات الصغرى (١) ، (٢) مختلفان بشكل

عام . لاحظ أنهما يتقاطعان عند $x = 0$ و $y = 0$ أي عند النقطة (\bar{x}, \bar{y}) .

١٢-١٩ إذا كانت $X' = X + A$ و $Y' = Y + B$ حيث A و B ثوابت ، أثبت أن

$$a_1 = \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{N \sum X'Y' - (\sum X')(\sum Y')}{N \sum X'^2 - (\sum X')^2} = a_1'$$

الحل :

$$x' = X' - \bar{X}' = (X + A) - (\bar{X} + A) = X - \bar{X} = x$$

$$y = Y' - \bar{Y}' = (Y + B) - (\bar{Y} + B) = Y - \bar{Y} = y$$

إذن $\frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{\sum x'y'}{\sum x'^2}$ ومن ثم نحصل على النتيجة من المسألة ١٢-١٥ ونحصل على نتيجة مشابهة

بالنسبة لـ b_1 .

هذه النتيجة مفيدة ، حيث أنها تمكنا من تبسيط الحسابات في الحصول على خط الانحدار بطرح ثوابت اختيارية من المتغيرات X و Y (أنظر الطريقة الثانية في المسألة ١٢-١٧) .

ملاحظة : الاستنتاج لا يظل صحيحاً إذا كانت $Y' = c_2Y + B$ ، $X' = c_1X + A$ إلا إذا كانت

$$c_1 = c_2$$

١٢-١٧ وفق خط المربعات الصغرى لبيانات المسألة ١٢-١٥ باستخدام

(أ) X كتغير مستقل (ب) X كتغير تابع

الحل :

(أ) من المسألة ١٢-١٥ (أ) الخط المطلوب هو $y = \left(\frac{\sum xy}{\sum x^2}\right)x$ حيث $y = Y - \bar{Y}$ ،

$$x = X - \bar{X}$$

العمل المتضمن في حساب المجاميع يمكن ترتيبه كما في الجدول ١٣ - ٦ من المودين الأولين نحصل على

$$\bar{X} = 802/12 = 66.8 \text{ و } \bar{Y} = 1850/12 = 154.2$$

المود الأخير أصيب للاستخدام في الجزء (ب) .

جدول ١٣ - ٦

القوة	السرعة القصوى	x^2	xy	y	$X - \bar{X}$	x
70	155	0.64	2.56	0.8	3.2	3.2
63	150	17.64	15.96	-4.2	-3.8	-3.8
72	180	665.64	134.16	25.8	5.2	5.2
60	135	368.64	130.56	-19.2	-6.8	-6.8
66	156	3.24	1.44	1.8	-0.8	-0.8
70	168	190.44	44.16	13.8	3.2	3.2
74	178	566.44	171.36	23.8	7.2	7.2
65	160	33.64	10.44	5.8	-1.8	-1.8
62	132	492.84	106.56	-22.2	-4.8	-4.8
67	145	84.64	1.84	9.2	0.2	0.2
65	139	231.04	27.36	15.2	-1.8	-1.8
68	152	4.84	2.64	2.2	1.2	1.2
$\Sigma X = 802$ $\bar{X} = 66.8$	$\Sigma Y = 1850$ $\bar{Y} = 154.2$	$\Sigma x^2 = 2659.68$	$\Sigma xy = 616.32$			

لفان بشكل

خط المربعات الصغرى المطلوب هو

نتيجة مشابهة

$$Y = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \right) x = \frac{616.32}{191.68} x = 3.22x$$

أو $Y = 3.22 X - 60.9$ $Y - 145.2 = 3.22 (X - 66.8)$ والذي يمكن كتابته على الصورة $Y = 3.22 X - 60.9$ ونسئ هذه المعادلة خط انحدار Y على X ويستخدم لتقدير Y من قيم معطاة لـ X .

إبت اختيارية

إلا إذا كانت

(ب) إذا كان X هو المتغير التابع ، فإن الخط المطلوب هو

$$X = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2} \right) y = \frac{616.32}{2659.68} y = 0.232y$$

والذي يمكن كتابته على الصورة $X = 0.232 (Y - 154.2)$ أو $X = 31.0 + 0.232 Y$ هذه المعادلة تسمى خط انحدار X على Y ويستخدم لتقدير X من قيم Y المعطاة .

$y = Y$

لاحظ أن طريقة المسألة ١٣ - ١١ يمكن أيضاً استخدامها إذا أردنا .

طريقة أخرى :

باستخدام نتيجة المسألة ١٣ - ١٦ ، يمكن أن نطرح ثوابت مناسبة من X ، Y ، فإذا اخترنا أن نطرح 65 من X و 150 من Y فإن النتائج يمكن ترتيبها في الجدول ١٣ - ٧ .

الجدول ١٣ - ٧

X'	Y'	X'^2	$X'Y'$	Y'^2
5	5	25	25	25
-2	0	4	0	0
7	30	49	210	900
-5	-15	25	75	225
1	6	1	6	36
5	18	25	90	324
8	28	64	224	784
0	10	0	0	100
-3	-18	9	-54	324
2	-5	4	-10	25
0	-11	0	0	121
3	2	9	6	4
$\Sigma X' = 22$	$\Sigma Y' = 50$	$\Sigma X'^2 = 232$	$\Sigma X'Y' = 708$	$\Sigma Y'^2 = 2868$

$$a_1 = \frac{N \Sigma X'Y' - (\Sigma X')(\Sigma Y')}{N \Sigma X'^2 - (\Sigma X')^2} = \frac{(12)(708) - (22)(50)}{(12)(232) - (22)^2} = 3.22$$

$$b_1 = \frac{N \Sigma X'Y' - (\Sigma Y')(\Sigma X')}{N \Sigma Y'^2 - (\Sigma Y')^2} = \frac{(12)(708) - (50)(22)}{(12)(2868) - (50)^2} = 0.232$$

بما أن $\bar{Y} = 150 + 50/12 = 154.2$ و $\bar{X} = 65 + 22/12 = 66.8$ ، فإن معادلات الانحدار هي

$$Y = 154.2 + 3.22(X - 66.8) \quad , \quad X = 66.8 + 0.232(Y - 154.2)$$

أي أن $X = 0.232 Y + 31.0$ و $Y = 3.22X - 60.9$ وهي نفس نتائج الطريقة الأولى .

١٣ - ١٨ (أ) مستخدماً نفس المحاور ارسم شكل الخطين في المسألة ١٣ - ١٧

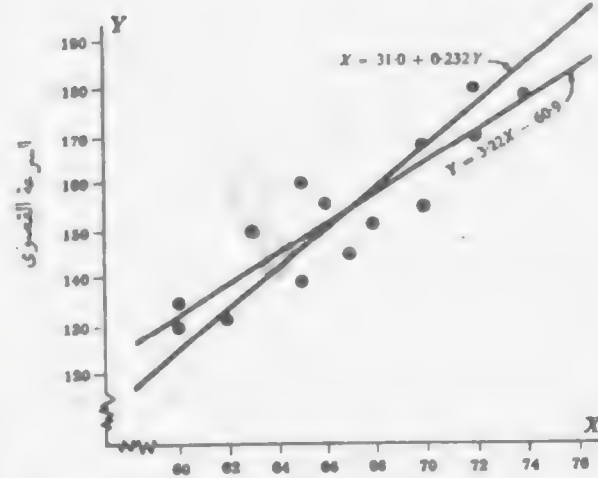
(ب) قدر السرعة القصوى لمربة إذا علم أن قوتها هي 63 k W .

(ج) قدر قوة عربة سريتها القصوى هي 168 km/h .

الحل :

(أ) يوضح الشكل ١٣ - ١٠ الخطين معاً وكذلك نقط البيانات الأصلية . لاحظ أنهما يتقاطعان معاً عند (\bar{X}, \bar{Y})

أو $(66.8, 154.2)$



القوة

شكل ١٣ - ١٠

النتائج في (ب) و (ج) يجب مقارنتها بتلك في المسألة ١٣ - ١٠ (د) و ١٣ - ١٠ (هـ)

تطبيقات على السلاسل الزمنية :

١٢ - ١٩ إنتاج الصلب بملايين الكيلوطن في بلد معين
خلال الفترة من 1946 - 1956 موضح
بالجداول ١٣ - ٨

السنة	إنتاج الصلب (ملايين كيلو طن)
1946	66.6
1947	84.9
1948	88.6
1949	78.0
1950	96.8
1951	105.2
1952	93.2
1953	111.6
1954	88.3
1955	117.0
1956	115.2

(أ) عبر عن هذه البيانات بالرسم

(ب) أوجد معادلة خط المربعات الصغرى الذى
يوفق البيانات

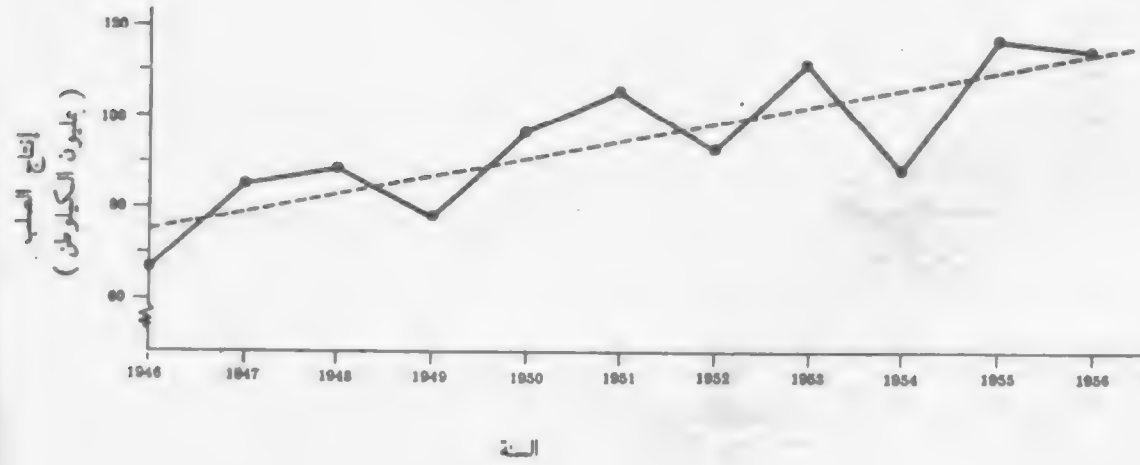
(ج) قدر إنتاج الصلب خلال الأعوام 1958 ،
1957 وقارن بالقيمة الحقيقية 85.3 ،
112.7 مليون كيلوطن .

(د) قدر إنتاج الصلب خلال الأعوام 1945 ،
1944 وقارن بالقيم الحقيقية 89.6 ،
79.7 مليون كيلوطن على الترتيب .

 (\bar{X}, \bar{Y})

الحل :

(١)



شكل ١١ - ١٣

(ب) الطريقة الاولى :

استخدم المعادلة $y = \left(\frac{\sum xy}{\sum x^2} \right) x$ حيث $x = X - \bar{X}$ و $y = Y - \bar{Y}$. فإنه يمكن

ترتيب العمل كما في الجدول ١٣ - ٩

السنة	xy	x^2	$y = Y - \bar{Y}$	$x = X - \bar{X}$	Y	X
1946	142.0	25	-28.4	-5	66.6	0
1947	40.4	16	-10.1	-4	84.9	1
1948	19.2	9	-6.4	3	88.6	2
1949	34.0	4	-17.0	-2	78.0	3
1950	-1.8	1	1.8	-1	96.8	4
1951	0	0	10.2	0	105.2	5
1952	-1.8	1	-1.8	1	93.2	6
1953	33.2	4	16.6	2	111.6	7
1954	-20.1	9	-6.7	3	88.3	8
1955	88.0	16	22.0	4	117.0	9
1956	101.0	25	20.2	5	115.2	10
	$\sum xy = 434.1$	$\sum x^2 = 110$			$\sum Y = 1045.4$ $\bar{Y} = 95.0$	$\sum X = 55$ $\bar{X} = 5$

المعادلة المطلوبة وهي $y = \left(\frac{\sum xy}{\sum x^2}\right)x$ تصبح $y = \left(\frac{434.1}{110}\right)x$ أو $y = 3.95x$ والتي يمكن كتابتها على الصورة :

$$Y - 95.0 = 3.95(X - 5) \text{ أو } Y = 75.2 + 3.95X$$

حيث نقطة الأصل $X = 0$ هي السنة 1946 ووحدة X هي سنة . الرمز البياني لهذا الخط ، يسمى أحياناً خط الاتجاه العام ، وموضح بالشكل ١٢ - ١١ على صورة خطوط متقطعة . وتسمى المعادلة غالباً معادلة الاتجاه العام وقيم Y المحسوبة من قيم X المختلفة بالقيم الاتجاهية .

الطريقة الثانية :

إذا أعطينا قيم X السنوات 1946 — 1956 بحيث $\sum X = 0$. فإن معادلة خط المربعات الصغرى يمكن أن تكتب على الصورة :

$$Y = \bar{Y} + \left(\frac{\sum XY}{\sum X^2}\right)X$$

وبما أن هناك عدداً فردياً من السنوات ، فإنه يمكن اعتبار $X = 0$ السنة التي في منتصف الفترة وهي 1951 ، السنوات التالية لها $X = 1, 2, 3, 4, 5$ ، السنوات السابقة لها $X = -1, -2, -3, -4, -5$. السنوات السابقة عليها - ويوضح الجدول ١٣ - ١٠ العمود الثاني (من اليسار) هذه النتيجة وهذا يساوى العمود الرابع (من اليسار) في الجدول الخاص بالطريقة الأولى . السنة المتوسطة 1951 تسمى بنقطة الأصل . وسنفترض - مالم يذكر خلاف ذلك - أن قيم Y تشير إلى القيم في منتصف السنة ، أى ، في أول يوليو . وبهذا فإن $X = 0$ تقابل أول يوليو سنة 1951 ، $X = 1$ تقابل أول يولية 1950 ، وهكذا . ويمكن تنظيم الحسابات المطلوبة كما في الجدول ١٣ - ١٠ .

الجدول ١٣ - ١٠

السنة	$-XY$	X^2	Y	X
1946	-333.0	25	66.6	-5
1947	-339.6	16	84.9	-4
1948	-265.8	9	88.6	-3
1949	-156.0	4	78.0	-2
1950	-96.8	1	96.8	-1
1951	0	0	105.2	0
1952	93.2	1	93.2	1
1953	223.2	4	111.6	2
1954	264.9	9	88.3	3
1955	468.0	16	117.0	4
1956	576.0	25	115.2	5
	$\sum XY = 434.1$	$\sum X^2 = 110$	$\sum Y = 1045.4$	$\bar{X} = 0$

(مليون الكيلوطن)
إنتاج الصلب

إنه يمكن

X
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
$\sum X = 55$
$\bar{X} = 5$

إذن $\bar{Y} = (\sum Y/N) = 1.45.4/11 = 95.0$ والمعادلة المطلوبة هي

$$Y = 95.0 + (434.1/110)X \text{ أو } Y = 95.0 + 3.95X$$

حيث نقطة الأصل $X = 0$ هي السنة 1951 ووحدة X هي السنة .

لنقل نقطة الأصل إلى 1946 ، خمسة سنوات سابقة ، فيجب أن نضع $X - 5$ بدلاً من X ، وهذا نحصل على المعادلة $Y = 75.2 + 3.95X$ أو $Y = 95.0 + 3.95(X - 5)$ كما في الطريقة الأولى .

الطريقة الثانية أفضل من الطريقة الأولى حيث أن العمل المطلوب في الحساب قد اختصر . ولكن هذه الطريقة يجب أن تعدل إذا كان عدد السنوات في البيانات زوجياً . ولهذا التعديل أنظر طريقة المسألة ١٣-٢٠ (ب) أما الطريقة الأولى فيمكن تطبيقها في جميع الحالات .

(ج) استخدم معادلة الاتجاه العام $Y = 95.0 + 3.95X$ حيث $X = 0$ تقابل 1951 . إذن السنوات 1958 ، 1957 تقابل $X = 7$ ، $X = 6$ على الترتيب .

إذا كانت $X = 6$ فإن $Y = 95.0 + 0.95(6) = 118.7$ والتي تقرب بصورة جيدة من القيمة الفعلية 112.7 .

إذا كانت $X = 7$ فإن $Y = 95.0 + 3.95(7) = 122.6$ وهي لاتقارن بصورة جيدة بالقيمة الفعلية وتوضح المخاطرة المتضمنة في عملية الاستنباط .

نفس النتيجة يمكن الحصول عليها باستخدام معادلة الاتجاه العام $Y = 75.2 + 3.95X$ والتي لها كنقطة أصل السنة 1946 ، وذلك بوضع $X = 12$ و $X = 11$ على الترتيب .

(د) باستخدام خط الاتجاه العام $Y = 75.2 + 3.95X$ عند $X = -2$ ، $X = -1$ نحصل على القيم

$$Y = 75.2 + 3.95(-2) = 67.3 \text{ و } Y = 75.2 + 3.95(-1) = 71.2$$

١٣ - ٢٠ يوضح الجدول ١٣ - ١١ إنتاج الولايات المتحدة من السيجار ذي الحجم الصغير خلال الأعوام من 1954 - 1945.

(أ) عبر عن هذه البيانات بالرسم

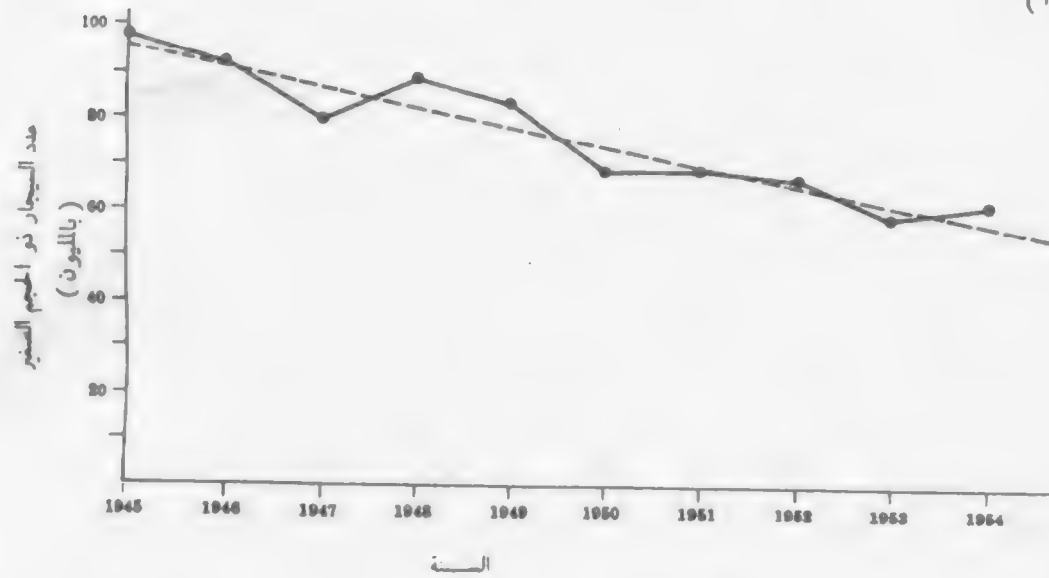
(ب) أوجد معادلة خط المربعات الصغرى التي توفق البيانات

(ج) قدر إنتاج السيجار ذي الحجم الصغير خلال عام 1955

جول ١٣ - ١١

السنة	1945	1946	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954
عدد السجائر ذو الحجم الصغير (بالمليون)	98.2	92.3	80.0	89.1	83.5	68.9	69.2	67.1	58.3	61.2

الحل : (أ)



شكل ١٣ - ١٢

(ب) الطريقة الأولى :

جول ١٣ - ١٢

السنة	xy	x^2	$y = Y - \bar{Y}$	$x = X - \bar{X}$	Y	X
1945	-96.30	20.25	21.4	-4.5	98.2	0
1946	-54.25	12.25	15.5	-3.5	92.3	1
1947	-8.00	6.25	3.2	-2.5	80.0	2
1948	-18.45	2.25	12.3	1.5	89.1	3
1949	-3.35	0.25	6.7	-0.5	83.5	4
1950	-3.95	0.25	-7.9	0.5	68.9	5
1951	-11.40	2.25	-7.6	1.5	69.2	6
1952	-24.25	6.25	-9.7	2.5	67.1	7
1953	-64.75	12.25	-18.5	3.5	58.3	8
1954	-70.20	20.25	-15.6	4.5	61.2	9
	$\Sigma xy = -354.9$	$\Sigma x^2 = 82.5$			$\Sigma Y = 767.8$ $\bar{Y} = 76.8$	$\Sigma X = 45$ $\bar{X} = 4.5$

المعادلة المطلوبة وهي $y = \left(\frac{\sum xy}{\sum x^2} \right) x$ تصبح $y = \frac{-354.9}{82.5}$ أو $y = 4.30$ والتي يمكن كتابتها

على الصورة :

$$Y = 96.2 - 4.30X \text{ أو } Y - 76.8 = -4.30(X - 4.5)$$

حيث نقطة الأصل $X = 0$ هي سنة 1945 ووحدة X هي السنة . الرسم البياني لهذا الخط ، ويسمى أحياناً

خط الاتجاه العام ، موضح بصورة خطوط متقطعة الشكل ١٣ - ١٢

الطريقة الثانية :

جدول ١٣ - ١٢

السنة	XY	X^2	Y	X
1945	-883.8	81	98.2	-9
1946	-646.1	49	92.3	-7
1947	-400.0	25	80.0	-5
1948	-267.3	9	89.1	-3
1949	-83.5	1	83.5	-1
1950	68.9	1	68.9	1
1951	207.6	9	69.2	3
1952	335.5	25	67.1	5
1953	408.1	49	58.3	7
1954	550.8	81	61.2	9
	$\sum XY = -709.8$	$\sum X^2 = 330$	$\sum Y = 767.8$ $\bar{Y} = 76.8$	$\sum X = 0$ $\bar{X} = 0$

في هذه الطريقة فإننا نريد إعطاء السنوات القيم X بحيث تكون $\sum X = 0$ وبما أن عدد السنوات زوجي ، فإنه لا توجد سنة وسطى ولا يمكن بذلك استخدام الطريقة الثانية بالمسألة ١٣ - ١٩ . على أية حال ، فإنه يمكن إعطاء الأرقام 0.5 ، 0.5 — الستين بالمنتصف وهما 1950 ، 1949 ، بحيث تمثل السنوات 1951, 1952, ... بالأرقام 1.5, 2.5, ... وهذا ما هو موجود بالعمود الرابع من اليسار بالجدول ١٣ - ١٢ في الطريقة الأولى .

كذلك ، ولتلاقى السكور نضاعف هذه القيم بحيث نحصل على العمود الثاني (من اليسار) في الجدول ١٣ - ١٢ . لاحظ أنه باستخدام هذه القيم X فإن نقطة الأصل $X = 0$ هي في المنتصف بين أول يوليو 1949 ، وأول يوليو 1950 وهو أول يناير 1950 أو 31 ديسمبر 1949

كذلك فإن وحدة X هي نصف سنة .

بما أن $X = 0$ فإن المعادلة المطلوبة لها الشكل $Y = \bar{Y} + \left(\frac{\sum XY}{\sum X^2} \right) X$ والتي تعطى (أنظر الجدول

١٣ - ١٢) .

$$Y = 76.8 - 2.15X \text{ أو } Y = 76.8 + (-709.8/330)X$$

حيث نقطة الأصل $X = 0$ تقابل يناير 1950 و X مقاسة بنصف سنة فإذا أردنا قياس X كسنة كاملة وليست كنصف سنة ، فيجب أن نضع $2X$ بدلا من X بحيث تكون المعادلة هي

$$Y = 76.8 - 4.30X$$

ونقطة الأصل هي أول يناير 1950 ، X مقاسة بالسنوات

إذا أردنا الآن نقل نقطة الأصل إلى أول يوليو 1945 ، فيجب أن نضع $X - 4.5$ بدلا من X (حيث أن المدة من أول يوليو 1945 إلى أول يناير 1950 هي 4.5 سنة) . وهذا تكون النتيجة :

$$Y = 76.8 - 4.30(X - 4.5) = 96.2 - 4.30X$$

حيث نقطة الأصل هي أول يوليو 1945 و X مقاسة بالسنوات . وهذا يتفق مع نتيجة الطريقة الأولى

(ج) استخدم المعادلة $Y = 96.2 - 4.30X$ حيث $X = 10$ تقابل 1955 .

إذن $Y = 53.2$ ، بحيث نتوقع إنتاج 53.2 مليون من السيارات ذي الحجم الصغير إذا استمر نفس الاتجاه العام .

المعادلات غير الخطية التي يمكن وضعها في صورة خطية :

١٢ - ١٣ الجدول ١٤ - ١٤ يعطى القيم التجريبية للضغط P حجم معين من الغاز المقابل للقيم المختلفة للحجم V . طبقاً لمبادئ علم الديناميكا الحرارية فإن هذه العلاقة تأخذ الصورة $PV^\gamma = C$ ، حيث C و γ ثوابت يجب أن تتواجد بين المتغيرات (أ) أوجد قيم C ، γ (ب) اكتب المعادلة التي يجب أن تربط بين V ، P . (ج) قدر P عند $V = 100.0$.

جدول ١٣ - ١٤

الحجم	194.0	118.6	88.7	72.4	61.8	54.3
الضغط	10.1	19.2	28.4	37.6	49.5	61.2

كتابتها

في أحياناً

زوجي ،
يمكن إعطاء
1951, 19.
ة الأولى .

١٣ - ١٣
و أول يوليو

أنظر الجدول

الحل :

$$\text{بما أن } PV^\gamma = C, \text{ فإن}$$

$$\log P + \gamma \log V = \log C \text{ أو } \log P = \log C - \gamma \log V$$

فإذا وضعنا $\log P = Y$ و $\log V = X$ ، فإن المعادلة الأخيرة يمكن كتابتها على الصورة

$$(1) \quad Y = a_0 + a_1 X$$

$$\text{حيث } a_0 = \log C \text{ و } a_1 = -\gamma$$

الجدول ١٣ - ١٥ أدناه يعطى $X = \log V$ و $Y = \log P$ المقابلة لقيم V و P الموضحة

بالجدول ١٣-١٤ و كذلك بوضع القيم المطلوبة في حساب معادلة المربعات الصغرى (١)

المعادلات الاعتدالية المقابلة لخط المربعات الصغرى (١) هي

$$\Sigma Y = a_0 N + a_1 \Sigma X \text{ و } \Sigma XY = a_0 \Sigma X + a_1 \Sigma X^2$$

$$\text{ومنها } a_0 = \frac{(\Sigma Y)(\Sigma X^2) - (\Sigma X)(\Sigma XY)}{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} = 4.20, a_1 = \frac{N \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} = -1.40$$

$$\text{إذن } Y = 4.20 - 1.40 X$$

الجدول ١٣ - ١٥

$X = \log V$	$Y = \log P$	X^2	XY
1.7348	1.7868	3.0095	3.0997
1.7910	1.6946	3.2077	3.0350
1.8597	1.5752	3.4585	2.9294
1.9479	1.4533	3.7943	2.8309
2.0741	1.2833	4.3019	2.6617
2.2878	1.0043	5.2340	2.2976
$\Sigma X = 11.6953$	$\Sigma Y = 8.7975$	$\Sigma X^2 = 23.0059$	$\Sigma XY = 16.8543$

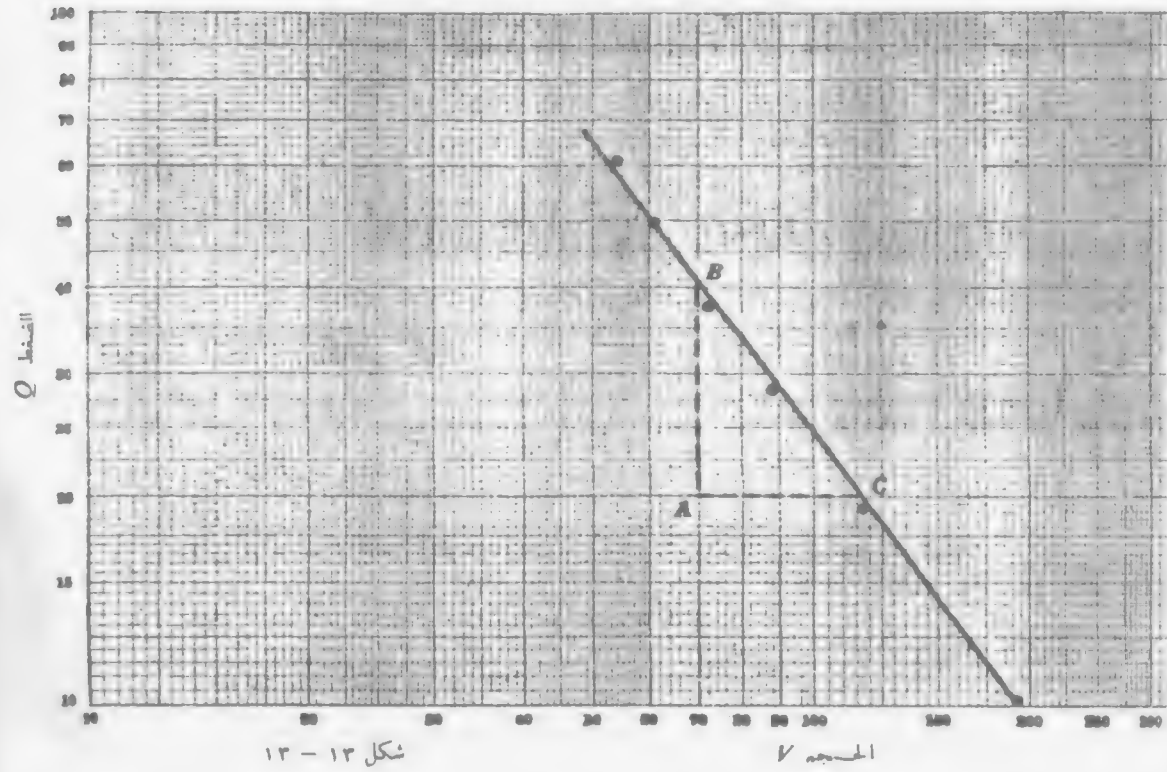
$$(أ) \text{ بما أن } a_0 = 4.20 = \log C, a_1 = -1.40 = -\gamma, \text{ فإن } C = 1.60 \times 10^4 \text{ و } \gamma = 1.40$$

$$(ب) \text{ المعادلة المطلوبة بدلالة } V, P \text{ يمكن كتابتها على الصورة } PV^{1.40} = 16000$$

$$(ج) \text{ عند } V = 100 \text{ فإن } X = \log V = 2 \text{ و } Y = \log P = 4.20 - 1.40(2) = 1.40 \text{ وعلى ذلك } \log P = 1.40 \Rightarrow P = 25.1$$

٢٢-١٣ حل المسألة ١٣ - ٢١ برسم البيانات على ورق رسم بياني بالتقسيم لوغاريتم - لوغاريتم

الحل :



شكل ١٣ - ١٣

لكل من أزواج القيم للضغط P والحجم V بالجدول ١٣ - ١٤ في المسألة ١٣ - ١٢ ، نحصل على نقطة موقعة على ورق الرسم البياني لوغاريتم كما هو موضح بالشكل ١٣ - ١٣ أعلاه .

ويوضح الشكل أيضاً الخط الذي يقرب هذه النقاط (مرسوماً بالتمهيد باليد) . يوضح الرسم الناتج أن هناك علاقة خطية بين $\log P$ و $\log V$ والذي يمكن تمثيلها بالمعادلة

$$Y = a_0 + a_1 X \text{ أو } \log P = a_0 + a_1 \log V$$

الميل a_1 ، وهو سالب في هذه الحالة ، يعطى رقياً بنسبة الأطوال AB إلى AC (باستخدام وحدة طول ملائمة) .

وتمعطى القياسات في هذه الحالة $a_1 = -1.4$.

$$C = 1.6$$

$$P = \text{antilog } 1.40 = 2$$

الحصول على a_0 ، فإننا نحتاج إلى نقطة على الخط . على سبيل المثال عندما تكون $V = 100$ فإن $P = 25$ من الشكل . إذن

$$a_0 = \log P - a_1 \log V = \log 25 + 1.4 \log 100 = 1.4 + (1.4)(2) = 4.2$$

بحيث

$$\log P + 1.4 \log V = 4.2, \log PV^{1.4} = 4.2, \text{ and } PV^{1.4} = 16000$$

المربعات الصغرى للقطع المكافئ :

١٣-٢٣ الجدول ١٦ - يوضع تعداد سكان الولايات المتحدة خلال الأعوام 1950 - 1850 على فترات كل منها عشر سنوات

(أ) أوجد معادلة القطع المكافئ باستخدام طريقة المربعات الصغرى والتي توفق هذه البيانات

(ب) احسب القيم الاتجاهية للسنوات بالجدول وقارنها بالقيم الفعلية

(ج) قدر عدد السكان في عام 1945 .

(د) قدر عدد السكان في عام 1960 وقارن بالقيم الفعلية .

(هـ) قدر عدد السكان في 1840 وقارن بالقيمة الفعلية . (أنظر المسألة ١ - ٢٣ بالفصل الأول)

جدول ١٣ - ١٦

السنة	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950
سكان الولايات المتحدة (بالمليون)	23.2	31.4	39.8	50.2	62.9	76.0	92.0	105.7	122.8	131.7	151.1

المصدر : مكتب التعدادات .

الحل :

(أ) اعتبر المتغيرات X و Y تعبر عن السنة وعدد السكان في خلال السنة على الترتيب . معادلة قطع مكافئ المربعات الصغرى التي توفق البيانات هي :

$$(١) \quad Y = a_0 + a_1X + a_2X^2$$

حيث نحصل على قيمة a_0, a_1, a_2 من المعادلات الاعتدالية

$$(٢) \quad \begin{cases} \sum Y = a_0 N + a_1 \sum X + a_2 \sum X^2 \\ \sum XY = a_0 \sum X + a_1 \sum X^2 + a_2 \sum X^3 \\ \sum X^2 Y = a_0 \sum X^2 + a_1 \sum X^3 + a_2 \sum X^4 \end{cases}$$

من الملامم اختيار X بحيث يكون منتصف سنة 1900 تقابل $X = 0$ ، والسنوات 1910, 1920, 1930, 1850, 1860, 1870, 1880, 1890 ، تقابل 1940, 1950 ، تقابل $-1, -2, -3, -4, -5$ ، و $1, 2, 3, 4, 5$ على الترتيب .
هذا الاختيار فإن $\sum X, \sum X^3$ تساوى الصفر وبهذا تبسط المعادلات (٢) . ويمكن ترتيب العمل المطلوب في الحسابات كما في الجدول ١٣ - ١٧ أدناه .

باستخدام هذا الجدول فإن المعادلات الاعتدالية (٢) تصبح

$$(٣) \quad \begin{cases} 11a_0 + 110a_2 = 886.8 \\ 110a_1 = 1429.8 \\ 110a_0 + 1958a_2 = 9209.0 \end{cases}$$

من المعادلة الثانية في (٣) $a_1 = 13.00$ ، من المعادلتين الأولى والثالثة $a_0 = 76.64$ ، $a_2 = 0.3974$.
إذن المعادلة المطلوبة هي :

$$(٤) \quad Y = 76.64 + 13.00X + 0.3974X^2$$

حيث نقطة الأصل $X = 0$ هي أول يوليو سنة 1900 ووحدة X هي عشر سنوات .

جدول ١٣ - ١٧

السنة	X	Y	X^2	X^3	X^4	XY	X^2Y
1850	-5	23.2	25	-125	625	-116.0	580.0
1860	-4	31.4	16	-64	256	-125.6	502.4
1870	-3	39.8	9	-27	81	-119.4	358.2
1880	-2	50.2	4	-8	16	-100.4	200.8
1890	-1	62.9	1	-1	1	-62.9	62.9
1900	0	76.0	0	0	0	0	0
1910	1	92.0	1	1	1	92.0	92.0
1920	2	105.7	4	8	16	211.4	422.8
1930	3	122.8	9	27	81	368.4	1105.2
1940	4	131.7	16	64	256	526.8	2107.2
1950	5	151.1	25	125	625	755.5	3777.5
	$\sum X = 0$	$\sum Y = 886.8$	$\sum X^2 = 110$	$\sum X^3 = 0$	$\sum X^4 = 1958$	$\sum XY = 1429.8$	$\sum X^2Y = 9209.0$

(ب) القيم الانجائية ، نحصل عليها بالتعويض بالقيم $X = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ في المعادلة (٤) ، وهي موضحة بالجدول ١٣ - ١٨ مع القيم الفعلية ومنها يتضح أن الاتفاق جيد .

$P =$

كل منها

1850	11
23.2	3

ثاقه المربعات

(١)

جدول ١٣ - ١٨

السنة	$X = 5$ 1950	$X = 4$ 1940	$X = 3$ 1930	$X = 2$ 1920	$X = 1$ 1910	$X = 0$ 1900	$X = -1$ 1890	$X = -2$ 1880	$X = -3$ 1870	$X = -4$ 1860	$X = -5$ 1850
القيم الاتجاهية	151.6	135.0	119.2	104.2	90.0	76.6	64.0	52.2	41.2	31.0	21.6
القيم الفعلية	151.1	131.7	122.8	105.7	92.0	76.0	62.9	50.2	39.8	31.4	23.2

(ج) سنة 1945 وتقابل $X = 4.5$ ومنها

$$Y = 76.64 + 13.00(4.5) + 0.3974 (4.5)^2 = 143.2$$

(د) سنة 1960 وتقابل $X = 6$ ومنها $Y = 76.64 + 13.00(6) + 0.3974 (6)^2 = 168.9$

وهذه لا تتفق بصورة جيدة مع القيمة الفعلية 179.3 .

(هـ) سنة 1840 تقابل $X = -6$ ومنها

$$Y = 76.64 + 13.00(-6) + 0.3974 (-6)^2 = 12.9$$

وهذه لا تتفق بصورة جيدة مع القيمة الفعلية 17.1

وهذا المثال يوضح حقيقة أن العلاقة التي من الممكن أن تكون مرضية في مدى قيم معينة لا تكون بالضرورة مرضية

في مدى أوسع للقيم

مسائل إضافية

الخطوط المستقيمة :

٢٤-١٣ إذا كانت $3X + 2Y = 18$ ، أوجد (أ) X عند $Y = 3$ (ب) Y عند $X = 2$ (ج) X عند $Y = -5$ (د) Y عند $X = -1$ (هـ) الجزء المقطوع من محور X (و) الجزء المقطوع من محور Y .

ج : (أ) 4 (ب) 6 (ج) $28/3$ (د) 10.5 (هـ) 6 (و) 9 .

٢٥-١٣ عبر بيانياً عن المعادلات (أ) $Y = 3X - 5$ (ب) $X + 2Y = 4$ مستخدماً نفس المحاور . في أي نقطة تتقاطع المستقيمتان ؟

ج : (2, 1)

٢٦-١٣ (أ) أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين (6, -1) ، (3, -2)

(ب) أوجد الجزء المقطوع من المحور X والجزء المقطوع من المحور Y لمخطط في (أ)

(ج) أوجد قيمة Y عند $X = 3$ و $X = 5$.

(١) أثبت إجابتك في (أ) ، (ب) ، (ج) باستخدام الرسم .

ج : (أ) $2X + Y = 4$ (ب) الجزء المقطوع من محور X يساوى 2 ، من محور Y يساوى 4
(ج) - 2 ، - 6

٢٧-١٢ أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله $2/3$ والجزء المقطوع من محور Y يساوى 3 —
ج : $Y = 2/3X - 3$ أو $2X - 3Y = 9$

٢٨-١٢ (أ) أوجد الميل والجزء المقطوع من محور Y لخط الذى معادلته $3X - 5Y = 20$. (ب) ما هى معادلة الخط الموازى
لخط في (أ) والذى يمر بالنقطة (1, -2) ؟
ج : (أ) الميل = $3/5$ ، الجزء المقطوع من $Y = 4$
(ب) $3X - 5Y = 11$

٢٩-١٢ أوجد (أ) الميل (ب) الجزء المقطوع من محور Y (ج) معادلة الخط الذى يمر بالنقطتين (2, 8) ، (5, 4)
ج : (أ) $4/3$ — (ب) $32/3$ (ج) $4X + 3Y = 32$

٣٠-١٢ أوجد معادلة الخط المستقيم في حالة ما إذا كان الجزء المقطوع من محور X هو 3 والجزء المقطوع من محور Y هو -5
ج : $X/3 + Y/(-5) = 1$ أو $5X - 3Y = 15$

٣١-١٢ إذا كانت 100 درجة حرارة مئوية تقابل 212 درجة فهرنهايت ، بينما درجة حرارة صفر مئوية تقابل 32
فهرنهايت . مقترناً وجود علاقة خطية بين درجات الحرارة المئوية ودرجات الحرارة فهرنهايت (يرمز للدرجة المئوية
بالرمز C والفهرنهايت بالرمز F) . أوجد

(أ) المعادلة التى تربط $C = F$ (ب) درجة الحرارة فهرنهايت المقابلة لدرجة الحرارة المئوية 80
(د) درجة الحرارة المئوية المقابلة لدرجة الحرارة 68 فهرنهايت .
ج : (أ) $F = 9/5C + 32$ ، (ب) $176^\circ F$ ، (ج) $20^\circ C$.

خط المربعات الصغرى :

X	3	5	6	8	9	11
Y	2	8	4	6	5	8

٢٢-١٢ وفق خط المربعات الصغرى للبيانات بالجدول التالى باستخدام

(أ) X كتغير مستقل

(ب) X كتغير تابع

عبر عن البيانات بالرسم وكذلك ارمم خط المربعات الصغرى مستخدماً نفس المجموعة من المحاور .

ج : (أ) $Y = -1/3 + 5/7X$ أو $Y = -0.333 + 0.714X$ (ب) $Y = 1 + 9/7X$
أو $X = 1.00 + 1.29Y$

$X = -5$ 1850
21.6
23.2

$Y =$

ورة مرضية

(ج) X عند
محور Y .

ور . في أى

٣٣-١٢ بيانات المسألة السابقة أوجد (أ) قيم Y عندما $X = 5$ وعند $X = 12$ (ب) قيمة X عند $Y = 7$.

ج : (أ) 3.24, 8.24 (ب) 10.00

٣٤-١٢ (أ) استخدم طريقة التمهيد باليد للحصول على معادلة الخط الذى يجهد البيانات بالمسألة ٣٢-١٢

(ب) أجب عن المسألة ٣٢-١٢ باستخدام نتيجة الجزء (أ)

٣٥-١٢ الجدول التالى يوضح الدرجات فى امتحان نهائى فى مادتى الجبر والطبيعة التى حصل عليها 10 طلاب اختبروا عشوائيا من مجموعة كبيرة من الطلبة.

(أ) عبر عن هذه البيانات بالرسم

(ب) أوجد خط المربعات الصغرى الذى يوفق هذه البيانات ، مستخدما X كتغير مستقل .

(ج) أوجد خط المربعات الصغرى الذى يوفق هذه البيانات ، مستخدما Y كتغير مستقل .

(د) إذا حصل طالب على الدرجة 79 فى الجبر ما هى الدرجة المتوقع أن يحصل عليها فى الطبيعة .

(هـ) إذا حصل طالب على الدرجة 95 فى الطبيعة ، ما هى الدرجة المتوقع أن يحصل عليها فى الجبر ؟

75	80	93	65	87	71	98	68	84	77	جبر (Y)
82	78	86	72	91	80	95	72	89	74	الطبيعة (X)

د : (ب) $Y = 29.13 + 0.661X$

(ج) $X = -14.39 + 1.15Y$

(هـ) 95

(د) 79

٣٦-١٢ الجدول التالى يوضح عدد عمال الزراعة فى الولايات المتحدة (بالمليون) خلال السنوات 1949 — 1957

(أ) عبر عن البيانات بالرسم .

(ب) أوجد خط المربعات الصغرى الذى توفق هذه السلسلة الزمنية وعبر عنها بالرسم .

(ج) احسب القيم الاتجاهية وقارنها بالقيم الفعلية .

(د) قدر عدد عمال الزراعة فى العام 1948 وقارنها بالقيمة الفعلية . (10.36 مليون)

(هـ) تنبؤ بعدد عمال الزراعة فى العام 1958 (القيمة الحقيقية هى 7.53 مليون) . ناقش المصادر الممكنة للخطأ فى مثل هذا التنبؤ .

السنة	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
عدد عمال الزراعة (بالمليون)	9.96	9.93	9.55	9.15	8.86	8.64	8.36	7.82	7.58

المصدر : مصلحة الزراعة

ج : (ب) $Y = 8.872 - 0.312X$ ، حيث Y هو عدد عمال الزراعة بالمليون ، X معبرا عنهم بالسنوات ونقطة الأصل هي أول يوليو 1953 .

(د) 10.43 مليون

(هـ) 7.31 مليون

٢٧-١٢ الرقم القياسى لأسعار الرعاية الطبية للمستهلكين بالولايات المتحدة موضح بالجدول للسنوات 1950 — 1957 (فترة الأساس هي 1949 — 1947 ويعبر عنها بالقيمة 100 والتي تعنى 100% . الرقم القياسى لسنة 1952 على سبيل المثال ، هو 117.2 ويوضح أنه خلال سنة 1952 كان متوسط أسعار الرعاية الطبية هو 17.2% مما كانت عليه في فترة الأساس أى ، زادت الأسعار بنسبة 17.2%)

(أ) عبر عن البيانات بالرسم .

(ب) أوجد خط المربعات الصغرى الذى يوفق البيانات وعبر عنه بالرسم .

(ج) أحسب القيم الاتجاهية وقارنها بالقيم الفعلية .

(د) تنبؤ بالرقم القياسى لأسعار الخدمات الطبية خلال عام 1958 وقارن بالقيمة الفعلية (144.4) .

(هـ) فى أى سنة تتوقع أن تصل أسعار الرعاية الطبية إلى ضعف أسعار سنة 1949 — 1947 مفترضا استمرار خط الاتجاه العام الحالى ؟

السنة	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
الرقم القياسى لأسعار الرعاية الطبية للمستهلكين (1947 — 1949 = 100)	106.0	111.1	117.2	121.3	125.2	128.0	132.6	138.0

المصدر : مكتب إحصاءات العمل

ج : (ب) $Y = 122.42 + 21.19 X$ إذا كانت وحدة X نصف السنة ونقطة الأصل هي 1 يناير 1954 أو $Y = 107.09 + 4.38 X$ إذا كانت وحدة X هي السنة ونقطة الأصل هي 1 يوليو 1950

.Y =

اختبروا

(د) 142.1

(هـ) 1971

منحنى المربعات الصغرى :

٢٨-١٣ وفق باستخدام طريقة المربعات الصغرى

معادلة القطع المكافئ* ، $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2$

للبائانات بالجدول المرفق .

X	0	1	2	3	4	5	6
Y	2.4	2.1	3.2	5.6	9.3	14.6	21.9

$$\begin{aligned} Y &= 5.51 - 3.20(X - 3) + 0.733(X - 3)^2 \\ Y &= 2.51 - 1.20X + 0.733X^2 \end{aligned}$$

٢٩-١٣ الزمن الكلى المطلوب لايقاف سيارة عقب مشاهدة خطر يتكون من زمن رد الفعل (وهو الوقت بين ميم الخط واستخدام الفرامل) وزمن الايقاف (وهو الوقت التالى لاستخدام الفرامل) . الجدول التالى يعطى مسافة الإيقاف d بالمتري (لعربة تسير بسرعة v (متر فى الثانية) فى لحظة ظهور الخطر .

(أ) عبر بيانيا عن d المقابلة لـ v

(ب) وفق قطع مكافئ* بالصورة $d = a_0 + a_1v + a_2v^2$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى هذه البائانات .

(ج) قدر d عند $v = 45$ m/s و $v = 80$ m/s.

v (m/s)	20	30	40	50	60	70
d (m)	54	90	138	206	292	396

$$d = 41.77 - 1.096v + 0.08786v^2 \quad (ب)$$

(ج) 170 m, 516 m

٤٠-١٣ الجدول التالى يوضح معدل المواليد لكل 1000 من السكان فى الولايات المتحدة خلال السنوات 1955 - 1915 على فترات كل منها 5 سنوات .

(أ) عبر بيانيا عن هذه البائانات

(ب) وفق قطع مكافئ* باستخدام المربعات الصغرى لهذه البائانات .

(ج) احسب القيم الاتجاهية وقارن بالقيم الفعلية .

(د) وضع السبب فى أن المعادلة التى حصلت عليها فى (ب) غير مفيدة لأهداف الاستقياط .

السنة	1915	1920	1925	1930	1935	1940	1945	1950	1955
معدل المواليد لكل 1000 من السكان	25.0	23.7	21.5	18.9	16.9	17.9	19.5	23.6	24.6

المصدر : مصلحة الصحة والتعليم والرعاية الاجتماعية

ج : $Y = 18.16 - 0.1083X + 0.4653X^2$ ، حيث Y هو معدل المواليد لكل 1000 من السكان ووحدة X هي 5 سنوات ونقطة الأصل عند أول يوليو 1935.

١٢-٤١ عدد البكتريا Y الموجودة في وحدة حجم معين في مزرعة بكتريا بعد X ساعة معينة في الجدول التالي .

(أ) ارسم هذه البيانات مستخدماً ورق رسم بياني ذي تقسيم نصف - لوغاريتمى حيث يستخدم المقياس اللوغاريتمى لـ Y والمقياس الحسابى لـ X .

(ب) وفق منحنى المربعات الصغرى على الصورة $Y = ab^x$ للبيانات ووضح السبب في أن هذه المعادلة بالذات يجب أن تعطى نتائج جيدة .

(ج) قارن قيم Y التى تحصل عليها من هذه المعادلة مع القيم الفعلية

(د) قدر قيمة Y عند $X = 7$.

عدد الساعات	0	1	2	3	4	5	6
عدد البكتريا في وحدة حجم	32	47	65	92	132	190	275

ج : (ب) $Y = 32.14(1.427)^x$ أو $Y = 32.14e^{0.3556x}$ حيث $e = 2.718 \dots$ هو الأساس الطبيعي للوغاريتم .

(د) 387

١٢-٤٢ في المسألة السابقة وضح كيف يمكن الحصول على المعادلة المطلوبة برسم البيانات على ورق رسم بياني ذي التقسيم النصف لوغاريتمى وذلك دون استخدام طريقة المربعات الصغرى .

X	0
Y	2.4

بين بين المح
سافة الإيقاف d

الصغرى هذه

1915 -- 1955

الفصل الرابع عشر

نظرية الارتباط

الارتباط والانحدار :

في الفصل السابق أخذنا في الاعتبار مشكلة الانحدار أو تقدير متغير (المتغير التابع) من متغير أو أكثر على صلة به (المتغيرات المستقلة) . وفي هذا الفصل سندرس مشكلة على علاقة وثيقة بالمشكلة السابقة وهي مشكلة الارتباط ، أو درجة العلاقة بين المتغيرات ، والتي تهدف إلى تحديد مدى جودة وصف معادلة خطية أو غيرها للعلاقة بين المتغيرات .

إذا كانت جميع قيم المتغيرات تحقق معادلة ما بالضبط فنسمى هذه المتغيرات بأنها مرتبطة ارتباطاً كاملاً أو أن هناك ارتباطاً كاملاً بينهم . بهذا فإن محيط الدائرة C ونصف قطرها r لجميع الدوائر مرتبطان ارتباطاً كاملاً نظراً لأن $C = 2\pi r$ أما إذا قذفنا زهرتين 100 مرة متتالية فإنه لا توجد علاقة بين النقط المقابلة في كل زهرة (إلا إذا كان الزهر متحيزاً) أى ، أنهم غير مرتبطين . الطول كتغير والوزن كتغير للأشخاص قد يظهر بعض الارتباط .

إذا كان عدد المتغيرات اثنين فقط فإننا نتحدث عن الارتباط البسيط والانحدار البسيط . إذا كان هناك أكثر من متغيرين فإننا نتحدث عن الارتباط المتعدد والانحدار المتعدد . في هذا الفصل ، سندرس الارتباط البسيط فقط . أما الارتباط المتعدد والانحدار المتعدد فموف يتم دراستهما في الفصل الخامس عشر .

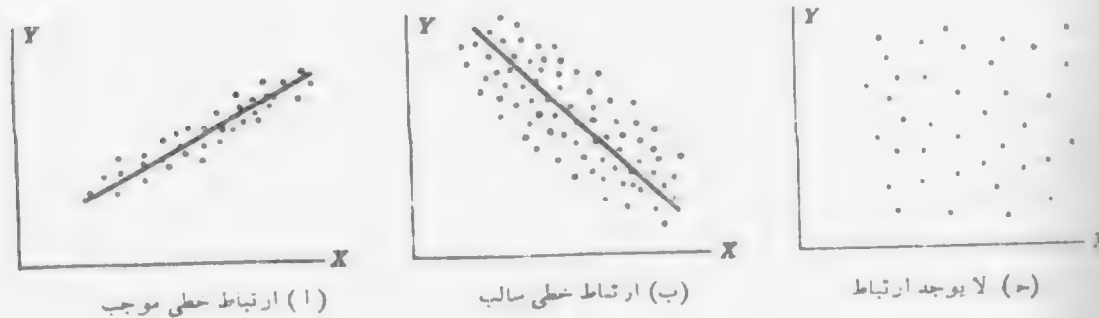
الارتباط الخطي :

اعتبر أن Y, X هما المتغيران موضع الدراسة . فإن شكل الانتشار يوضح مكان النقط (X, Y) في نظام للاحداثيات المتعامدة . فإذا كانت جميع النقط في شكل الانتشار تبدو أنها تقع بالقرب من خط ، كما في (أ) ، (ب) بالشكل ١-١٤ ، فإن الارتباط يسمى خطياً . في مثل هذه الحالات ، كما درسنا في الفصل الثالث عشرة ، فإنه من الملائم أن نستخدم معادلة خطية لأغراض الانحدار أو التقدير .

فإذا كانت Y تتجه للزيادة كلما ازدادت X ، كما في (أ) . فإن الارتباط يسمى ارتباطاً موجباً أو ارتباطاً طردياً . وإذا اتجهت Y للنقصان كلما زادت X ، كما في (ب) ، فإن الارتباط يسمى ارتباطاً سالباً أو ارتباطاً عكسياً .

إذا كانت جميع النقاط تنحى لأن تقع بالقرب من منحنى ، فإن الارتباط يسمى ارتباطاً خطياً غير خطي وفي هذه الحالة فإن معادلة غير خطية تكون ملائمة للانحدار أو التقدير ، كما سبق أن شاهدنا في الفصل الثالث عشر . ومن الواضح أن الارتباط غير الخطي يمكن أحياناً أن يكون موجباً كما يمكن أن يكون سالباً .

إذا لم يكن هناك ما يشير إلى وجود علاقة بين المتغيرات ، كما في الشكل ١-١٤ (ج) ، فإننا نقول إنه لا يوجد ارتباط بينهما ، أو أنهم غير مرتبطين .



شكل ١-١٤

مقاييس الارتباط :

يمكن أن نحدد بصورة وصفية مدى جودة وصف خط أو منحنى العلاقة بين المتغيرات بملاحظة شكل الانتشار مباشرة . على سبيل المثال ، من ملاحظ أن الخط المستقيم أكثر جدوى في وصف العلاقة بين X و Y في بيانات الشكل ١-١٤ (أ) عنه في وصف بيانات الشكل ١-١٤ (ب) وهذا راجع إلى حقيقة أن انتشار النقاط حول الخط في الشكل ١-١٤ (أ) أقل .

معادلة الانحدار باستخدام المربعات الصغرى :

سندرس أولاً مدى جودة تعبير خط مستقيم عن العلاقة بين متغيرين . لهذا فإننا نحتاج أولاً لمعادلات الانحدار باستخدام المربعات الصغرى التي حصلنا عليها في الفصل الثالث عشر . كما سبق أن أوضحنا ، فإن معادلة المربعات الصغرى لخط انحدار Y على X هي

$$(1) \quad Y = a_0 + a_1 X$$

حيث نحصل على a_0 و a_1 من المعادلات الاعتيادية

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} \sum Y &= a_0 N + a_1 \sum X \\ \sum XY &= a_0 \sum X + a_1 \sum X^2 \end{aligned} \right\}$$

ومنها

$$(٢) \quad \left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{(\sum Y)(\sum X^2) - (\sum X)(\sum XY)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2} \\ a_1 &= \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2} \end{aligned} \right\}$$

كذلك ، فإن خط انحدار X على Y هو

$$(٤) \quad X = b_0 + b_1 Y$$

حيث نحصل على b_0 ، b_1 من المعادلات الاعتدالية

$$(٥) \quad \left. \begin{aligned} \sum X &= b_0 N + b_1 \sum Y \\ \sum XY &= b_0 \sum X + b_1 \sum Y^2 \end{aligned} \right\}$$

ومنها

$$(٦) \quad \left. \begin{aligned} b_0 &= \frac{(\sum X)(\sum Y^2) - (\sum Y)(\sum XY)}{N \sum Y^2 - (\sum Y)^2} \\ b_1 &= \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{N \sum Y^2 - (\sum Y)^2} \end{aligned} \right\}$$

المعادلات (١) ، (٤) يمكن كتابتها أيضا على الصورة التالية

$$(٧) \quad y = \left(\frac{\sum xy}{\sum x^2} \right) x \quad , \quad x = \left(\frac{\sum xy}{\sum y^2} \right) y$$

حيث $x = X - \bar{X}$ و $y = Y - \bar{Y}$

وتساوى معادلتا الانحدار في حالة وحيدة فقط إذا كانت جميع النقط في شكل الانتشار تقع على خط . في هذه الحالة فإن هناك ارتباطا خطيا تاماً بين X و Y .

الخطا المعياري للتقديرات :

إذا كانت Y_{est} تمثل تقديراً لقيمة Y المقابلة لقيمة معينة X ، مستخدمين المعادلة (١) ، فإن مقياس لانتشار حول خط انحدار Y على X نحصل عليه من الصيغة

$$(٨) \quad s_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{\sum (Y - Y_{est})^2}{N}}$$

وتسمى بالخطا المعياري لتقدير Y على X

إذا استخدمنا خط الانحدار (٤) ، فإن الخطأ المعياري لتقدير X على Y يعرف كالاتي :

$$s_{x.y} = \sqrt{\frac{\sum (X - X_{est.})^2}{N}} \quad (٩)$$

وبشكل عام فإن $s_{y.x} \neq s_{x.y}$.

المعادلة (٨) يمكن كتابتها على الصورة

$$s_{y.x}^2 = \frac{\sum Y^2 - a_0 \sum Y - a_1 \sum XY}{N} \quad (١٠)$$

والتي قد تكون أكثر ملائمة للحساب (أنظر المسألة ١٤ - ٣) . ويمكن الحصول على تعبير مماثل للمعادلة (٩) .

الخطأ المعياري للتقدير له خصائص ماثلة لخصائص الانحراف المعياري . على سبيل المثال ، إذا رسمنا خطوطاً موازية لخط انحدار Y على X على أبعاد رأسية من الخط تساوي $s_{y.x}$ ، $2s_{y.x}$ ، $3s_{y.x}$ فإننا سنجد ، إذا كانت N كبيرة بشكل كاف ، أن ٩٩.٧% ، ٩٥% ، ٦٨% من نقط العينة تقع بين هذه الخطوط على الترتيب .

كما أن الانحراف المعياري المعدل $s = \sqrt{\frac{N}{N-1}}$ وجد مفيداً في حالة العينات الصغيرة ، كذلك فإن الخطأ المعياري المعدل للتقدير $s_{y.x} = \sqrt{\frac{N}{N-2}} s_{y.x}$ أيضاً مفيد . ولهذا السبب فإن بعض الإحصائيين يفضلون تعريف (٨) أو (٩) بوضع $N - 2$ بدلاً من N في المقام .

الاختلاف المفسر والاختلاف غير المفسر :

يعرف الاختلاف الكلي Y بأنه $\sum (Y - \bar{Y})^2$ ، أي ، مجموع مربعات انحرافات قيم Y عن الوسط \bar{Y} . كما هو موضح بالمسألة ١٤ - ب ، يمكن كتابته على الصورة

$$\sum (Y - \bar{Y})^2 = \sum (Y - Y_{est.})^2 + \sum (Y_{est.} - \bar{Y})^2 \quad (١١)$$

ويسمى الحد الثاني بالاختلاف المفسر ، وهذه التسمية راجعة إلى أن الاختلافات $Y_{est.} - \bar{Y}$ لها نموذج محدد ، بينما الاختلافات $Y - Y_{est.}$ تسلك سلوكاً عشوائياً أو بصورة لا يمكن التنبؤ بها .

معامل الارتباط :

النسبة بين الاختلافات المفسرة والاختلاف الكلي تسمى معامل التحديد . فإذا كانت الاختلافات المفسرة تساوي صفر ، أي أن الاختلاف الكلي جميعه غير مفسر ، فإن هذه النسبة تساوي الصفر . أما إذا كانت الاختلافات الغير مفسرة تساوي صفر ، أي أن الاختلاف الكلي جميعه مفسر ، فإن النسبة تساوي واحداً . وفي الحالات الأخرى تقع هذه النسبة بين الصفر والواحد .

بما أن النسبة دائماً غير سالبة ، فنرمز لها بالرمز r^2 . الكمية r ، تسمى بمعامل الارتباط وتعرف كالتالي :

$$(١٢) \quad \frac{\sqrt{\text{الاختلاف المفسر}}}{\sqrt{\text{الاختلاف الكلي}}} = \pm \sqrt{\frac{\sum (Y_{\text{est}} - \bar{Y})^2}{\sum (Y - \bar{Y})^2}}$$

ويتراوح بين -1 ، $+1$. العلامات \pm تستخدم للارتباط الخطي الموجب والارتباط الخطي السالب . لاحظ أن r كمية لا تميز لها أي أنها لا تعتمد على الوحدات المستخدمة .

باستخدام (٨) و (١١) وحقيقة أن الانحراف المعياري لـ Y هو

$$(١٣) \quad s_Y = \sqrt{\frac{\sum (Y - \bar{Y})^2}{N}}$$

نجد أن (١٢) يمكن كتابتها ، بإهمال الإشارة ، كالتالي :

$$(١٤) \quad r = \sqrt{1 - \frac{s_{Y.X}^2}{s_Y^2}} \quad \text{أو} \quad s_{Y.X} = s_Y \sqrt{1 - r^2}$$

ويمكن إيجاد تعبيرات مماثلة إذا أبدلنا X و Y

في حالة الارتباط خطي فإن الكمية r تظل كما هي بصرف النظر عما إذا اعتبرنا X أو Y هو المتغير المستقل . هذا فإن r يعد مقياساً جيداً للارتباط الخطي .

ملاحظة خاصة بمعامل الارتباط :

التعاريف (١٢) أو (١٤) لمعامل الارتباط تعاريف عامة ويمكن استخدامها للعلاقة الغير خطية وكذلك للعلاقة الخطية ، والاختلاف الوحيد هو أن Y_{est} نحسب من معادلة الانحدار غير خطية بدلا من معادلة الانحدار الخطية والاشارات \pm تحذف . في هذه الحالة المعادلة (٨) التي تعرف الخطأ المعياري للتقدير تعد تعريفاً عاماً .

المعادلة (١٠) والتي تنطبق في حالة الانحدار الخطي فقط ، يجب تعديلها . فإذا كانت المعادلة المقدرة ، على سبيل المثال ، هي

$$(١٥) \quad Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_{n-1} X^{n-1}$$

فإن المعادلة (١٠) تستبدل بالمعادلة

$$(١٦) \quad s_{Y.X}^2 = \frac{\sum Y^2 - a_0 \sum Y - a_1 \sum XY - \dots - a_{n-1} \sum X^{n-1} Y}{N}$$

وفي هذه الحالة فإن الخطأ المعياري المعدل للتقدير (أنظر المبررات بالصفحة ٣٩١) هو $\sqrt{\frac{N}{N-n}} s_{Y.X}$ حيث المقدار $N - n$ يسمى بعدد درجات الحرية .

يجب التأكيد على أن قيمة r المحسوبة في أية حالة تقيس درجة العلاقة بالنسبة إلى نوع المعادلة المفترضة . فإذا افترضنا معادلة خطية وإذا نتج عن المعادلة (١٢) أو (١٤) قيمة r تقترب من الصفر ، فهذا يعني أنه لا يوجد تقريباً علاقة خطية بين المتغيرات . ولكن هذا لا يعني أنه لا يوجد علاقة بين المتغيرات على الإطلاق . حيث أنه قد يكون هناك بالفعل علاقة كبيرة غير خطية بين المتغيرات . وبصورة أخرى فإن معامل الارتباط يقيس مدى جودة توفيق المعادلة المفترضة للبيانات . ما لم يوضح خلاف ذلك ، فإن مصطلح معامل الارتباط يستخدم ليعني الارتباط الخطي .

ويجب إيضاح أن وجود معامل ارتباط مرتفع (أى يقترب من 1 أو -1) لا يعني وجود علاقة تبعية مباشرة بين المتغيرات . فقد يكون هناك معامل ارتباط مرتفع بين عدد الكتب المنشورة في كل سنة وعدد مباريات الكرة الملعوبة في كل سنة . مثل هذه الأمثلة يشار إليها بأنها ارتباط لا معنى له أو ارتباط زائف .

صيغة عزم حاصل الضرب لمعامل الارتباط الخطي :

إذا افترضنا وجود علاقة خطية بين متغيرين ، فإن المعادلة (١٢) تصبح

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{(\sum x^2)(\sum y^2)}} \quad (17)$$

حيث $x = X - \bar{X}$ و $y = Y - \bar{Y}$ (أنظر المسألة ١٤ - ١٠) . هذه الصيغة ، والتي تسمى تلقائياً الإشارة المناسبة لـ r ، تسمى صيغة عزم حاصل الضرب وتظهر بشكل واضح التماثل بين X و Y

فإذا كتبنا

$$s_{xy} = \frac{\sum xy}{N}, \quad s_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}, \quad s_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{N}} \quad (18)$$

فإن s_x ، s_y تعبر عن الانحرافات المعيارية للمتغيرات X و Y على الترتيب ، بينما s_x^2 و s_y^2 تعبر عن تباينيهما - المقدار الجديد s_{xy} يسمى تباين X و Y . باستخدام رموز المعادلتين (١٧) ، (١٨) يمكن أن نكتب

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \quad (19)$$

لاحظ أن r لا تعتمد على وحدات قياس X و Y ، كما لا تعتمد على اختيار نقطة الأصل .

صيغة مختصرة للعمليات الحسابية :

الصيغة (١٧) يمكن كتابتها بصورة مكافئة كالآتي :

$$r = \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{[N \sum X^2 - (\sum X)^2][N \sum Y^2 - (\sum Y)^2]}} \quad (20)$$

رمز الصيغة تستخدم غالباً عند حساب r (أنظر المسائل ١٤ - ١٥ ، ١٦ - ١٧) .

وبالنسبة للبيانات المجمعة في جدول متغيرين أو التوزيع التكرارى لمتغيرين (أنظر المسألة ١٤ - ١٧) ، فإنه من الملائم استخدام طريقة الترميز كما في الفصل السابق ، في مثل هذه الحالة نجد أن المعادلة (٢٠) يمكن كتابتها كالآتي :

$$(٢١) \quad r = \frac{N \sum f u_x u_y - (\sum f u_x)(\sum f u_y)}{\sqrt{[N \sum f u_x^2 - (\sum f u_x)^2][N \sum f u_y^2 - (\sum f u_y)^2]}}$$

أنظر المسألة ١٤ - ١٨ . لتسهيل العمليات الحاسوبية باستخدام هذه الصيغة ، نستخدم جدول ارتباط (أنظر المسألة ١٤ - ١٩) أما البيانات المجمعة ، فيمكن كتابة الصيغة (١٨) كالآتي :

$$(٢٢) \quad s_{xy} = c_x c_y \left[\frac{\sum f u_x u_y}{N} - \left(\frac{\sum f u_x}{N} \right) \left(\frac{\sum f u_y}{N} \right) \right]$$

$$(٢٣) \quad s_x = c_x \sqrt{\frac{\sum f u_x^2}{N} - \left(\frac{\sum f u_x}{N} \right)^2}$$

$$(٢٤) \quad s_y = c_y \sqrt{\frac{\sum f u_y^2}{N} - \left(\frac{\sum f u_y}{N} \right)^2}$$

حيث c_x و c_y هو طول الفئة (مفترضاً أنها ثابتة) المقابلة للمتغيرات X و Y على الترتيب . لاحظ أن (٢٣) ، (٢٤) مكافئتان للصيغة (١١) في الفصل الرابع ، صفحة ١١٥ .

الصيغة (١٩) يمكن إثبات أنها مكافئة للصيغة (٢١) إذا استخدمنا النتائج (٢٢) - (٢٤) .

خطوط الانحدار ومعامل الارتباط الخطي :

معادلة خط المربعات الصغرى $Y = a_0 + a_1 X$ ، أو معادلة خط انحدار Y على X ، يمكن كتابتها على الصورة

$$(٢٥) \quad Y - \bar{Y} = \frac{r s_y}{s_x} (X - \bar{X}) \quad \text{أو} \quad y = \frac{r s_y}{s_x} x$$

كذلك فإن خط انحدار X على Y ، $X = b_0 + b_1 Y$ ، يمكن كتابته كالآتي :

$$(٢٦) \quad X - \bar{X} = \frac{r s_x}{s_y} (Y - \bar{Y}) \quad \text{أو} \quad x = \frac{r s_x}{s_y} y$$

ويتساوى ميل الخطوط بالمعادلات (٢٥) ، (٢٦) في حالة وحيدة فقط وهي إذا كانت $r = \pm 1$. في مثل هذه الحالة فإن الخطين متطابقان وهناك علاقة خطية كاملة بين المتغيرين X و Y . أما إذا كانت $r = 0$ فإن الخطين متعامدان ولا يوجد ارتباط خطي بين X و Y . بهذا فإن معامل الارتباط الخطي يقيس بمدى خطى الانحدار عن بعضهما .

لاحظ أنه إذا كتبت المعادلتان (٢٥) ، (٢٦) كالآتي : $Y = a_0 + a_1 X$ ، $X = b_0 + b_1 Y$ على الترتيب ، إذن $a_1 b_1 = r^2$ (أنظر المسألة ١٤ - ٢٢)

ارتباط الرتب :

بدلاً من استخدام قيم محددة للمتغيرات ، أو عندما لا يكون مثل هذا التحديد متاحاً ، فإنه يمكن ترتيب البيانات حسب ترتيب حجمها ، أهميتها ، ... وغير ذلك باستخدام الأرقام $1, 2, \dots, N$. إذا رتبنا متغيرين X و Y بهذه الطريقة فإن معامل ارتباط الرتب كما يلي :

$$r_{\text{rank}} = 1 - \frac{6 \sum D^2}{N(N^2 - 1)} \quad (٢٧)$$

حيث : $D =$ الفروق بين رتب القيم المتقابلة في X ، Y .

$N =$ عدد أزواج القيم (X, Y) في البيانات

الصيغة (٢٧) تسمى معامل سبيرمان لارتباط الرتب .

ارتباط السلاسل الزمنية :

إذا كان كل من المتغيرات X ، Y يعتمد على الزمن ، فإنه من الممكن أن توجد علاقة بين X ، Y على الرغم من أن مثل هذه العلاقة ليس بالضرورة أن تكون من نوع التبعية المباشرة ومن الممكن أن تنتج « ارتباطاً مزيفاً » . ونحصل على معامل الارتباط ببساطة باعتبار أزواج القيم (X, Y) المقابلة للأزمان المختلفة ومن ثم نستخدم الصيغ السابقة في الحل . أنظر المسألة ١٤ - ١٨ . ومن الممكن محاولة ربط قيم المتغير X في زمن معين بالقيم المقابلة لـ X في أزمان سابقة . ويسمى مثل هذا الارتباط بالارتباط الذاتي .

ارتباط الصفات :

الطريق التي استخدمت في هذا الفصل لا يمكننا من الحصول على الارتباط بين متغيرات ليست رقمية بطبيعتها ، مثل صفات الأشخاص (كثال : لون الشعر ، لون العينين ، ... وغيرها) . لمناقشة ارتباط الصفات ، أنظر الفصل الثاني عشر .

نظرية المعاينة للارتباط :

من الممكن اعتبار أن N من أزواج القيم (X, Y) لمتغيرين لعينة من مجتمع مكون من كل الأزواج الممكنة . بما أن لدينا متغيرين فإننا نسمى هذا المجتمع مجتمعاً ذا متغيرين ، والذي يمكن أن نفترض أنه مجتمع طبيعي ذو متغيرين .

ومن الممكن تصور مجتمع نظري لمعامل الارتباط والذي نرمز له بالرمز ρ ، والذي يقدر بمعامل ارتباط العينة r . اختبارات الفروض الخاصة بقيم ρ المختلفة تتطلب معرفة توزيع المعاينة لـ r . عندما تكون $\rho = 0$ فإن شكل التوزيع

ن اللائم

(٢١)

(١٩-١)

(٢٢)

(٢٣)

(٢٤)

(٢٤) ، (

كتابتها على

(٢٥)

(٢٦)

مثل هذه الحالة

مدان ولا يوجد

$X = b_0 +$

يكون مثالا ويمكن استخدام إحصائية تتبع توزيع استودينت . لقيم $p \neq 0$ فإن التوزيع ملتبس . في مثل هذه الحالة نستخدم تحويلة ترجع إلى فيشر ينتج عنها إحصائية تتوزع تقريبا كالتوزيع الطبيعي . وتلخص الاختبارات التالية الأساليب المستخدمة .

١ - اختبار الفرض $p = 0$:

هنا نستخدم حقيقة أن الإحصائية

$$(٢٨) \quad t = \frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

لها توزيع استودينت بدرجات حرية $v = N - 2$. أنظر المسائل ١٤ - ٣٣ ، ١٤ - ٣٤ .

٢ - اختبار الفرض $p \neq p_0$:

نستخدم هنا حقيقة أن الإحصائية

$$(٢٩) \quad Z = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1+r}{1-r} \right) = 1.1513 \log_{10} \left(\frac{1+r}{1-r} \right)$$

حيث $v = 71828$. وهذه الإحصائية تتوزع بشكل تقريبي كالتوزيع الطبيعي متوسطه وانحرافه المعياري كما يلي :

$$(٣٠) \quad \mu_z = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1+p_0}{1-p_0} \right) = 1.1513 \log_{10} \left(\frac{1+p_0}{1-p_0} \right), \quad \sigma_z = \frac{1}{\sqrt{N-3}}$$

هذه النتيجة يمكن أيضاً استخدامها للحصول على حدود الثقة لمعاملات الارتباط (أنظر المسائل ١٤ - ٣٥ ، ١٤ - ٣٦) . التحويل (٢٩) تسمى تحويلة Z العالم فيشر .

٢ - معنوية الفرق بين معاملات الارتباط :

لتحديد ما إذا كان معاملا الارتباط r_1, r_2 المحسوبان من عينتين N_1, N_2 على الترتيب ، يختلفان عن بعضهما اختلافاً معنوياً . يجب Z_1, Z_2 المقابلين r_1, r_2 باستخدام المعادلة (٢٩) . ثم نستخدم بعد ذلك حقيقة أن إحصائية الاختبار

$$Z = \frac{Z_1 - Z_2 - \mu_{Z_1-Z_2}}{\sigma_{Z_1-Z_2}}$$

(٣١)

$$\mu_{Z_1-Z_2} = \mu_{Z_1} - \mu_{Z_2} \quad , \quad \sigma_{Z_1-Z_2} = \sqrt{\sigma_{Z_1}^2 + \sigma_{Z_2}^2} = \sqrt{\frac{1}{N_1-3} + \frac{1}{N_2-3}} \quad \text{حيث}$$

تتوزع توزيعاً طبيعياً (أنظر المسألة ١٣ - ٣٧) .

نظرية المعاينة للانحدار :

معادلة الانحدار $Y = a_0 + a_1 X$ نحصل عليها على أساس بيانات العينة . و أغلب الأحيان نهم بمعادلة الانحدار للمجتمع الذي سمحت منه العينة . وفيما يلي اختبار ان خاصان يمثل هذا المجتمع .

١ - اختبار الفرض $a_1 = A_1$:

لاختبار الفرض أن معامل الانحدار a_1 يساوى قيمة محددة A_1 . فإننا نستخدم حقيقة أن الاحصائية

$$(٢٢) \quad t = \frac{a_1 - A_1}{s_{Y.X}/s_X} \sqrt{N-2} = \frac{a_1 - A_1}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{N-2}$$

تتبع توزيع استودينت بدرجات حرية $N - 2$. ويمكن استخدام ذلك للحصول على فترات ثقة لمعامل الانحدار للمجتمع باستخدام قيم العينة . أنظر المسائل ١٤ - ٣٨ و ١٤ - ٣٩ .

٢ - اختبار الفرض للقيم المتنبأ بها :

إذا كانت Y_0 تعبر عن القيمة المتنبأ بها ل Y المقابلة ل $X = X_0$ كما هي مقدرة من معادلة الانحدار المحسوبة من العينة . أى أن $Y_0 = a_0 + a_1 X_0$. اعتبر أن Y_p تعبر عن قيمة Y المتنبأ بها المقابلة ل $X = X_0$ للمجتمع . إذن الإحصائية

$$(٢٣) \quad t = \frac{Y_0 - Y_p}{s_{Y.X} \sqrt{N+1 + (X_0 - \bar{X})^2 / s_X^2}} \sqrt{N-2} = \frac{Y_0 - Y_p}{s_{Y.X} \sqrt{1 + 1/N + (X_0 - \bar{X})^2 / (N s_X^2)}}$$

تتبع توزيع استودينت بدراجات حرية $N - 2$. ومنها يمكن أن نحصل على حدود ثقة لقيم المجتمع المتنبأ بها . (أنظر المسألة ١٤ - ٤٠)

٢ - اختبار الفرض لقيم المتوسط المتنبأ بها :

إذا كانت Y_0 تعبر عن قيمة Y المتنبأ بها المقابلة ل $X = X_0$ كما هي مقدرة من معادلة الانحدار المحسوبة من العينة ، أى أن $Y_0 = a_0 + a_1 X_0$. اعتبر أن \bar{Y}_p تعبر عن القيمة المتوسطة ل Y المتنبأ بها المقابلة ل $X = X_0$ للمجتمع . إذن الإحصائية

$$(٢٤) \quad t = \frac{Y_0 - \bar{Y}_p}{s_{Y.X} \sqrt{1 + (X_0 - \bar{X})^2 / s_X^2}} \sqrt{N-2} = \frac{Y_0 - \bar{Y}_p}{s_{Y.X} \sqrt{1/N + (X_0 - \bar{X})^2 / (N s_X^2)}}$$

تتبع توزيع استودينت بدرجات حرية $N - 2$. ومنها يمكن أن نحصل على حدود الثقة لقيم متوسط المجتمع المتنبأ بها . (أنظر المسألة ١٤ - ٤١) .

الحالة تستخدم
المستخدمة .

(٢٨)

(٢٩)

انحرافه المعياري

(٣٠) μ_2

١٤ - ٣٥

تلفان عن بعضهم
مقبلة أن إحصائية

(٣١)

$\mu_{z_1 - z_2} =$

مسائل محلولة

اشكال الانتشار وخطوط الانحدار :

١-١٤ الجدول ١-١٤ يوضح أوزان عينة مكونة من ١٢ أب (X) وأكبر الأبناء Y .

(أ) ارسم شكل الانتشار

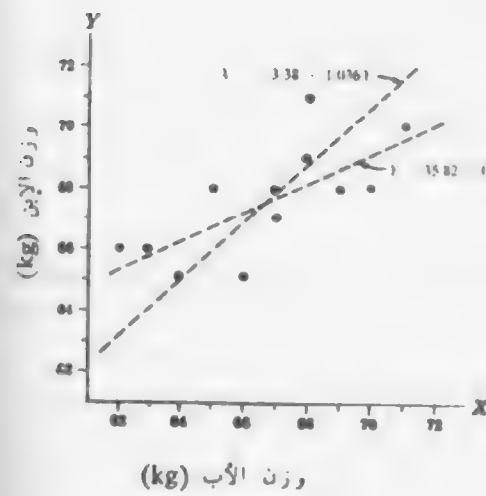
(ب) أوجد خط انحدار Y على X باستخدام المربعات الصغرى .

(ج) أوجد خط انحدار X على Y باستخدام المربعات الصغرى .

جدول ١-١٤

(kg) الوزن X للأب	65	63	67	64	68	62	70	66	58	67	69	71
(kg) الوزن Y للإبن	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

الحل :



شكل ١-١٤

(أ) نحصل على شكل الانتشار بتوقيع النقاط

(X, Y) في نظام للأحداثيات المتعامدة

موضح كما هو بالشكل ١-١٤ .

(ب) خط انحدار Y على X يعطى بالمعادلة

$$Y = a_0 + a_1 X \text{ حيث } a_0 \text{ و } a_1$$

نحصل عليهما بحل المعادلات الاعتدالية

$$\left. \begin{aligned} \sum Y &= a_0 N + a_1 \sum X \\ \sum XY &= a_0 \sum X + a_1 \sum X^2 \end{aligned} \right\}$$

المجاميع موضحة بالجدول ١-١٤ .

وبهذا تصبح المعادلات الاعتدالية

$$\left. \begin{aligned} 12a_0 + 800a_1 &= 811 \\ 800a_0 + 53418a_1 &= 54107 \end{aligned} \right\}$$

وبها نجد أن $a_0 = 35.82$ و $a_1 = 0.476$ بحيث نكون $Y = 35.82 + 0.476X$

رسم هذه المعادلة موضح بالشكل ١-١٤ .

جدول ١٤ - ٢

X	Y	X ²	XY	Y ²
65	68	4225	4420	4624
63	66	3969	4158	4356
67	68	4489	4556	4624
64	65	4096	4160	4225
68	69	4624	4692	4761
62	66	3844	4092	4356
70	68	4900	4760	4624
66	65	4356	4290	4225
68	71	4624	4828	5041
67	67	4489	4489	4489
69	68	4761	4692	4624
71	70	5041	4970	4900
$\Sigma X = 800$	$\Sigma Y = 811$	$\Sigma X^2 = 53418$	$\Sigma XY = 54107$	$\Sigma Y^2 = 54849$

طريقة أخرى :

$$a_0 = \frac{(\Sigma Y)(\Sigma X^2) - (\Sigma X)(\Sigma XY)}{N \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2} = 35.82,$$

$$a_1 = \frac{N \Sigma XY - (\Sigma Y)(\Sigma X)}{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$

(٢) خط انحدار X على Y يعطى بالمعادلة $X = b_0 + b_1 Y$ حيث b_0 ، b_1 نحصل عليهما بحل المعادلات الاعتدالية :

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X &= b_0 N + b_1 \Sigma Y \\ \Sigma XY &= b_0 \Sigma Y + b_1 \Sigma Y^2 \end{aligned} \right\}$$

باستخدام المجاميع بالجدول ١٤ - ٢ تصبح هذه

$$\left. \begin{aligned} 12b_0 + 811b_1 &= 800 \\ 811b_0 + 54849b_1 &= 54107 \end{aligned} \right\}$$

ومنها نجد أن $b_0 = -3.38$ ، $b_1 = 1.036$ بحيث تكون $X = -3.38 + 1.036 Y$.
رسم هذه المعادلة موضع بالشكل ١٤ - ٢ .

طريقة أخرى :

$$b_0 = \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y^2) - (\Sigma Y)(\Sigma XY)}{N \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2} = -3.38, \quad b_1 = \frac{N \Sigma XY - (\Sigma Y)(\Sigma X)}{N \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2} = 1.036$$

٢-١١ حل المسألة ١٤ - ١ (ب) و (٢) باستخدام خطوط الانحدار

$$y = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \right) x \quad , \quad x = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2} \right) y$$

حيث $y = Y - \bar{Y}$ ، $x = X - \bar{X}$

وزن الإبر (kg)

Y = 35.82

الحل :

الطريقة الأولى : يمكن تنظيم العمل كما في الجدول ١٤ - ٢ .

جدول ١٤ - ٢

X	Y	x = X - \bar{X}	y = Y - \bar{Y}	x ²	xy	y ²
65	68	-1.7	0.4	2.89	-0.68	0.16
63	66	-3.7	-1.6	13.69	5.92	2.56
67	68	0.3	0.4	0.09	0.12	0.16
64	65	-2.7	-2.6	7.29	7.02	6.76
68	69	1.3	1.4	1.69	1.82	1.96
62	66	-4.7	-1.6	22.09	7.52	2.56
70	68	3.3	0.4	10.89	1.32	0.16
66	65	-0.7	-2.6	0.49	1.82	6.76
68	71	1.3	3.4	1.69	4.42	11.56
67	67	0.3	-0.6	0.09	-0.18	0.36
69	68	2.3	0.4	5.29	0.92	0.16
71	70	4.3	2.4	18.49	10.32	5.76
$\Sigma X = 800$ $\bar{X} = 800/12$ $= 66.7$	$\Sigma Y = 811$ $\bar{Y} = 811/12$ $= 67.6$			$\Sigma x^2 = 84.68$	$\Sigma xy = 40.34$	$\Sigma y^2 = 38.92$

$$y = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \right) x = \left(\frac{40.34}{84.68} \right) x = 0.476x \text{ or } Y - 67.6 = 0.476(X - 66.7)$$

خط انحدار Y على X يساوي

$$x = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2} \right) y = \left(\frac{40.34}{38.92} \right) y = 1.036y \text{ or } X - 66.7 = 1.036(Y - 67.6)$$

خط انحدار X على Y يساوي

وهذا يتفق مع نتائج المسألة ١٤ - ١ .

الطريقة الثانية :

اطرح مقداراً ثابتاً ملائماً ، وليكن 60 ، من كل قيمة من قيم X و Y ثم تابع الحل كما في الطريقة الثانية بالمسألة ١٣ - ١٧ ، الفصل الثالث عشر .

جدول ١٤ - ٣

X'	Y'	X''	X'Y'	Y''
5	8	25	40	64
3	6	9	18	36
7	8	49	56	64
4	5	16	20	25
8	9	64	72	81
2	6	4	12	36
10	8	100	80	64
6	5	36	30	25
8	11	64	88	121
7	7	49	49	49
9	8	81	72	64
11	10	121	110	100
$\Sigma X' = 80$	$\Sigma Y' = 81$	$\Sigma X'' = 618$	$\Sigma X'Y' = 647$	$\Sigma Y'' = 729$

$$a' = \frac{N \sum X'Y' - (\sum Y')(\sum X')}{N \sum X'^2 - (\sum X')^2}$$

$$b' = \frac{N \sum X'Y' - (\sum Y')(\sum X')}{N \sum Y'^2 - (\sum Y')^2} = 1.036 \quad \text{إذن}$$

بما أن $\bar{X} = 60 + 80/12 = 66.7$ and $\bar{Y} = 60 + 91/12 = 67.6$ فإن معادلات الانحدار المطلوبة هي كما سبق.

لاحظ أنه لو حسبنا a_0 ، b_0 بهذه الطريقة ، فإننا لن نحصل على نفس النتائج السابقة حيث أنها يعتمدان على اختيار نقطة الأصل . وعلى هذا فإن الطريقة تستخدم فقط للحصول على a_1 ، b_1 وهما لا يعتمدان على اختيار نقطة الأصل .

الخطأ المعياري للتقدير :

٣-١٤ إذا كانت معادلة انحدار Y على X هي $Y = a_0 + a_1 X$ ، أثبت أن الخطأ المعياري للتقدير s_{YX} يعرف كالآتي :

$$s_{YX}^2 = \frac{\sum Y^2 - a_0 \sum Y - a_1 \sum XY}{N}$$

الحل :

قيمة Y المقدرة من خط الانحدار تعطى بالمعادلة $Y_{est} = a_0 + a_1 X$ إذن

$$s_{YX}^2 = \frac{\sum (Y - Y_{est})^2}{N} = \frac{\sum (Y - a_0 - a_1 X)^2}{N}$$

$$= \frac{\sum Y(Y - a_0 - a_1 X) - a_0 \sum (Y - a_0 - a_1 X) - a_1 \sum X(Y - a_0 - a_1 X)}{N}$$

لكن

$$\begin{aligned} \sum (Y - a_0 - a_1 X) &= \sum Y - a_0 N - a_1 \sum X = 0 \\ \sum X(Y - a_0 - a_1 X) &= \sum XY - a_0 \sum X - a_1 \sum X^2 = 0 \end{aligned}$$

ومن المعادلات الاعتدالية

$$\begin{cases} \sum Y = a_0 N + a_1 \sum X \\ \sum XY = a_0 \sum X + a_1 \sum X^2 \end{cases}$$

$$s_{YX}^2 = \frac{\sum Y(Y - a_0 - a_1 X)}{N} = \frac{\sum Y^2 - a_0 \sum Y - a_1 \sum XY}{N} \quad \text{إذن}$$

هذه النتيجة يمكن أن نعم لتشكل معادلات الانحدار غير الخطية .

X
65
63
67
64
68
62
70
66
68
67
69
71

$$\begin{aligned} \sum X &= 80 \\ \bar{X} &= 80/12 \\ &= 66.7 \end{aligned}$$

$$Y = \left(\frac{\sum Y}{\sum X} \right)$$

$$Y = \left(\frac{\sum Y}{\sum X} \right)$$

الطريقة الثانية

١٤ - ٤ إذا كانت $x = X - \bar{X}$ و $y = Y - \bar{Y}$ ، أثبت أن نتيجة المسألة ١٤ - ٣ يمكن كتابتها كالآتي :

$$s_{YX}^2 = \frac{\sum y^2 - a_1 \sum xy}{N}$$

الحل :

من المسألة ١٤ - ٣ ، حيث $X = x + \bar{X}$ و $Y = y + \bar{Y}$ ، فإن

$$\begin{aligned} N s_{YX}^2 &= \sum Y^2 - a_0 \sum Y - a_1 \sum XY = \sum (y + \bar{Y})^2 - a_0 \sum (y + \bar{Y}) - a_1 \sum (x + \bar{X})(y + \bar{Y}) \\ &= \sum (y^2 + 2y\bar{Y} + \bar{Y}^2) - a_0 (\sum y + N\bar{Y}) - a_1 (\sum xy + \bar{X}\sum y + \bar{Y}\sum x + N\bar{X}\bar{Y}) \\ &= \sum y^2 + 2\bar{Y} \sum y + N\bar{Y}^2 - a_0 N\bar{Y} - a_1 \sum xy - a_1 \bar{X} \sum y - a_1 \bar{Y} \sum x - a_1 N\bar{X}\bar{Y} \\ &= \sum y^2 + N\bar{Y}^2 - a_0 N\bar{Y} - a_1 \sum xy - a_1 N\bar{X}\bar{Y} = \sum y^2 - a_1 \sum xy + N\bar{Y}(\bar{Y} - a_0 - a_1 \bar{X}) \\ &= \sum y^2 - a_1 \sum xy \end{aligned}$$

حيث استخدمنا النتائج $\sum x = 0$ ، $\sum y = 0$ ، $\bar{Y} = a_0 + a_1 \bar{X}$ (والتي ننتج من قسمة طرق

المعادلة الاعتدالية $\sum Y = a_0 N + a_1 \sum X$ على N).

١٤ - ٥ احسب الخطأ المعياري للتقدير ، s_{YX} ، لبيانات المسألة ١٤ - ١ باستخدام :

(أ) التعريف (ب) نتيجة المسألة ١٤ - ٤ .

الحل :

(أ) من المسألة ١٤ - ١ (ب) خط الانحدار Y على X هو $Y = 35.82 + 0.476X$. يبين الجدول

١٤ - ٥ قيم Y الفعلية (من جدول المسألة ١٤ - ١) وقيم Y المقدرة ، معبراً عنها بالرمز Y_{est} .

كما حصلنا عليها من خط الانحدار على سبيل المثال ، المقابلة لقيمة $X = 65$

$$Y_{est} = 35.82 + 0.476(65) = 66.76 \quad \text{فإن}$$

كذلك يوضع الجدول القيم $s_{YX} = Y - Y_{est}$. التي نحتاج إليها في حساب s_{YX}

جدول ١٤ - ٥

X	65	63	67	64	68	62	70	66	68	67	69	71
Y	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70
Y_{est}	66.76	65.81	67.71	66.28	68.19	65.33	69.14	67.24	68.19	67.71	68.66	69.62
$Y - Y_{est}$	1.24	0.19	0.29	-1.28	0.81	0.67	-1.14	-2.24	2.81	-0.71	-0.66	0.38

$$s_{YX}^2 = \frac{\sum (Y - Y_{est})^2}{N} = \frac{(1.24)^2 + (0.19)^2 + \dots + (0.38)^2}{12} = 1.642 \quad \text{إذن}$$

$$s_{YX} = \sqrt{1.642} = 1.28 \text{ kg}$$

(ب) من المسائل ١، ٢، ٣، ٤

$$s_{Y.X}^2 = \frac{\sum Y^2 - a_1 \sum XY}{N} = \frac{38.92 - 0.476(40.34)}{12} = 1.643$$

$$s_{Y.X} = \sqrt{1.643} = 1.28 \text{ kg}$$

١٤-٩ (أ) ارسم خطين متوازيين لخط انحدار المسألة ١٤-١ وعلى بعد رأسى يساوى $s_{Y.X}$

(ب) حدد نسبة نقط البيانات التى تقع بين هذين الخطين .

الحل :

(أ) خط الانحدار

$$Y = 35.82 + 0.476X$$

حصلنا عليه في المسألة ١٤-١ موضع

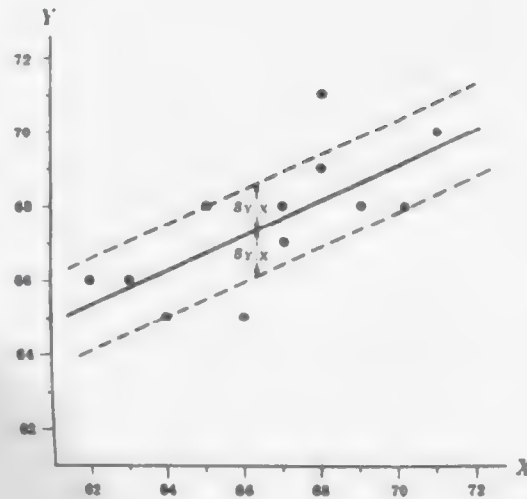
خط ثقيل في الشكل ١٤-٣ . والخطان

المتوازيان ، كلاهما على بعد رأسى

 $s_{Y.X} = 1.28$ منه (أنظر المسألة

١٤-٥) ، موضحيان بخطوط متقطعة

بالشكل ١٤-٣ .



شكل ١٤-٣

(ب) من الشكل يمكن مشاهدة أنه من الـ 12

نقطة من نقط البيانات تقع 7 نقط بين

الخطوط بينما يظهر 3 تقع على الخطوط

بمزيد من النقص باستخدام السطر الأخير

في الجدول ١٤-٥ بالمسألة ١٤-٥ ،

على سبيل المثال ، يتضح أن نقطتين من

الـ 3 نقط تقع بين الخطوط . وهذا فإن

النسبة المطلوبة = $75\% = 9/12$

طريقة أخرى :

من السطر الأخير بالجدول ١٤-٥ بالمسألة ١٤-٥ ، تقع بين 1.28

و 1.28 - (أى $\pm s_{Y.X}$) . لـ 9 نقط (X, Y) . بهذا فإن النسبة المثوية المطلوبة هي $75\% = 9/12$.

كالاتى :

 $N s_{Y.X}$

نسبة طرق

بين الجدول

رمز Y_{est}

X
Y
Y_{est}
$Y - Y_{est}$

إذا كانت النقط تتوزع توزيعاً طبيعياً حول خط الانحدار ، فإن النظرية تتنبأ بأن حوال 68% من النقط تقع بين الخطوط . وهذه تكون تقريباً الحالة إذا كان الحجم العينة كبيراً .

ملحوظة : هناك تقدير أفضل للخطأ المعياري في تقدير المجتمع الذي سمحت منه عينة الأطوال يعمل بالصيغة

$$\hat{s}_{y,x} = \sqrt{N/(N-2)} s_{y,x} = \sqrt{12/10}(1.28) = 1.40 \text{ kg}$$

الانحراف المفسر والانحراف غير المفسر .

$$١٤ - ٧ \text{ أثبت أن } \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = \Sigma(Y - Y_{est})^2 + \Sigma(Y_{est} - \bar{Y})^2$$

الحل

بتربيع طرفي المعادلة $Y - \bar{Y} = (Y - Y_{est}) - (Y_{est} - \bar{Y})$ ثم التجميع ، نحصل على

$$\Sigma(Y - \bar{Y})^2 = \Sigma(Y - Y_{est})^2 + \Sigma(Y_{est} - \bar{Y})^2 - 2 \Sigma(Y - Y_{est})(Y_{est} - \bar{Y})$$

النتيجة المطلوبة نحصل عليها مباشرة إذا أمكن إثبات أن الحد الأخير يساوي صفر ، وهذه هي الحالة في حالة الانحدار الخطي نظرًا لأن

$$\begin{aligned} \Sigma(Y - Y_{est})(Y_{est} - \bar{Y}) &= \Sigma(Y - a_0 - a_1X)(a_0 + a_1X - \bar{Y}) \\ &= a_0 \Sigma(Y - a_0 - a_1X) - a_1 \Sigma X(Y - a_0 - a_1X) - \bar{Y} \Sigma(Y - a_0 - a_1X) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ولأنه في المعادلات الاعتدالية } \Sigma(Y - a_0 - a_1X) = 0 \text{ and } \Sigma X(Y - a_0 - a_1X) = 0$$

هذه النتيجة يمكن إثبات صلاحيتها للانحدار غير الخطي باستخدام منحني المربعات الصغرى المعروف بما يلي

$$Y_{est} = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$$

١٤ - ٨ أجب (أ) الاختلاف الكلي . (ب) الاختلاف الغير مفسر .

(ج) الاختلاف المفسر وذلك لبيانات المسألة ١٤-١ .

الحل :

$$\text{(أ) الاختلاف الكلي } = \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = \Sigma Y^2 = 38.92 \text{ من المسألة ١٤-٢}$$

$$\text{(ب) الاختلاف الغير مفسر } = \Sigma(Y - Y_{est})^2 = N s_{y,x}^2 = 19.70 \text{ من المسألة ١٤-٥}$$

$$\text{(ج) الاختلاف المفسر } = \Sigma(Y_{est} - \bar{Y})^2 = 38.92 - 19.70 = 19.22 \text{ من المسألة ١٤-٧}$$

طريقة أخرى :

بما أن $\bar{Y} = 811/112 = 67.58$ ، فيمكن تكوين الجدول التالي باستخدام قيم Y_{est} التي حصلنا عليها بالجدول ١٤ - ٥ بالمسألة ١٤ - ٥ .

-0.82	-1.77	0.13	-1.30	0.61	-2.25	1.56	-0.34	0.61	0.13	1.08	2.04
-------	-------	------	-------	------	-------	------	-------	------	------	------	------

$$\sum (Y_{est} - \bar{Y})^2 = (-0.82)^2 + (-1.77)^2 + \dots + (2.04)^2 = 19.21 \quad \text{إذن}$$

ويمكن الحصول على نتائج (أ) و (ب) مباشرة .

معامل الارتباط :

١٤ - ٩ أوجد (أ) معامل التحديد . (ب) معامل الارتباط . لبيانات المسألة ١٤ - ١ . استخدم نتائج المسألة ١٤ - ٨

الحل :

$$(أ) \quad r^2 = \frac{\text{الاختلاف المفسر}}{\text{الاختلاف الكلي}} = \frac{19.22}{38.92} = 0.4938 \quad (١)$$

$$(ب) \quad \text{معامل الارتباط} = r = \pm \sqrt{0.4938} = \pm 0.7027$$

بما أن المتغير Y_{est} يتزايد كلما تزايدت قيمة X ، فإن الارتباط موجب ويمكن بذلك أن نكتب $r = 0.7027$ أو $r = 0.70$ لرقين معنويين .

١٤ - ١٥ أثبت أن معامل الارتباط بين المتغيرين X و Y يمكن كتابته في حالة الانحدار الخطي كالتالي :

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{(\sum x^2)(\sum y^2)}}$$

$$\text{حيث } x = X - \bar{X} \text{ و } y = Y - \bar{Y}$$

الحل :

خط انحدار Y على X باستخدام المربعات الصغرى يمكن كتابته على الصورة $Y_{est} = a_0 + a_1 X$

$$\text{أو } Y_{est} = a_1 X \quad \text{حيث } a_1 = \frac{\sum xy}{\sum x^2} \quad \text{و } y_{est} = Y_{est} - \bar{Y} \quad (\text{أنظر المسألة ١٥ (أ) بالفصل الثالث عشر}) \quad \text{إذن}$$

$$r^2 = \frac{\text{الاختلاف المفسر}}{\text{الاختلاف الكلي}} = \frac{\sum (Y_{est} - \bar{Y})^2}{\sum (Y - \bar{Y})^2} = \frac{\sum y_{est}^2}{\sum y^2}$$

$$= \frac{\sum a_1^2 x^2}{\sum y^2} = \frac{a_1^2 \sum x^2}{\sum y^2} = \left(\frac{\sum xy}{\sum x^2} \right)^2 \frac{\sum x^2}{\sum y^2} = \frac{(\sum xy)^2}{(\sum x^2)(\sum y^2)}$$

و $r = \pm \frac{\sum xy}{\sqrt{(\sum x^2)(\sum y^2)}}$ مما أن المقدار $\frac{\sum xy}{\sqrt{(\sum x^2)(\sum y^2)}}$ موجب في حالة حالة ما إذا زادت y مع x كلما زادت x (أى ، ارتباط خطى موجب) وسالب إذا تناقصت y كلما زادت x (أى ، ارتباط خطى سالب) فيظهر في الصيغة الإشارة الصحيحة تلقائياً . هذا نعرف معامل الارتباط الخطى بأنه

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{(\sum x^2)(\sum y^2)}}$$

وهذا يسمى غالباً بصيغة عزم حاصل الضرب لمعامل الارتباط الخطى .

عزم حاصل الضرب لمعامل الارتباط الخطى :

١١-١٤ أوجد معامل الارتباط الخطى بين المتغيرين X و Y المبينين في الجدول ١٤ - ٦ .

جدول ١٤ - ٦

X	1	3	4	6	8	9	11	14
Y	1	2	4	4	5	7	8	9

الحل :

يمكن ترتيب العمل المطلوب في الحسابات كما في الجدول ١٤ - ٧ .

جدول ١٤ - ٧

X	Y	$x = X - \bar{X}$	$y = Y - \bar{Y}$	x^2	xy	y^2
1	1	-6	-4	36	24	16
3	2	-4	-3	16	12	9
4	4	-3	-1	9	3	1
6	4	-1	-1	1	1	1
8	5	1	0	1	0	0
9	7	2	2	4	4	4
11	8	4	3	16	12	9
14	9	7	4	49	28	16
$\sum X = 56$ $\bar{X} = 56/8 = 7$	$\sum Y = 40$ $\bar{Y} = 40/8 = 5$			$\sum x^2 = 132$	$\sum xy = 84$	$\sum y^2 = 56$

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{(\sum x^2)(\sum y^2)}} = \frac{84}{\sqrt{(132)(56)}} = 0.977$$

وهذا يوضح أن هناك ارتباطاً خطياً قوياً جداً بين المتغيرات ، كما لاحظنا بالفعل في المسائل ١٣ - ٨ و ١٣ - ١٢ .
بالفصل الثالث عشر .

١٢-١٤ أوجد (أ) الانحراف المعياري لـ X ، (ب) الانحراف المعياري لـ Y ، (ج) تباين X ، (د) تباين Y (ج) تغاير X و Y وذلك لبيانات المسألة ١١ - ١٤

الحل :

$$\text{الانحراف المعياري لـ } X = s_x = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}} = \sqrt{\frac{132}{8}} = 4.06 \quad (أ)$$

$$\text{الانحراف المعياري لـ } Y = s_y = \sqrt{\frac{\sum (Y - \bar{Y})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum y^2}{N}} = \sqrt{\frac{56}{8}} = 2.65 \quad (ب)$$

$$\text{تباين } X = s_x^2 = 16.50 \quad (ج)$$

$$\text{تباين } Y = s_y^2 = 7.00 \quad (د)$$

$$\text{تغاير } X \text{ و } Y = s_{xy} = \frac{\sum xy}{N} = \frac{84}{8} = 10.50 \quad (هـ)$$

$$\text{١٣-١٤ أثبت الصيغة } r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \text{ لبيانات المسألة ١١ - ١٤}$$

الحل :

$$\text{من المسألة ١٢ - ١٤ } r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{10.50}{(4.06)(2.65)} = 0.976 \text{ ، وذلك بالاتفاق (فيما عدا أخطاء التقريب) مع نتائج المسألة ١١ - ١٤ .}$$

١٤-١٤ باستخدام صيغة عزم حاصل الضرب ، أوجد معامل الارتباط الخطي لبيانات المسألة ١٤ - ١٤

الحل :

يمكن ترتيب العمل المطلوب في الحساب كما في الجدول ١٤ - ٣ بالمسألة ١٤ - ٢ . إذن

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{(\sum x^2)(\sum y^2)}} = \frac{40.34}{\sqrt{(84.68)(38.92)}} = 0.7027$$

وهذا يتفق مع الطريقة المطولة المستخدمة في المسألة ١٤ - ١٩

١٥-١٤ وضع أن معامل الارتباط الخطي يعرف كالآتي :

$$r = \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{[N \sum X^2 - (\sum X)^2][N \sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}$$

الحل :

بكتابة $x = X - \bar{X}$ ، $y = Y - \bar{Y}$ في نتيجة المسألة ١٠ ، نحصل على

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{(\sum x^2)(\sum y^2)}} = \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{[\sum (X - \bar{X})^2][\sum (Y - \bar{Y})^2]}}$$

أدت Vent

ارتباط خطي

X
1
3
4
6
8
9
11
14
$\sum X = 56$
$\bar{X} = 56/8 = 7$

١٢ - ١٣ و ٨ -

$$\begin{aligned}\Sigma (X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) &= \Sigma (XY - \bar{X}Y - X\bar{Y} + \bar{X}\bar{Y}) = \Sigma XY - \bar{X} \Sigma Y - \bar{Y} \Sigma X + N\bar{X}\bar{Y} \\ &= \Sigma XY - N\bar{X}\bar{Y} - N\bar{Y}\bar{X} + N\bar{X}\bar{Y} = \Sigma XY - N\bar{X}\bar{Y} \\ &= \Sigma XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}\end{aligned}$$

$$\bar{X} = (\Sigma X)/N \text{ and } \bar{Y} = (\Sigma Y)/N \quad \text{ونظراً لأن}$$

$$\begin{aligned}\Sigma (X - \bar{X})^2 &= \Sigma (X^2 - 2X\bar{X} + \bar{X}^2) = \Sigma X^2 - 2\bar{X} \Sigma X + N\bar{X}^2 \\ &= \Sigma X^2 - \frac{2(\Sigma X)^2}{N} + \frac{(\Sigma X)^2}{N} = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}\end{aligned}$$

$$\Sigma (Y - \bar{Y})^2 = \Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{N} \quad \text{وبصورة مماثلة}$$

$$r = \frac{\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)/N}{\sqrt{[\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/N][\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2/N]}} = \frac{N \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}}$$

١٦-١٤ استخدم صيغة النسبة ١٤ - ١٥ للحصول على معامل الارتباط الخطي لبيانات المسألة ١٤ - ١٦

الحل :

من الجدول ١٤ - ٢ بالمسألة ١٤ - ١٦ ، نحصل على

$$\begin{aligned}r &= \frac{N \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}} \\ &= \frac{(12)(54107) - (800)(811)}{\sqrt{[(12)(53418) - (800)^2][(12)(54849) - (811)^2]}} = 0.7027\end{aligned}$$

كافى المسألة ١٤ - ٩ و ١٤ - ١٤ .

طريقة أخرى :

قيمة r مستقلة عن اختيار نقطة الأصل في X و Y . هذا يمكن استخدام الطريقة الثانية بالمسألة ١٤ - ٢ للحصول على :

$$r = \frac{N \Sigma X'Y' - (\Sigma X')(\Sigma Y')}{\sqrt{[N \Sigma X'^2 - (\Sigma X')^2][N \Sigma Y'^2 - (\Sigma Y')^2]}} = \frac{12(647) - (80)(91)}{\sqrt{[(12)(618) - (80)^2][(12)(729) - (91)^2]}} = 0.7027$$

معامل الارتباط للبيانات المجمعة :

١٧-١٤ الجدول ١٤ - ٨ يوضح التوزيع التكرارى للدرجات النهائية لـ ١٠٠ طالب في مادتي الرياضة والطبيعة . بالرجوع إلى هذا الجدول أوجد

(أ) عدد الطلبة الذين حصلوا على الدرجات 79 - 70 في الرياضة و 89 - 80 في الطبيعة

(ب) النسبة المئوية للطلبة الذين حصلوا في الرياضة على درجات أقل من 70

(ج) عدد الطلبة الذين حصلوا على درجات 70 أو أكثر في الطبيعة وأقل من 80 في الرياضة

(د) النسبة المئوية للطلبة الذين نجحوا في كل من الطبيعة والرياضة مقترعاً أن 60 هو الحد الأدنى لدرجة النجاح .

جدول ١٤ - ٨

درجات الرياضة

	40 — 49	50 — 59	60 — 69	70 — 79	80 — 89	90 — 99	المجموع
90 — 99				2	4	4	10
80 — 89			1	4	6	5	16
70 — 79			5	10	8	1	24
60 — 69	1	4	9	5	2		21
50 — 59	8	6	6	2			17
40 — 49	8	5	4				12
المجموع	7	15	25	23	20	10	100

الحل :

(أ) اتجه إلى أسفل في العمود الممنون 70 — 79 (درجات الرياضة) إلى الصف الممنون 80 — 89 (درجات الطبيعة) الخلية المشتركة وهي 4 تعطي عدد الطلبة المطلوب .

(ب) العدد الكلي للطلبة الذين درجاتهم في الرياضة أقل من 70 = العدد الذي درجاته 40 — 49 + العدد الذي درجاته 50 — 59 + العدد الذي درجاته 60 — 69 = 7 + 15 + 25 = 47 . النسبة المئوية لطلبة الذين درجاتهم في الرياضة أقل من 70 هو : $47 / 100 = 47\%$

(ج) عدد الطلبة المطلوب هو مجموع المتصر في الجدول ١٤ - ٩ ، والذي يمثل جزءاً من الجدول ١٤ - ٨ .
عدد الطلبة المطلوب = $22 = 1 + 5 + 2 + 4 + 10$

جدول ١٤ - ١٠

درجات الرياضة

	60 — 69	70 — 79
90 — 99		2
80 — 89	1	4
70 — 79	5	10

جدول ١٤ - ٩

درجات الرياضة

	40 — 49	50 — 59
50 — 59	3	6
40 — 49	3	5

(د) بالرجوع إلى الجدول ١٠ - ١٤ والمأخوذ من الجدول ١٤ - ٨ ، يتضح أن عدد الطلبة الذين كانت درجاتهم أقل من 60 في كل من الرياضة والطبيعة هو $17 = 3 + 3 + 6 + 5$. وهذا فإن عدد الطلبة الذين كانت درجاتهم 60 أو أكثر في كل من الطبيعة والرياضة هو $83 = 100 - 17$ ، والنسبة المئوية المطلوبة هي $83\% = 83 / 100$

الجدول ٨ - ١٤ يسمى أحياناً جدولاً تكرارياً لمتغيرين أو توزيعاً تكرارياً ذا متغيرين . كل مربع في الجدول يسمى خلية ويقابل زوجين من الفئات . الرقم الموضح في الخلية يسمى تكرار الخلية . على سبيل المثال ، في الجزء (أ) الرقم 4 هو تكرار الخلية المقابل لأزواج الفئات 70 — 79 في الرياضة و 80 — 89 في الطبيعة .

المجاميع الموضحة في الصف الأخير وفي العمود الأخير تسمى بالمجاميع الهامشية أو التكرارات الهامشية . وهي تقابل على الترتيب تكرارات الفئات للتوزيع التكرارى للرياضة إذا اعتبر بمفرده والتوزيع التكرارى للطبيعة بمفرده .

١٨-١٤ وضع كيف تعدل صيغة المسألة ١٤ - ١٥ بحيث تنطبق في حالة البيانات المهجنة في الجدول التكرارى المزدوج (جدول ٨ - ١٤) للمسألة ١٤ - ١٧ .

الحل :

لبيانات المهجنة ، يمكن أن نعتبر القيم المختلفة للمتغيرات X و Y تتفق مع مراكز الفئات بين f_X و f_Y هي التكرارات المقابلة للفئات أو التكرارات الهامشية الموضحة في الصف الأخير والعمود الأخير .

فجدول التكرارى المزدوج (ذى المتغيرين) . إذا اعتبرنا f تمثل تكرارات الخلايا المختلفة المقابلة لأزواج مراكز الفئات (X و Y) ، إذن يمكن أن نحل محل الصيغة ١٤ - ١٥ ، الصيغة التالية

$$(1) \quad r = \frac{N \sum f_{XY} - (\sum f_X X)(\sum f_Y Y)}{\sqrt{[N \sum f_X X^2 - (\sum f_X X)^2][N \sum f_Y Y^2 - (\sum f_Y Y)^2]}}$$

إذا اعتبرنا $X = A + c_X u_X$ و $Y = B + c_Y u_Y$ حيث c_X و c_Y مى طول الفئة (بفرض أنها ثابتة) A و B هي مراكز فئات اختيارية مقابلة للمتغيرات ، فإن الصيغة السابقة تصبح :

$$(2) \quad r = \frac{N \sum f_{u_X u_Y} - (\sum f_X u_X)(\sum f_Y u_Y)}{\sqrt{[N \sum f_X u_X^2 - (\sum f_X u_X)^2][N \sum f_Y u_Y^2 - (\sum f_Y u_Y)^2]}}$$

وهذه هي طريقة الترميز المستخدمة في الفصول السابقة كطريقة مختصرة لحساب المتوسطات ، الانحرافات المياريّة والمزوم الأعلى رتبة .

١٩-١٤ أوجد معامل الارتباط الخطى لدرجات الرياضة والطبيعة بالمسألة ١٤ - ١٧ .

الحل :

نستخدم الصيغة (٢) بالمسألة ١٤ - ١٨ . ويمكن ترتيب الحل كما في الجدول ١٤ - ١١ والذى يسمى بجدول الارتباط . المجاميع $\sum f_X$, $\sum f_Y$, $\sum f_X u_X$, $\sum f_Y u_Y$, $\sum f_X u_X^2$, $\sum f_Y u_Y^2$, $\sum f_X u_X u_Y$ نحصل عليها باستخدام طريقة الترميز كما في الفصول السابقة .

جدول ١٤ - ١١

		درجات الرياضة						f_v	$f_v u_v$	$f_v u_v^2$	مجموع الارقام بالرموز الجانبية في كل عمود	
		X	44.5	54.5	64.5	74.5	84.5					94.5
درجات الطبيعة Y	Y	u_x u_y	-2	-1	0	1	2	3				
	94.5	2				2	4	4	10	20	40	44
	84.5	1			1	4	6	5	16	16	16	31
	74.5	0			5	10	8	1	24	0	0	0
	64.5	-1	1	4	9	5	2		21	-21	21	-3
	54.5	-2	3	6	6	2			17	-34	68	20
	44.5	-3	3	5	4				12	-36	108	33
f_x			7	15	25	23	20	10	$\Sigma f_x = \Sigma f_v$ $= N = 100$	$\Sigma f_v u_v$ $= -55$	$\Sigma f_v u_v^2$ $= 253$	$\Sigma f_{x u_x u_y}$ $= 125$
$f_x u_x$			-14	-15	0	23	40	30	$\Sigma f_x u_x$ $= 64$			
$f_x u_x^2$			28	15	0	23	80	90	$\Sigma f_x u_x^2$ $= 236$			
مجموع الارقام بالرموز الجانبية في كل عمود			32	31	0	-1	24	39	$\Sigma f_{x u_x u_y}$ $= 125$			

الرقم في المربع الجانبي في كل خلية يمثل حاصل ضرب $u_v u_y$ حيث f تعبر عن تكرار الخلية. مجموع هذه الأرقام الموجودة في المربع الجانبي بكل خلية موضحة في الصف المقابل بالعمود الأخير. مجموع هذه الأرقام الجانبية في كل عمود موضح بالعمود المقابل بالصف الأخير. المجاميع الكلية في الصف الأخير والعمود الأخير متساويان ويمثلان $\Sigma f u_x u_y$.

من الجدول ١٤ - ١١ نحصل على

$$r = \frac{N \Sigma f u_x u_y - (\Sigma f_x u_x)(\Sigma f_y u_y)}{\sqrt{[N \Sigma f_x u_x^2 - (\Sigma f_x u_x)^2][N \Sigma f_y u_y^2 - (\Sigma f_y u_y)^2]}}$$

$$= \frac{(100)(125) - (64)(-55)}{\sqrt{[(100)(236) - (64)^2][(100)(253) - (-55)^2]}} = \frac{16020}{\sqrt{(19504)(22275)}} = 0.7686$$

هي تقابل

(جدول

 f_y و f_x

كز الفئات

(١)

B و A (

(٢)

ت المعيارية

سمى بجدول

يقة الترميز

١٤-٢٠ استخدم جدول الارتباط بالمسألة ١٤ - ١٩ لحساب (أ) s_x (ب) s_y (ج) s_{xy}

وأثبت الصيغة $r = s_{xy}/(s_x s_y)$

الحل :

$$s_x = c_x \sqrt{\frac{\sum f_x u_x^2}{N} - \left(\frac{\sum f_x u_x}{N}\right)^2} = 10 \sqrt{\frac{236}{100} - \left(\frac{64}{100}\right)^2} = 13.966 \quad (أ)$$

$$s_y = c_y \sqrt{\frac{\sum f_y u_y^2}{N} - \left(\frac{\sum f_y u_y}{N}\right)^2} = 10 \sqrt{\frac{253}{100} - \left(\frac{-55}{100}\right)^2} = 14.925 \quad (ب)$$

$$s_{xy} = c_x c_y \left[\frac{\sum f_{xy} u_x u_y}{N} - \left(\frac{\sum f_x u_x}{N}\right) \left(\frac{\sum f_y u_y}{N}\right) \right] = (10)(10) \left[\frac{125}{100} - \left(\frac{64}{100}\right) \left(\frac{-55}{100}\right) \right] = 160.20 \quad (ج)$$

أي أن الانحراف المعياري لدرجات الرياضة هو 14.0 و لدرجات الطبيعة هو 14.9 . بينما تفايرهما هو 160.2

وبهذا يكون معامل الارتباط $r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{160.20}{(13.966)(14.925)} = 0.7686$ متفق مع المسألة ١٤ - ١٩ .

خطوط الانحدار ومعامل الارتباط :

١٤-٢١ أثبت أن خطوط انحدار Y على X و X على Y نحصل عليهما من المعادلات التالية على الترتيب

$$Y - \bar{Y} = \frac{rs_y}{s_x} (X - \bar{X}) \quad (أ)$$

$$X - \bar{X} = \frac{rs_x}{s_y} (Y - \bar{Y}) \quad (ب)$$

الحل :

(أ) من المسألة ١٥ (أ) بالفصل الثالث عشر ، معادلة خط انحدار Y على X هي

$$Y - \bar{Y} = \left(\frac{\sum xy}{\sum x^2} \right) (X - \bar{X}) \quad ; \quad y = \left(\frac{\sum xy}{\sum x^2} \right) x$$

بما أن $r = \frac{\sum xy}{\sqrt{(\sum x^2)(\sum y^2)}}$ (أنظر المسألة ١٤ - ١٠) ، فإن

$$\frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{r \sqrt{(\sum x^2)(\sum y^2)}}{\sum x^2} = \frac{r \sqrt{\sum y^2}}{\sqrt{\sum x^2}} = \frac{rs_y}{s_x}$$

وبهذا نحصل على النتيجة المطلوبة

(ب) نحصل على هذه النتيجة بتبديل X و Y في الجزء (أ)

١٤-٢٢ إذا كانت خطوط الانحدار X و Y تعطى بالمعادلات $X = b_0 + b_1 Y$ و $Y = a_0 + a_1 X$ ، أثبت أن $a_1 b_1 = r^2$.

الحل :

$$\text{من المسائل ٢١ (أ) ، ٢١ (ب) ، } a_1 = \frac{r s_y}{s_x} \text{ و } b_1 = \frac{r s_x}{s_y} \text{ إذن } a_1 b_1 = \left(\frac{r s_y}{s_x}\right) \left(\frac{r s_x}{s_y}\right) = r^2$$

هذه النتيجة يمكن اعتبارها كنقطة بداية في تعريف معامل الارتباط الخطي .

١٤-٢٣ استخدم نتائج المسألة ١٣ - ٢٢ لإيجاد معامل الارتباط الخطي لبيانات المسألة ١٤ - ١

الحل :

من المسألة ١٤ - ١ (ب) و ١٤ - ١ (ج) على الترتيب ، $a_1 = 484/1016 = 0.476$ and $b_1 = 484/467 = 1.036$ ،

إذن $r = 0.7027$ and $r^2 = a_1 b_1 = (484/1016)(484/467)$ وبالتفاه مع المسائل ١٤ - ٩ ، ١٤ - ١٤ ، ١٤ - ١٦

١٤-٢٤ أكتب معادلات خطوط الانحدار (أ) Y على X (ب) X على Y لبيانات المسألة ١٤ - ١٩

الحل :

من جدول الارتباط بالمسألة ١٤ - ١٩ ، نحصل على

$$\bar{X} = A + c_x \frac{\sum f_x u_x}{N} = 64.5 + \frac{(10)(64)}{100} = 70.9$$

$$\bar{Y} = B + c_y \frac{\sum f_y u_y}{N} = 75.4 + \frac{(10)(-55)}{100} = 69.0$$

من نتائج المسألة ١٤ - ٢٠ ، $s_x = 13.966$ ، $s_y = 14.925$ and $r = 0.7686$ ،

ومن ثم نستخدم المسائل ١٤ - ٢١ (أ) و ١٤ - ٢١ (ب) للحصول على معادلات خطوط الانحدار .

$$Y - \bar{Y} = \frac{r s_y}{s_x} (X - \bar{X}), Y - 69.0 = \frac{(0.7686)(14.925)}{13.966} (X - 70.9), \text{ or } Y - 69.0 = 0.821(X - 70.9) \quad (أ)$$

$$X - \bar{X} = \frac{r s_x}{s_y} (Y - \bar{Y}), X - 70.9 = \frac{(0.7686)(13.966)}{14.925} (Y - 69.0), \text{ or } X - 70.9 = 0.719(Y - 69.0) \quad (ب)$$

١٤-٢٥ احسب الخطأ المعياري لتقدير (أ) $s_{y.x}$ (ب) $s_{x.y}$ لبيانات المسألة ١٤ - ١٩ . استخدم نتائج المسألة ١٤ - ٢٠ .

الحل :

$$s_{y.x} = s_y \sqrt{1 - r^2} = 14.925 \sqrt{1 - (0.7686)^2} = 9.548 \quad (أ)$$

$$s_{x.y} = s_x \sqrt{1 - r^2} = 13.966 \sqrt{1 - (0.7686)^2} = 8.934 \quad (ب)$$

ارتباط الرتب

٢٦-١٤ الجدول التالي يوضح كيف أن 10 طلاب ، مرتبين ترتيباً أبجدياً ، رتبوا حسب مستوى أدائهم في كل من جزء العمل وجزء المحاضرات في مادة البيولوجي . أوجد معامل ارتباط الرتب .

العمل	8	8	9	2	7	10	4	6	1	5
المحاضرات	9	5	10	1	8	7	3	4	2	6

الحل :

يوضح الجدول التالي الفروق D بين رتب كل من العمل والمحاضرات . كذلك يوضح الجدول $\sum D^2$ و D^2 .

D فروق الرتب	-1	-2	-1	1	-1	3	1	2	-1	-1
D^2	1	4	1	1	1	9	1	4	1	1
$\sum D^2$	= 24									

$$r_{\text{rank}} = 1 - \frac{6 \sum D^2}{N(N^2 - 1)} = 1 - \frac{6(24)}{10(10^2 - 1)} = 0.8545$$

إذن

ما يشير إلى وجود علاقة ملحوظة بين أداء الطلبة في العمل والمحاضرات .

٢٧-١٤ احسب معامل ارتباط الرتب لبيانات المسألة ١٤ - ١ وقارن نتائجك بمعامل الارتباط الذي حصلت عليه بالطرق الأخرى

الحل :

رتب أوزان الآباء ترتيباً تصاعدياً كالآتي :

(١) 62, 63, 64, 65, 66, 67, 67, 68, 68, 69, 70, 71

وبما أن المكان السادس والسابع في هذه المنظومة يمثل نفس الوزن (67 kg) فإننا نعطي هذه الأماكن متوسط الرتبتين أي 6.5 . كذلك فإن المكانين الثامن والتاسع تعطى لهما الرتبة 8.5 . بهذا فإن أوزان الآباء تعطى لها الرتب .

(٢) 1, 2, 3, 4, 5, 6.5, 6.5, 8.5, 8.5, 10, 11, 12

بصورة مماثلة ، رتب أوزان الأبناء ترتيباً تصاعدياً كالآتي :

(٣) 65, 65, 66, 66, 67, 68, 68, 68, 68, 69, 70, 71

بما أن الأماكن السادس والسابع والثامن والتاسع تمثل نفس الوزن (68 kg) فإننا نعطي متوسط الرتب 7.5 إلى هذه الأماكن ونحسب $[(6 + 7 + 8 + 9)/4]$ بهذا فإن أوزان الأبناء تعطى لها الرتب .

(٤) 1.5, 1.5, 3.5, 3.5, 5, 7.5, 7.5, 7.5, 7.5, 10, 11, 12

مستخدم التقابل بين (١) ، (٢) و (٣) ، (٤) فإن الجدول ١-١٤ للمسألة ١-١٤ يصبح .

رتبة الأب	4	2	6.5	3	8.5	1	11	5	8.5	6.5	10	12
رتبة الابن	7.5	3.5	7.5	1.5	10	3.5	7.5	1.5	12	5	7.5	11

الاختلاف في الرتب D ، وحساب D^2 و ΣD^2 موضع بالجدول التالي .

D	-3.5	-1.5	-1.0	1.5	-1.5	-2.5	3.5	3.5	3.5	1.5	2.5	1.0
D^2	12.25	2.25	1.00	2.25	2.25	6.25	12.25	12.25	12.25	2.25	6.25	1.00
ΣD^2	72.50											

$$r_{\text{rank}} = 1 - \frac{6 \Sigma D^2}{N(N^2 - 1)} = 1 - \frac{6(72.50)}{12(12^2 - 1)} = 0.7465 \quad \text{إذن}$$

والتي تتفق مع قيمة $r = 0.7027$ التي حصلنا عليها في المسائل ١٤ - ٩ ، ١٤ - ١٤ ، ١٤ - ١٦ أو ١٤ - ٢٣ بالفصل الرابع عشر .

ارتباط السلاسل الزمنية :

٢٨-١٤ الجدول ١٢-١٤ يبين متوسط أسعار الأسهم والسندات ببورصة نيويورك للأوراق المسالية خلال الأعوام 1950 — 1959

(١) أوجد معامل الارتباط . (ب) فسر النتائج

جدول ١٤ - ١٢

السنة	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959
متوسط أسعار الأسهم (بالدولار)	35.22	39.87	41.85	43.23	40.06	53.29	54.14	49.12	40.71	55.15
متوسط أسعار السندات (بالدولار)	102.43	100.93	97.43	97.81	98.32	100.07	97.08	91.59	94.85	94.65

المصدر : بورصة نيويورك للأوراق المسالية

الحل :

(١) اعتبر أن X تمثل متوسط أسعار الأسهم و Y متوسط أسعار السندات ، حساب معامل الارتباط يمكن إجراؤه .
كما في الجدول ١٤ - ١٣ . لاحظ أن السنة استخدمت فقط لبيان قيم Y و X المتقابلة .

جدول ١٤ - ١٣

X	Y	$x = X - \bar{X}$	$y = Y - \bar{Y}$	x^2	xy	y^2
35.22	102.43	-10.04	4.91	100.80	-49.30	24.11
39.87	100.93	-5.39	3.41	29.05	-18.38	11.63
41.85	97.43	-3.41	0.09	11.63	-0.31	0.01
43.23	97.81	-2.03	0.29	4.12	-0.59	0.08
40.06	98.32	-5.20	0.80	27.04	-4.16	0.64
53.29	100.07	8.03	2.55	64.48	20.48	6.50
54.14	97.08	8.88	0.44	78.85	-3.91	0.19
49.12	91.59	3.86	5.93	14.90	-22.89	35.16
40.71	94.85	4.55	-2.67	20.70	-12.15	7.13
55.15	94.65	9.89	-2.87	97.81	-28.38	8.24
ΣX = 452.64 $\bar{X} = 45.26$	ΣY = 975.16 $\bar{Y} = 97.52$			Σx^2 = 449.38	Σxy = 94.67	Σy^2 = 93.69

من جزء المحل

ΣD^2 و D^2

رواق الرتب

D^2

$r_{\text{rank}} = 1 - \frac{6 \Sigma D^2}{N(N^2 - 1)}$

ه بالطرق الأخرى

(١)

و الأماكن متوسط
ران الآباء تملأ

(٢)

(٢)

وسط الرتب 7.5
تب .

(٤)

رتبة الأب

رتبة الأم

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{(\sum x^2)(\sum y^2)}} = \frac{-94.67}{\sqrt{(449.38)(93.69)}} = -0.4614$$

هذا وباستخدام صيغة عزم حاصل الضرب

(ب) نستنتج مما سبق أن هناك ارتباطاً سالباً بين أسعار الأسهم والسندات (أى ، أن هناك اتجاهها لانخفاض أسعار الأسهم كلما زادت أسعار السندات ، والعكس) على الرغم من أن هذه العلاقة ليست على قدر كبير من الوضوح.

طريقة أخرى : باستخدام ارتباط الرتب (كما في المسائل ١٤ - ٢٦ و ١٤ - ٢٧) .

الجدول ١٤-١٤ يوضح رتب متوسط أسعار الأسهم والسندات للسنوات 1950-1959 بصورة تصاعدية .

كذلك يوضح في الجدول فروق الرتب $\sum D^2$ و D

جدول ١٤-١٤

السنة	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	
اسعار الأسهم حسب الرتب	1	2	5	6	3	8	9	7	4	10	
أسعار السندات حسب الرتب	10	9	5	6	7	8	4	1	3	2	
الفروق بين الرتب D	-9	-7	0	0	-4	0	5	6	1	8	
D^2	81	49	0	0	16	0	25	36	1	64	$\sum D^2 = 272$

$$r_{\text{rank}} = 1 - \frac{6 \sum D^2}{N(N^2 - 1)} = 1 - \frac{6(272)}{10(10^2 - 1)} = 0.6485$$

إذن

وهذه النتيجة تقارن بصورة مرضية مع نتيجة الطريقة الأولى . ويمكن أيضاً طرح ثابت مناسب من المتغيرات ثم

نستخدم الطريقة الثانية بالمسألة ١٤-١٦ .

الارتباط الغير خطي :

١٤-٢٩ وفق معادلة قطع مكافئ في الصورة $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2$ ، باستخدام طريقة المربعات الصغرى ، البيانات التالية

جدول ١٤-١٥

X	1.2	1.8	3.1	4.9	5.7	7.1	8.6	9.8
Y	4.5	5.9	7.0	7.8	7.2	6.8	4.5	2.7

الحل :

المعادلات الاعتدالية هي (أنظر الفصل الثالث عشر ، صفحة ٢٥٥)

(١)

$$\left. \begin{aligned} \sum Y &= a_0 N + a_1 \sum X + a_2 \sum X^2 \\ \sum XY &= a_0 \sum X + a_1 \sum X^2 + a_2 \sum X^3 \\ \sum X^2 Y &= a_0 \sum X^2 + a_1 \sum X^3 + a_2 \sum X^4 \end{aligned} \right\}$$

العمل المتضمن في حساب المجاميع يمكن ترتيبه كما في الجدول ١٤-٦ .

جدول ١٤-٦

X	Y	X ²	X ³	X ⁴	XY	X ² Y
1.2	4.5	1.44	1.73	2.08	5.40	6.48
1.8	5.9	3.24	5.83	10.49	10.62	19.12
3.1	7.0	9.61	29.79	92.35	21.70	67.27
4.9	7.8	24.01	117.65	576.48	38.22	187.28
5.7	7.2	32.49	185.19	1055.58	41.04	233.93
7.1	6.8	50.41	357.91	2541.16	48.28	342.79
8.6	4.5	73.96	636.06	5470.12	38.70	332.82
9.8	2.7	96.04	941.19	9223.66	26.46	259.31
$\Sigma X = 42.2$	$\Sigma Y = 46.4$	$\Sigma X^2 = 291.20$	$\Sigma X^3 = 2275.35$	$\Sigma X^4 = 18971.92$	$\Sigma XY = 230.42$	$\Sigma X^2Y = 1449.00$

بهذا فإن المعادلات الاعتدالية (١) تصبح ، حيث $N = 8$ ، كالآتي .

$$\begin{cases} 8a_0 + 42.2a_1 + 291.20a_2 = 46.4 \\ 42.2a_0 + 291.20a_1 + 2275.35a_2 = 230.42 \\ 291.20a_0 + 2275.35a_1 + 18971.92a_2 = 1449.00 \end{cases}$$

بهذا ، فإن قطع مكافئ

$$a_0 = 2.588, a_1 = 2.065, a_2 = -0.2110$$

يحل هذه المعادلات نحصل على

المربعات الصغرى له المعادلة .

$$Y = 2.588 + 2.065X - 0.2110X^2$$

٢١-١١ استخدم قطع مكافئ المربعات الصغرى بالمسألة ٢٩-١٤ لتقدير قيم Y لقيم X المعطاة .

الحل :

لقيمة $X = 102$ فإن $Y_{est} = 2.588 + 2.065(1.2) - 0.2110(1.2)^2 = 4.762$. بصورة مماثلة ،
نعمل على القيم المقدرة الأخرى . النتائج موضحة بالجدول ١٧-١٤ الذي يعطى أيضا قيم Y الفعلية .

جدول ١٧-١٤

Y_{est}	4.762	5.621	6.962	7.640	7.503	6.613	4.741	2.561
Y	4.5	5.9	7.0	7.8	7.2	6.8	4.5	2.7

٢١-١١ (أ) أوجد معامل الارتباط الخطي بين المتغيرات X و Y بالمسألة ٢٩-١٤ .

(ب) أوجد معامل الارتباط غير الخطي بين هذه المتغيرات ، مفترضا علاقة القطع المكافئ التي حصلت عليها بالمسألة ٢٩-١٤ .

(ج) أشرح الفرق بين معاملات الارتباط التي حصلت عليها في (أ) ، (ب) .

(د) ماهي النسبة المثوية للاختلاف الكلي الذي سيظل غير مفسر تحت فرض علاقة القطع المكافئ بين X و Y ؟

الحل :

(١) باستخدام الحسابات التي حصلنا عليها بالجدول ١٦-١٤ المسألة ٢٩-١٤ وبإضافة حقيقة أن $\Sigma Y^2 = 290.52$

نجد

$$r = \frac{N \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}} = \frac{(8)(230.42) - (42.2)(46.4)}{\sqrt{[(8)(291.20) - (42.2)^2][(8)(290.52) - (46.4)^2]}} = -0.3743$$

(ب) من الجدول ١٦-١٤ بالمسألة ٢٩-١٤ ، $\bar{Y} = (\Sigma Y)/N = (46.4)/8 = 5.80$ ، 14.29 ،

إذن ، الاختلاف الكلي $\Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 21.40$

من الجدول ١٧-١٤ بالمسألة ٣٠-١٤ ، الاختلاف المفسر $\Sigma(Y_{est} - Y)^2 = 21.02$

$$r^2 = \frac{\text{الاختلاف المفسر}}{\text{الاختلاف الكلي}} = \frac{21.02}{21.40} = 0.9822 \quad \text{هذا}$$

$$r = 0.9911 \quad \text{أو} \quad 0.99$$

(ج) حقيقة أن الجزء (١) أظهر معامل ارتباط خطي يساوي -0.3743 — فقط يشير من الناحية العملية بعدم

وجود علاقة خطية بين X ، Y . على أية حال ، هناك علاقة غير خطية واضحة يمثلها القطع المكاني بالمسألة

٢٩-١٤ وما يدل على ذلك حقيقة أن معامل الارتباط في (ب) هو 0.99 .

$$\frac{\text{الاختلاف الغير مفسر}}{\text{الاختلاف الكلي}} = 1 - r^2 = 1 - 0.9822 = 0.0178 \quad (د)$$

أي أن 1.78% من الاختلاف الكلي ما زال غير مفسر . وهذا قد يرجع إلى التقلبات العشوائية أو إلى متغير إضافي لم يؤخذ في الاعتبار .

٢٧-١٤ أوجد (١) s_y (ب) $s_{y.x}$. لبيانات المسألة ٢٩-١٤

الحل :

(١) من المسألة ٣١-١٤ (١) $\Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 21.40$. إذن الانحراف المعياري لـ Y هو

$$s_y = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - \bar{Y})^2}{N}} = \sqrt{\frac{21.40}{8}} = 1.636 \text{ or } 1.64$$

الطريقة الأولى :

بإستخدام (١) والمسألة ٣١-١٤ (١) ، نحصل على الخطأ المعياري لتقدير Y على X وهو

$$s_{y.x} = s_y \sqrt{1 - r^2} = 1.636 \sqrt{1 - (0.9911)^2} = 0.218 \text{ or } 0.22$$

الطريقة الثانية :

بإستخدام المسألة ٣١-١٤

$$s_{y.x} = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - Y_{est})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\text{الاختلاف الغير مفسر}}{N}} = \sqrt{\frac{21.40 - 21.02}{8}} = 0.218 \text{ or } 0.22$$

الطريقة الثالثة :

باستخدام المسألة ١٤-٢٩ وبمعرفة أن $\Sigma Y^2 = 290.52$ نحصل على

$$s_{Y.X} = \sqrt{\frac{\Sigma Y^2 - a_0 \Sigma Y - a_1 \Sigma XY - a_2 \Sigma X^2 Y}{N}} = 0.218 \text{ or } 0.22.$$

نظرية المعاينة للارتباط :

١٤-٢٢ إذا كان معامل الارتباط المحسوب من عينة حجمها 18 هو 0.32 . هل يمكن أن نستنتج عند مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 أن معامل الارتباط المقابل للبحث يختلف عن الصفر ؟

الحل :

نريد الاختيار بين الفروض $H_0: \rho = 0$ ، $H_1: \rho > 0$.

$$t = \frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0.32\sqrt{18-2}}{\sqrt{1-(0.32)^2}} = 1.35$$

(أ) باستخدام اختبار من طرف واحد لتوزيع أستودينت عند مستوى 0.05 فوجب رفض H_0 إذا كانت $t > t_{0.95} = 1.75$ لدرجات حرية $(18-2) = 16$. بهذا لا نستطيع رفض H_0 عند المستوى 0.05 .

(ب) بما أنه لا يمكننا رفض H_0 عند المستوى 0.05 ، فإنه لا يمكن بالتأكيد رفضه عند المستوى 0.01 .

١٤-٢٤ ما هو الحد الأدنى لحجم العينة الضروري لاستنتاج أن معامل ارتباط قيمته 0.32 يختلف معنوياً عن الصفر عند المستوى 0.05 ؟

الحل :

عند مستوى 0.05 وباستخدام اختبار من طرف واحد لتوزيع أستودينت .

فإن الحد الأدنى لقيمة N يجب أن يختار بحيث تكون

$$N = 2 \text{ لدرجات حرية } \frac{0.32\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-(0.32)^2}} = t_{0.95}$$

لعدد لانهاى لدرجات الحرية $t_{0.95} = 1.64$ بهذا فإن $N = 25.6$.

لقيمة $N = 26$ فإن $v = 24, t_{0.95} = 1.71, t = 0.32\sqrt{24}/\sqrt{1-(0.32)^2} = 1.65$

لقيمة $N = 27$ فإن $v = 25, t_{0.95} = 1.71, t = 0.32\sqrt{25}/\sqrt{1-(0.32)^2} = 1.69$

لقيمة $N = 28$ فإن $v = 26, t_{0.95} = 1.71, t = 0.32\sqrt{26}/\sqrt{1-(0.32)^2} = 1.72$

بهذا فإن الحد الأدنى لحجم العينة هو $N = 28$

٣٥-١٤ قوة معامل ارتباط محسوب من عينة حجمها 24 هي $r = 0.75$ هل يمكن رفض الفرض بأن معامل ارتباط

المجتمع في مثل صفر القيم :

(أ) $p = 0.60$ (ب) $p = 0.50$ ، عند مستوى المعنوية 0.05 ؟

الحل :

$$Z = 1.1513 \log \left(\frac{1 + 0.75}{1 - 0.75} \right) = 0.9730, \quad \mu_z = 1.1513 \log \left(\frac{1 + 0.60}{1 - 0.60} \right) = 0.6932, \quad \sigma_z = \frac{1}{\sqrt{N-3}} = \frac{1}{\sqrt{21}} = 0.2182 \quad (1)$$

$$z = (Z - \mu_z) / \sigma_z = (0.9730 - 0.6932) / 0.2182 = 1.28 \quad \text{إذن}$$

عند مستوى المعنوية 0.05 وباستخدام اختبار من طرف واحد للتوزيع الطبيعي ، فإننا نرفض الفرض في حالة وحيدة إذا كانت Z أكبر من 1.64 . بهذا لا يمكن رفض الفرض أن معامل ارتباط المجتمع في مثل صفر 0.60

(ب) إذا كانت $p = 0.50$ فإن $\mu_z = (0.9730 - 0.5493) / 0.2182 = 1.94$ ، $\mu_z = 1.1513 \log 3 = 0.5493$

بهذا يمكن رفض الفرض بأن معامل ارتباط المجتمع في مثل صفر $p = 0.50$ عند مستوى المعنوية

0.05

٣٦-١٤ كان معامل الارتباط بين درجات الامتحان النهائي في الطبيعة والرياضة لمجموعة من 21 طالبا هو 0.80 .

أوجد 95% حدود ثقة لهذا المعامل .

الحل :

بما أن $r = 0.80$ و $N = 21$ فإن 95% حدود ثقة ل μ_z تعطى بما يلي :

$$Z \pm 1.96 \sigma_z = 1.1513 \log \left(\frac{1 + r}{1 - r} \right) \pm 1.96 \left(\frac{1}{\sqrt{N-3}} \right) = 1.0986 \pm 0.4620$$

إذن μ_z هنا 95% فترة ثقة من 0.5366 إلى 1.6606

إذا كانت $\mu_z = 1.1513 \log \left(\frac{1 + p}{1 - p} \right) = 0.5366$ فإن $p = 0.4904$.

إذا كانت $\mu_z = 1.1513 \log \left(\frac{1 + p}{1 - p} \right) = 1.6606$ فإن $p = 0.9155$.

بهذا فإن 95% حدود ثقة ل p هي من 0.49 إلى 0.92 .

٣٧-١٤ معاملان ارتباط حسب الأول من عينة حجمها $N_1 = 28$ فكان $r_1 = 0.50$ والثاني من عينة حجمها

$N_2 = 35$ فكان $r_2 = 0.30$ على الترتيب . هل هناك فرق معنوي بين معامل الارتباط عند المستوى 0.05 ؟

الحل :

$$Z_1 = 1.1513 \log \left(\frac{1 + r_1}{1 - r_1} \right) = 0.5493, \quad Z_2 = 1.1513 \log \left(\frac{1 + r_2}{1 - r_2} \right) = 0.3095$$

$$\sigma_{z_1 - z_2} = \sqrt{\frac{1}{N_1 - 3} + \frac{1}{N_2 - 3}} = 0.2669$$

ونريد التقرير بين فرضين $H_0: \mu_{z_1} = \mu_{z_2}$ و $H_1: \mu_{z_1} \neq \mu_{z_2}$

$$z = \frac{Z_1 - Z_2 - (\mu_{z_1} - \mu_{z_2})}{\sigma_{z_1 - z_2}} = \frac{0.5493 - 0.3095 - 0}{0.2669} = 0.8985 \quad H_0 \text{ تحت الفرض}$$

باستخدام اختبار من طرفين للتوزيع الطبيعي ، فيجب رفض H_0 فقط إذا كانت $z > 1.96$ أو $z < -1.96$. هذا لا يمكن رفض H_0 ونستنتج من ذلك أن الفرق غير معنوية عند المستوى 0.05 .

نظرية المعينة الانحدار :

٣٨-١٤ في المسألة ١-١٤ نجد أن معادلة انحدار Y على X هي $Y = 35.82 + 0.476 X$. اختبر صحة الفرض القائل أنه عند مستوى المعنوية 0.05 يكون معامل انحدار معادلة انحدار المجتمع في مثل انخفاض 0.180 .

الحل :

$$t = \frac{a_1 - A_1}{s_{y \cdot x} / s_x} \sqrt{N - 2} = \frac{0.476 - 0.180}{1.28 / 2.66} \sqrt{12 - 2} = 1.95$$

نظراً لأن $s_{y \cdot x} = 1.28$ (محصوبة من المسألة ١٤-٥) و $s_x = \sqrt{(\sum x^2) / N} = \sqrt{84.68 / 12} = 2.66$ (من المسألة ١٤-٢) .

باستخدام اختبار من طرف واحد لتوزيع أستاندينت عند مستوى 0.05 نجد أنه يجب رفض الفرض القائل أن معامل الانحدار في مثل انخفاض 0.180 إذا كانت $t > t_{0.05} = 1.81$ لدرجات حرية $(12 - 2) = 10$. وهذا لا يمكن رفض الفرض .

٣٩-١١ أوجد 95% حدود ثقة لمعامل الانحدار في المسألة السابقة .

الحل :

$$A_1 = a_1 - \frac{t}{\sqrt{N-2}} \frac{s_{y \cdot x}}{s_x} \quad (نحمل عليها بوضع$$

$$t = \pm t_{0.025} = \pm 2.23 \quad \text{لدرجات حرية } 10 = 12 - 2 \text{ في}$$

$$a_1 \pm \frac{2.23}{\sqrt{12-2}} \left(\frac{s_{y \cdot x}}{s_x} \right) = 0.476 \pm \frac{2.23}{\sqrt{10}} \left(\frac{1.28}{2.66} \right) = 0.476 \pm 0.340$$

أي أننا واثقين بنسبة 95% بأن A_1 تقع بين 0.136 و 0.816 .

معامل ارتباط

$$Z = 1.1513 \log$$

$$= 0.9730,$$

نرفض الفرض في

مثل صفر 0.60

$$\mu_z = 1.1513 \log$$

مستوى المعنوية

$$0.80$$

$$Z \pm 1$$

والثاني من عينة حجمها

عند المستوى 0.05 ؟

$$Z_1 = 1.15$$

٤٠-١٤ في المسألة ١-١٤ ، أوجد 95% حدود ثقة لأوزان الأبناء الذين تكون أوزان آبائهم .

(١) 65.0 kg (ب) 70.0 kg

الحل :

بما أن $t_{0.975} = 2.23$ لدرجات حرية 10 $= (12 - 2)$ ، فإن 95% حدود ثقة لـ Y_p (أنظر صفحة ٢٩٧) تعطى كالآتي :

$$Y_0 \pm \frac{2.23}{\sqrt{N-2}} s_{Y.X} \sqrt{N+1 + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{s_X^2}}$$

حيث $Y_0 = 35.82 + 0.476 X_0$ (المسألة ١-١٤) ، $s_{Y.X} = 1.28$ ، $s_X = 2.26$ (المسألة ٢٨-١٤) و $N = 12$

(١) إذا كانت $X_0 = 65.0$ ، $Y_0 = 66.76$ kg. وكذلك

فإن 95% حدود ثقة هي : $(X_0 - \bar{X})^2 = (65.0 - 800/12)^2 = 2.78$ ،

$$66.76 \pm \frac{2.23}{\sqrt{10}} (1.28) \sqrt{12 + 1 + \frac{2.78}{(2.26)^2}} = 66.76 \pm 3.31 \text{ kg}$$

بمعنى أننا واثقون بنسبة 95% أن أوزان الأبناء تقع بين 63.4 و 70.1 kg

(ب) إذا كانت $X_0 = 70.0$ فإن $Y_0 = 69.14$ kg. كذلك $(X_0 - \bar{X})^2 = (70.0 - 800/12)^2 = 11.11$ ،

إذن 95% حدود ثقة حسبت كالآتي 69.14 ± 3.45 kg أي أننا تكون واثقين بنسبة حوالى 95%

بأن أوزان الأبناء تقع بين 65.7 و 72.6 kg .

لاحظ أنه لقيم N الكبيرة ، فإن 95% حدود ثقة تعطى تقريبا بالمعادلة $Y_0 \pm 1.96 s_{Y.X}$ أو $Y_0 \pm 2 s_{Y.X}$ على شرط أن $(X_0 - \bar{X})$ ليست كبيرة . هذا يتفق مع النتيجة التقريبية المشار إليها في صفحة ٢٥١ .

طرق هذه المسألة تنطبق بصرف النظر عن حجم N أو $(X_0 - \bar{X})$ ، بمعنى أن طرق المعاينة مضبوطة .

٤١-١٤ في المسألة ١-١٤ ، أوجد 95% حدود ثقة لمتوسط أوزان الأبناء الذين تكون أوزان آبائهم

(١) 65.0 kg (ب) 70.0 kg

الحل :

بما أن $t_{0.975} = 2.23$ لدرجات حرية 10 ، فإن 95% حدود ثقة لـ \bar{Y}_p (أنظر صفحة ٢٩٧) تعطى كالآتي .

$$Y_0 \pm \frac{2.23}{\sqrt{10}} s_{Y.X} \sqrt{1 + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{s_X^2}}$$

حيث $Y_0 = 35.82 + 0.476 X_0$ (المسألة ١-١٤) ، $s_{Y.X} = 1.28$ ، $s_X = 2.26$ (المسألة ١٤-١٤) .

(١) إذا كانت $X_0 = 65.0$ ، نجد (قارن بالمسألة ١٤-١٤) أن 95% حدود ثقة هي

$kg (66.76 \pm 1.07)$ ، أى أننا نكون واثقين بحوالى 95% أن متوسط الأوزان لجميع الأبناء الذين تكون أوزان آبائهم $65.0 kg$ سوف تقع بين 65.7 و $67.8 kg$.

(ب) إذا كانت $X_0 = 70.0$ ، نجد (قارن بالمسألة ١٤ - ٤٠ (ب)) أن 95% حدود ثقة هى $kg (69.14 \pm 1.45)$ أى أننا نكون واثقين بحوالى 95% أن متوسط الأوزان لجميع الأبناء الذين تكون أوزان آبائهم $70.0 kg$ سوف تقع بين 67.7 و $70.6 kg$.

مسائل إضافية

الانحدار الخطى والارتباط :

٤٢-١٤ الجدول التالى يوضح أول درجتين ، يرمز لهما بالرمزين Y و X على الترتيب ، لعشرة من الطلبة فى امتحانين مفاجئين قصيرين فى مادة البيولوجى .

(أ) كون شكل الانتشار .

(ب) أوجد خط انحدار المربعات الصغرى لـ Y على X .

ج : $Y = 4.000 + 0.500 X$.

(ج) أوجد خط انحدار المربعات الصغرى لـ Y على X .

ج : $Y = 2.408 + 6120. X$.

(د) ارسم خط الانحدار فى (ب) ، (ج) على شكل الانتشار فى (أ) .

(X) درجات الامتحان المفاجئ الأول	6	5	8	8	7	6	10	4	9	7
(Y) درجات الامتحان المفاجئ الثانى	8	7	7	10	5	8	10	6	8	6

٤٢-١٤ أوجد (أ) $s_{Y \cdot X}$ (ب) $s_{X \cdot Y}$ ، البيانات بالمسألة السابقة .

ج : (أ) 1.304 (ب) 1.443

٤٤-١١ احسب (أ) الاختلاف الكلى فى Y ، (ب) الاختلاف الغير مفسر فى Y (ج) الاختلاف المفسر فى Y ،

بيانات المسألة ٤٢-١٤ .

ج : (أ) 24.50 ، (ب) 17.00 ، (ج) 7.50

٤٤-١١ استخدم نتائج المسألة ٤٤-١٤ لإيجاد معامل الارتباط بين مجموعتي درجات الامتحان فى المسألة ٤٢-١٤ .

ج : 0.5533

$$(X_0 - \bar{X})^2 = 170$$

ة حوالى 95%

$$Y_0 \pm 1.9$$

المشار إليها فى

مضبوطة .

نظر صفحة ٣٩٧

٥١١

د ثقة هى

٤٦-١٤ (١) أوجد معامل الارتباط بين درجات الامتحانين في المسألة ١٤-٤٢ باستخدام صيغة عزم حاصل الضرب وقارن بنتيجة المسألة ١٤-٤٥ .

(ب) أوجد معامل الارتباط مباشرة من معاملات الانحدار لخطوط الانحدار بالمسائل ١٤-٤٢ (ب) ، (ج) .

٤٧-١٤ أوجد تفاير البيانات لبيانات المسألة ١٤-٤٢ (١) مباشرة (ب) باستخدام الصيغة $s_{x,y} = r s_x s_y$ ونتيجة المسائل ١٤-٤٥ أو ١٤-٤٦ .

ج : 1.5 .

٤٨-١٤ الجدول التالي يوضح السن X وضغط الدم Y لاثنتي عشرة امرأة .

(١) أوجد معامل الارتباط بين X و Y .

(ب) أوجد معادلة انحدار Y على X باستخدام المربعات الصغرى .

(ج) قدر ضغط الدم لامرأة عمرها 45 سنة .

(X) السن	56	42	72	36	68	47	55	49	38	42	68	60
(Y) ضغط الدم	147	125	160	118	149	128	150	145	115	140	152	166

ج : (١) 0.8961 (ب) $Y = 80.78 + 1.138 X$ (ج) 132 .

٤٩-١٤ أوجد معاملات الارتباط لبيانات (١) المسألة ١٣-٢٢ بالفصل الثالث عشر (ب) المسألة ١٣-٢٥ بالفصل الثالث عشر .

ج : (١) 0.958 (ب) 0.872

٥٠-١٤ معامل الارتباط بين X و Y هو $r = 0.60$.

إذا كانت $\bar{Y} = 20$ و $\bar{X} = 10$ ، $s_Y = 2.00$ و $s_X = 1.50$.

أوجد معادلات خطوط انحدار (١) Y على X (ب) X على Y .

ج : (١) $Y = 0.8 X + 12$ (ب) $X = 0.45 Y + 1$

٥١-١٤ احسب (١) $s_{y,x}$ (ب) $s_{x,y}$ لبيانات المسألة ١٤-٥٠ .

ج : (١) 1.60 (ب) 1.20

٥٢-١٤ إذا كانت $s_{y,x} = 3$ و $s_Y = 5$ أوجد r .

ج : ± 0.80

٥٣-١٤ إذا كان معامل الارتباط بين X و Y هو 0.50 ، ماهي النسبة المئوية لاختلاف الكلي الذي يظل غير مفسر بمعادلة الانحدار ؟

ج : 75%

٥٤-١٤ أثبت أن معادلة خط انحدار Y على X يمكن أن تكتب على الصورة $Y - \bar{Y} = \frac{s_{YX}}{s_X^2}(X - \bar{X})$ اكتب المعادلة المناظرة لخط انحدار X على Y .

٥٥-١٤ (١) احسب معامل الارتباط بين قيم X و Y المتقابلة والموضحة بالجدول المرافق .

X	2	4	5	6	8	11
Y	18	12	10	8	7	5

(ب) أضرب كل قيمة من قيم X بالجدول في 2 وأضف لها 6

وأضرب كل قيمة من قيم Y بالجدول في 3 وأطرح 15 .

أوجد معامل الارتباط بين مجموعتي الأرقام الجديدة ، وضح السبب في أنك ستحصل - أو لن تحصل - على نفس النتيجة التي حصلت عليها في (١) .

ج : (١) - 0.9203

٥٦-١٤ (١) أوجد معادلات انحدار Y على X للبيان الموضح في الأجزاء (١) ، (ب) بالمسألة السابقة .

(ب) وضح العلاقة بين هذه المعادلات .

ج : (أ) $Y = 18.04 - 1.34 X$

$Y = 51.18 - 2.01 X$

٥٧-١٤ أثبت أن معامل الارتباط بين X و Y يمكن أن يكتب على الصورة .

$$r = \frac{\bar{XY} - \bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{[\bar{X}^2 - \bar{X}^2][\bar{Y}^2 - \bar{Y}^2]}}$$

٥٨-١٤ أثبت أن معامل الارتباط لا يعتمد على اختيار نقطة الأصل للمتغيرات أو الوحدات المستخدمة في التعبير عنها

(إرشاد : افترض $X' = c_1X + A$ ، $Y' = c_2Y + B$ حيث A و B و c_1 و c_2 ثوابت ، وأثبت أن

معامل الارتباط بين Y' و X' مثل لمعامل الارتباط بين Y و X) .

٥٩-١٤ أثبت أنه في الانحدار الخطي $\frac{s_{YX}^2}{s_Y^2} = \frac{s_{XY}^2}{s_X^2}$. هل النتيجة تنطبق في حالة الانحدار غير الخطي ؟

معامل الارتباط للبيانات المجمعة :

١٤-٦٠ أوجد معامل الارتباط بين المتغيرات Y و X والمطلة قيمها بالجدول التكرارى التالى .

	X				
	59 — 62	63 — 66	67 — 70	71 — 74	75 — 78
90 — 109	2	1			
110 — 129	7	8	4	2	
130 — 149	5	15	22	7	1
150 — 169	2	12	63	19	5
170 — 189		7	28	32	12
190 — 209		2	10	20	7
210 — 229			1	4	2

ج : 0.5402

١٤-٦١ (أ) أوجد معادلة خط انحدار Y على X باستخدام المربعات الصغرى لبيانات المسألة السابقة .

(ب) قدر Y عند $X = 72$ و $X = 64$

ج : (أ) $Y = 3.33 X - 66.4$ (ب) 173.4 و 146.7

١٤-٦٢ أوجد (أ) s_{yx} (ب) s_{xy} لبيانات المسألة ١٤-٦٠ .

ج : (أ) 20.36 (ب) 3.30

١٤-٦٣ أثبت الصيغة (٢١) ، صفحة ٣٩٤ ، لمعامل الارتباط للبيانات المجمعة .

ارتباط السلاسل الزمنية :

١٤-٦٤ أوجد معامل الارتباط بين الأرقام القياسية لأسعار المستهلك والأرقام القياسية لأسعار الجملة لجميع السلع بالولايات

المتحدة وذلك للسنوات 1958 — 1949 والموضحة بالجدول التالى . فترة الأساس $1949 = 100$ — 1947 .

(أنظر المسألة ١٣-٣٧ ، الفصل الثالث عشر)

السنة	1958	1957	1956	1955	1954	1953	1952	1951	1950	1949
الرقم القياسى لأسعار المستهلك	123.5	120.2	116.2	114.5	114.8	114.4	113.5	111.0	102.8	101.8
الرقم القياسى لأسعار الجملة	119.2	117.6	114.3	110.7	110.3	110.1	111.6	114.8	103.1	99.2

المصدر : مكتب احصاءات العمل

ج : 0.9254

٩٦-١٤ أوجد معامل الارتباط للبيانات بالمسألة ٩٦-١ ، الفصل الأول .

ج : 0.1608

ارتباط الرتب :

٩٦-١٤ حكمان في مسابقة ، طلب منهما ترتيب 8 متسابقين A, B, C, D, E, F, G, H حسب تفضيلهم ، قدموا الاختيارات الموضحة بالجدول . أوجد معامل ارتباط الرتب وقرر مدى جودة اتفاق الحكيم في اختيارهما .

	A	B	C	D	E	F	G	H	
الحكم الأول	5	2	8	1	4	6	3	7	
الحكم الثاني	4	5	7	3	2	8	1	6	

ج : $r_{rank} = \frac{2}{3}$

٩٧-١٤ أوجد معامل ارتباط الرتب للبيانات في (١) المسألة ١٤-٢٢ (ب) المسألة ١٤-٨ :

ج : (١) 0.5606 (ب) 0.9318

٩٨-١٤ (١) أوجد معامل ارتباط الرتب لبيانات المسألة ١٤-٥٥ .

(ب) من الملاحظات في (١) ، ناقش المساوي الممكنة لطريقة ارتباط الرتب .

ج : (١) 1.0000 —

٩٩-١٤ (١) أوجد معامل ارتباط الرتب لبيانات المسألة ١٤-٦٤ .

(ب) قارن بمعامل الارتباط الذي حصلت عليه في هذه المسألة .

ج : (١) 0.7333

نظرية المعاينة للارتباط :

١٠٠-١١ قيمة معامل ارتباط محسوب من عينة حجمها 27 هي 0.40 . هل يمكن أن نستنتج عند مستوى المعنوية

(١) 0.05 (ب) 0.01 أن معامل الارتباط المقابل للمجتمع يختلف عن الصفر ؟

ج : (١) نعم (ب) لا

١١-٧١ قيمة معامل ارتباط محسوب من عينة حجمها 35 هي 0.50 . هل يمكن رفض الفرض القائل أن معامل ارتباط

المجتمع . (١) في مثل صفر $p = 0.30$ (ب) في مثل كبر $p = 0.70$ ، مستخدما مستوى المعنوية 0.05 .

ج : (١) لا (ب) نعم

90 -
110 -
130 -
150 -
170 -
190 -
210 -

بالولايات

1947 —

1949	1950
101.8	102.8
99.2	103.1

٧٢-١٤ أوجد (أ) 95% (ب) 99% حدود ثقة لمعامل الارتباط الذي قيمته 0.60 والمحسوب من عينة حجمها 28.

ج : (أ) 0.7951, 0.2923, (ب) 0.8361, 0.1763,

٧٣-١٤ حل المسألة ٧٢-١٤ إذا كان حجم العينة هو 52.

ج : (أ) 0.7500, 0.3912, (ب) 0.7861, 0.3146,

٧٤-١٤ أوجد 95% حدود ثقة لمعامل الارتباط المحسوب في

(أ) بالمسألة ٤٨-١٤.

(ب) بالمسألة ٦٠-١٤.

ج (أ) 0.9653, 0.7096, (ب) 0.6158, 0.4547,

٧٥-١٤ معاملان ارتباط حسب الأول من عينة حجمها 23 فكان 0.80 والثاني من عينة حجمها 82 فكان 0.95 على

الترتيب. هل يمكن أن نستنتج عند المستوى (أ) 0.05 (ب) 0.01، بأن هناك اختلافا معنويا بين

المعاملين.

ج : (أ) نعم (ب) لا

نظرية المعاينة للانحدار :

٧٦-١٤ باستخدام عينة حجمها 27 وجد أن معادلة انحدار Y على X هي $Y = 25.0 + 2.00X$

فإذا كانت $r_{xy} = 1.50$ ، $s_x^2 = 3.00$ ، $\bar{X} = 7.80$ ، أوجد

(أ) 95% (ب) 99% حدود ثقة لمعامل الانحدار.

ج : (أ) 2.00 ± 0.21

(ب) 2.00 ± 0.28

٧٧-١٤ في المسألة ٧٦-١٤ اختبر صحة الفرض القائل أن معامل انحدار المجتمع

(أ) في مثل انخفاض 1.70 (ب) في مثل ارتفاع 2.20 ،

عند مستوى المعنوية 0.01.

ج : (أ) باستخدام اختبار من طرف واحد يمكن رفض الفرض.

(ب) باستخدام اختبار من طرف واحد لا يمكن رفض الفرض.

٧٨-١٤ في المسألة ٧٦-١٤ أوجد

(أ) 95% (ب) 99% حدود ثقة لـ Y عند $X = 6.000$

ج : (أ) 37.0 ± 3.28 (ب) 37.0 ± 4.45

٧٩-١٤ في المسألة ٧٦-١٤ أوجد

(١) 95% (ب) 99% حدود ثقة لمتوسط جميع قيم Y المقابلة لقيمة $X = 6.00$ ج : (١) 37.0 ± 0.69 (ب) 37.0 ± 0.94

٨٠-١٤ بالرجوع إلى المسألة ٤٨-١٤ ، أوجد 95% حدود ثقة للآتي :

(١) معامل انحدار Y على X (ب) ضغط الدم للنساء اللائي أعمارهن 45 سنة

(ج) متوسط ضغط الدم لجميع النساء اللائي أعمارهن 45 سنة .

(١) 1.138 ± 0.398 (ب) 132.0 ± 16.6 (ج) 132.0 ± 5.4

نقطة حجمها 28 .

فكان 0.95 على

اختلافًا معنويًا بين

Y

الفصل الخامس عشر

معامل الارتباط الجزئي والمتعدد

الارتباط المتعدد :

درجة العلاقة الموجودة بين ثلاث متغيرات أو أكثر تسمى بالارتباط المتعدد . المبادئ الأساسية في مشكلة الارتباط المتعدد ماثلة لتلك المبادئ في الارتباط البسيط والذي سبق معالجته بالفصل الرابع عشر .

رمز الدليل :

لإتاحة الفرصة للتصحيحات لعدد كبير من المتغيرات ، فن الأوفق استخدام رموز تتضمن الأدلة .

سوف نعتبر X_1, X_2, X_3, \dots هي المتغيرات تحت الدراسة . ومن ثم نعتبر $X_{11}, X_{12}, X_{13}, \dots$ القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير X_1 و $X_{21}, X_{22}, X_{23}, \dots$ تعبر عن القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير X_2 ، وهكذا ، مستخدماً هذه الرموز نجد أن المجموع مثل $X_{21} + X_{22} + X_{23} + \dots + X_{2N}$ ، على سبيل المثال ، يمكن أن يكتب على الصورة $\sum_{j=1}^N X_{2j}$ ، أو ببساطة $\sum X_2$. وعندما لا يكون هناك سبيل للخلط سوف نستخدم الرمز الأخير في هذه الحالة فإن متوسط X_2 يكتب $\bar{X}_2 = \frac{\sum X_2}{N}$.

معادلة الانحدار . مستوى الانحدار :

معادلة الانحدار هي معادلة لتقدير متغير تابع ، وليكن X_1 ، من المتغيرات المستقلة X_2, X_3, \dots وتسمى بمعادلة انحدار X_1 على X_2, X_3, \dots وباستخدام صيغة الدالة تكتب العلاقة بصورة مختصرة $X_1 = F(X_2, X_3, \dots)$ ونقرأ « دالة في X_2, X_3 ، وهكذا » .

في حالة ثلاث متغيرات ، أبسط معادلة انحدار X_1 على X_2 و X_3 لها الشكل

$$(1) \quad X_1 = b_{1.23} + b_{12.3}X_2 + b_{13.2}X_3$$

حيث $b_{1.23}, b_{12.3}, b_{13.2}$ ثوابت .

في المعادلة (١) ، إذا اعتبرنا X_3 ثابت ، فإن الرسم البياني X_1 مقابل X_2 يعبر عن خط مستقيم ميله $b_{12.3}$ وإذا احتفظنا بـ X_2 ثابت فإن الرسم البياني X_1 مقابل X_3 يعبر عن خط مستقيم ميله $b_{13.2}$. رمز الواضح أن الرقم التالي للنقطة في الدليل يوضح المتغيرات المدخلة ككوابت في كل حالة .

هذا
على التوا

ونتيجة لحقيقة أن X_1 تتغير جزئياً بسبب التغير في X_2 وجزئياً بسبب التغير في X_3 ، فإننا نسمى $b_{12.3}$ بمعامل الانحدار الجزئي لـ X_1 على X_2 مع اعتبار X_3 ثابت و $b_{13.2}$ بمعامل الانحدار الجزئي لـ X_1 على X_3 مع اعتبار X_2 ثابت .

المعادلة (١) تسمى بمعادلة الانحدار الخطي لـ X_1 على X_2 و X_3 . وتمثل في نظام للاحداثيات المتعامدة ذات الثلاثة أبعاد بمستوى يسمى مستوى الانحدار وهو يعد تعميماً لحالة الانحدار في متغيرين الذي درس في الفصل الثالث عشر .

المعادلات الاعتدالية لمستوى انحدار المربعات الصغرى :

كما أنه يوجد خطوط انحدار المربعات الصغرى التي تقرب مجموعة من N من نقط البيانات (X, Y) في شكل انتشار ذي بعدين ، فإنه يوجد أيضاً مستوى انحدار المربعات الصغرى والذي يوفق مجموعة من N من نقط البيانات (X_1, X_2, X_3) في شكل انتشار ذي ثلاثة أبعاد .

مستوى انحدار المربعات الصغرى لـ X_1 على X_2 و X_3 يعبر عنه بالمعادلة (١) حيث $b_{12.3}$ ، $b_{13.2}$ ، $b_{1.23}$ تحدد بحل المعادلات الاعتدالية الآتية :

$$(٢) \quad \left. \begin{aligned} \sum X_1 &= b_{1.23} N + b_{12.3} \sum X_2 + b_{13.2} \sum X_3 \\ \sum X_1 X_2 &= b_{1.23} \sum X_2 + b_{12.3} \sum X_2^2 + b_{13.2} \sum X_2 X_3 \\ \sum X_1 X_3 &= b_{1.23} \sum X_3 + b_{12.3} \sum X_2 X_3 + b_{13.2} \sum X_3^2 \end{aligned} \right\}$$

حيث نحصل عليها بصورة أساسية بضرب طرفي المعادلة (١) في X_2 ، X_3 ، 1 على التوالي ثم التجميع على الطرفين :

دالم يذكر خلاف ذلك ، فإنه عند الإشارة إلى معادلة الانحدار فإننا نفترض أننا نقي معادلة انحدار المربعات الصغرى .

إذا كانت $x_1 = X_1 - \bar{X}_1$ ، $x_2 = X_2 - \bar{X}_2$ ، $x_3 = X_3 - \bar{X}_3$ ، فإنه يمكن كتابة معادلة انحدار X_1 على X_2 ، X_3 بصورة أكثر بساطة كالآتي :

$$(٢) \quad x_1 = b_{12.3} x_2 + b_{13.2} x_3$$

حيث $b_{12.3}$ ، $b_{13.2}$ نحصل عليها بحل المعادلات الآتية آتياً

$$(١) \quad \left. \begin{aligned} \sum x_1 x_2 &= b_{12.3} \sum x_2^2 + b_{13.2} \sum x_2 x_3 \\ \sum x_1 x_3 &= b_{12.3} \sum x_2 x_3 + b_{13.2} \sum x_3^2 \end{aligned} \right\}$$

هذه المعادلات ، وهي مكافئة للمعادلات الاعتدالية (٢) نحصل عليها بصورة أساسية بضرب طرفي المعادلة (٢) في x_2 و x_3 على التوالي ثم التجميع على الطرفين . أنظر المسألة ١٥ - ٨

عشر

وروابط المتعدد

القيم X_{11}, X_{12}, \dots ، وهكذا ، يمكن أن يكتب دم الرمز الأخير

X وتسمى بمعادلة $X_1 = F(X_2)$

ستقيم ميله $b_{12.3}$ رمز الواضح أنه

مستويات الانحدار ومعاملات الانحدار :

إذا رمزنا لمعامل الارتباط بين X_1 ، X_2 بالرمز r_{12} وبين X_1 ، X_3 بالرمز r_{13} وبين X_2 ، X_3 بالرمز r_{23} حيث يتم حسابها كما في الفصل الرابع عشر (تسمى أحياناً بمعاملات الارتباط من الدرجة صفر) ، فإن معادلة الانحدار مستوى المربعات الصغرى هي

$$(٥) \quad \frac{x_1}{s_1} = \left(\frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \right) \frac{x_2}{s_2} + \left(\frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \right) \frac{x_3}{s_3}$$

حيث $x_1 = X_1 - \bar{X}_1$ ، $x_2 = X_2 - \bar{X}_2$ ، $x_3 = X_3 - \bar{X}_3$ و s_1 ، s_2 و s_3 هي الانحرافات المعيارية لكل من X_1 ، X_2 ، X_3 على الترتيب (انظر المصفاة ١٥ - ٩) .

لاحظ أنه إذا كان المتغير X_3 غير موجود و $X_1 = Y$ و $X_2 = X$ ، فإن المعادلة (٥) تختصر إلى المعادلة (٢٥) صفحة ٣٩٤ ، بالفصل الرابع عشر .

الخطا المعيارى للتقدير :

بتميم المعادلة (٨) صفحة ٣٩٠ ، بالفصل الرابع عشر ، يمكن أن نعرف الخطأ المعيارى للتقدير X_1 على X_2 و X_3 كالتالى :

$$(٦) \quad s_{1.23} = \sqrt{\frac{\Sigma(X_1 - X_{1.est.})^2}{N}}$$

حيث $X_{1.est.}$ ر عن قيم X_1 المقدرة كما هي محسوبة من معادلات الانحدار (١) أو (٥)

وبدلالة معاملات الارتباط r_{12} ، r_{13} ، r_{23} ، فإن الخطأ المعيارى للتقدير يمكن حسابه أيضاً من النتيجة

$$(٧) \quad s_{1.23} = s_1 \sqrt{\frac{1 - r_{12}^2 - r_{13}^2 - r_{23}^2 + 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

التفسير المستند إلى نظرية المعاينة للخطأ المعيارى للتقدير في حالة متغيرين كما هو مغطى بالصفحة ٣٩٠ في حالة ما إذا كانت N كبيرة يمكن تعميمه لحالة الأبعاد الثلاثة وذلك بإحلال المخطوط الموازية لخط الانحدار بمستويات موازية لمستوى الانحدار . وكتقدير أفضل للخطأ المعيارى للمجتمع للتقدير نستخدم

$$\hat{s}_{1.23} = \sqrt{N/(N-3)} s_{1.23}$$

معاميل الارتباط المتعدد :

يعرف معاميل الارتباط المتعدد كامتداد للمعادلات (١٢) أو (١٤) صفحة ٣٩٢ بالفصل الرابع عشر . فمثل سبيل المثال ، فإنه في حالة متغيرين مستقلين ، فإن معاميل الارتباط المتعدد يعرف كما يلي :

$$(٨) \quad R_{1.23} = \sqrt{1 - \frac{s_{1.23}^2}{s_1^2}}$$

حيث s_1 هو الانحراف المعياري للمتغير X_1 و $s_{1.23}$ يعرف بالمعادلة (٦) أو (٧) . المقدار $R_{1.23}^2$ يسمى معاميل التحديد المتعدد .

وعند استخدام معادلة الانحدار الخطي ، فإن معاميل الارتباط المتعدد يسمى معاميل الارتباط المتعدد الخطي . وما لم يذكر خلاف ذلك ، فإنه عند الإشارة إلى معاميل الارتباط المتعدد فإن هذا يتضمن الارتباط المتعدد الخطي .

بدلالة r_{12} و r_{13} و r_{23} يمكن كتابة المعادلة (٨) كالآتي :

$$(٩) \quad R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

معاميل الارتباط المتعدد ، مثل $R_{1.23}$ يقع بين صفر وواحد . وكلما اقترب من واحد كلما كان الارتباط الخطي بين المتغيرات أفضل . وكلما اقترب من الصفر كلما كان الارتباط الخطي أسوأ . فإذا كان معاميل الارتباط المتعدد يساوي الواحد ، فإن الارتباط يسمى تام ، وعلى الرغم من أن معاميل الارتباط صفر يشير إلى عدم وجود علاقة خطية بين المتغيرات ، فإنه من الممكن وجود علاقة غير خطية .

تبديل المتغير التابع :

النتائج السابقة صحيحة في حالة اعتبار X_1 هو المتغير التابع . وعلى أية حال ، فإذا أردنا اعتبار X_3 . على سبيل المثال ، كنزير تابع بدلا من X_1 ، فإنه يجب فقط إبدال الدليل ١ بدلا من ٣ و ٣ بدلا من ١ ، في الصيغة التي حصلنا عليها .

على سبيل المثال ، معادلة انحدار X_3 على X_1 و X_2 تصبح

$$(١٠) \quad \frac{x_3}{s_3} = \left(\frac{r_{23} - r_{13}r_{12}}{1 - r_{12}^2} \right) \frac{x_2}{s_2} + \left(\frac{r_{13} - r_{23}r_{12}}{1 - r_{12}^2} \right) \frac{x_1}{s_1}$$

كما حصلنا عليها من المعادلة (٥) ، باستخدام $r_{32} = r_{23}$ ، $r_{31} = r_{13}$ ، $r_{21} = r_{12}$

التعميم في حالة أكثر من ثلاث متغيرات :

هذه الحالة نحصل عليها بالمماثلة مع النتائج السابقة . على سبيل المثال ، فإن معادلة الانحدار الخطي لـ X_1 على X_2 ، X_3 ، X_4 يمكن كتابتها على الصورة

$$(١١) \quad X_1 = b_{1.234} + b_{12.34}X_2 + b_{13.24}X_3 + b_{14.23}X_4$$

X_2 بالرمز
معادلة انحدار

(٥)

بارية لكل من

ل المعادلة (٢٥)

على X_2 و X_3

(٦)

النتيجة

(٧) $s_1 s_2$

في حالة ما إذا كانت
ية لمستوى الانحدار .

ويمثل مستوى زائدى في مجال ذي أربعة أبعاد . بضرب طرق المعادلة (١١) في X_2, X_3, X_4 على التوالي ثم التجميع على الطرفين نحصل على المعادلات الاعتدالية اللازمة لتحديد قيمة $b_{1.234}, b_{12.34}, b_{13.24}$ and $b_{14.23}$. والتي بإحاطها في (١١) نحصل على معادلة الانحدار المربعات الصغرى لـ X_1 على X_2, X_3, X_4 . وهذه يمكن كتابتها في صورة مماثلة للمعادلة (٥) . (أنظر المسألة ١٤ - ٤١) .

الارتباط الجزئى :

غالباً ما يكون من المهم قياس الارتباط بين المتغير التابع ، ومتغير مستقل معين عندما نعتبر جميع المتغيرات الأخرى ثابتة ، أى عندما نزيل أثر جميع المتغيرات الأخرى (ويشار إليها بالمعبارة « العوامل الأخرى تظل متساوية ») . وهذه يمكن الحصول عليها بتعريف معامل الارتباط الجزئى كما في المعادلة (١٢) صفحة ٣٩٢ بالفصل الرابع عشر ، فيما عدا أننا يجب اعتبار الاختلافات المفسرة والاختلافات الغير مفسرة والتي تنشأ مع وجود المتغير المستقل وكذلك التي تنشأ في حالة عدم وجوده .

فإذا كان $r_{12.3}$ يمر عن معامل الارتباط الجزئى بين X_1 و X_2 مع تثبيت X_3 ، فإننا نجد

$$(12) \quad r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}}$$

وبصورة مماثلة إذا كانت $r_{12.34}$ هي معامل الارتباط الجزئى بين X_1 و X_2 مع تثبيت X_3 و X_4 ، فإن

$$(13) \quad r_{12.34} = \frac{r_{12.4} - r_{13.4}r_{23.4}}{\sqrt{(1 - r_{13.4}^2)(1 - r_{23.4}^2)}} = \frac{r_{12.3} - r_{14.3}r_{24.3}}{\sqrt{(1 - r_{14.3}^2)(1 - r_{24.3}^2)}}$$

وهذه النتائج مفيدة نظراً لدلالاتها فإن أى معامل ارتباط جزئى يمكن في النهاية جعله يعتمد على معاملات الارتباط r_{12}, r_{23} وهكذا (أى على معاملات الارتباط ذات الرتبة صفر) .

في حالة متغيرين X و Y ، فإنه إذا كان خطى الانحدار $Y = a_0 + a_1X$ و $X = b_0 + b_1Y$ ، فإن $r^2 = a_1b_1$ (أنظر المسألة ١٤ - ٢٢ ، الفصل الرابع عشر) . وهذه النتيجة يمكن تعميمها . فعمل سبيل المثال ، إذا كان

$$(14) \quad X_1 = b_{1.234} + b_{12.34}X_2 + b_{13.24}X_3 + b_{14.23}X_4$$

$$(15) \quad X_4 = b_{4.123} + b_{41.23}X_1 + b_{42.13}X_2 + b_{43.12}X_3$$

هي معادلات خطية في X_1 على X_2 و X_3 و X_4 على X_1 و X_2 و X_3 على X_4 ، إذن

$$(16) \quad r_{14.23}^2 = b_{14.23}b_{41.23}$$

(أنظر المسألة ١٥ - ١٨) وهذه يمكن اعتبارها نقطة بداية في تعريف معامل الارتباط الجزئى الخطى .

العلاقة بين معاملات الارتباط المتعددة والجزئية :

يمكن الحصول على نتائج ذات أهمية تربط بين معاملات الارتباط المتعددة ومعاملات الارتباط الجزئية المختلفة .
على سبيل المثال ، نجد

$$(١٧) \quad 1 - R_{1,23}^2 = (1 - r_{12}^2)(1 - r_{13,2}^2)$$

$$(١٨) \quad 1 - R_{1,234}^2 = (1 - r_{12}^2)(1 - r_{13,2}^2)(1 - r_{14,23}^2)$$

ومن السهل تعميم هذه النتائج :

معامل الارتباط المتعدد غير الخطي :

النتائج السابقة للانحدار المتعدد الخطي يمكن امتدادها لتشمل الانحدار المتعدد غير الخطي . معاملات الارتباط المتعددة والجزئية
يكن كذلك تعريفها بطرق مماثلة كالتي شرحت أعلاه .

مسائل محلولة

معادلات انحدار تتضمن أكثر من ثلاث متغيرات :

١ - ١١ باستخدام رموز الدليل الملائمة ، اكتب معادلات الانحدار

$$(أ) \quad X_2 \text{ على } X_1 \text{ و } X_3 \quad (ب) \quad X_3 \text{ على } X_1 \text{ و } X_2 \text{ و } X_4$$

$$(ج) \quad X_4 \text{ على } X_1 \text{ و } X_2 \text{ و } X_3 \text{ و } X_4$$

الحل :

$$(أ) \quad X_2 = b_{2,13} + b_{21,3}X_1 + b_{23,1}X_3$$

$$(ب) \quad X_3 = b_{3,124} + b_{31,24}X_1 + b_{32,14}X_2 + b_{34,12}X_4$$

$$(ج) \quad X_4 = b_{4,1234} + b_{41,234}X_1 + b_{42,134}X_2 + b_{43,124}X_3 + b_{44,123}X_4$$

١١ - ٧ اكتب المعادلات الاعتدالية المقابلة لمعادلات الانحدار

$$(أ) \quad X_3 = b_{3,12} + b_{31,2}X_1 - b_{32,1}X_2$$

$$(ب) \quad X_1 = b_{1,234} + b_{12,34}X_2 + b_{13,24}X_3 + b_{14,23}X_4$$

التوالي ثم
بجملتها
للمعادلة

رى ثابتة ،
كن الحصول
يجب اعتبار
وده .

(١٢)

فإن

(١٣)

باط r_{12}, r_{23}

، $X = b_0$
على سبيل المثال .

(١٤)

(١٥)

، إذن

(١٦)

الحل :

(أ) بضرب المعادلة على الترتيب في ١ ، X_1 ، X_2 والتجميع على الطرفين . نجد أن المعادلات الاعتدالية هي

$$\left. \begin{aligned} \sum X_3 &= b_{3.12} N + b_{31.2} \sum X_1 + b_{32.1} \sum X_2 \\ \sum X_1 X_3 &= b_{3.12} \sum X_1 + b_{31.2} \sum X_1^2 + b_{32.1} \sum X_1 X_2 \\ \sum X_2 X_3 &= b_{3.12} \sum X_2 + b_{31.2} \sum X_1 X_2 + b_{32.1} \sum X_2^2 \end{aligned} \right\}$$

(ب) بضرب المعادلة على الترتيب في ١ ، X_2 ، X_3 ، X_4 ، والتجميع على الطرفين نجد أن المعادلات الاعتدالية هي

$$\left. \begin{aligned} \sum X_1 &= b_{1.234} N + b_{12.34} \sum X_2 + b_{13.24} \sum X_3 + b_{14.23} \sum X_4 \\ \sum X_1 X_2 &= b_{1.234} \sum X_2 + b_{12.34} \sum X_2^2 + b_{13.24} \sum X_2 X_3 + b_{14.23} \sum X_2 X_4 \\ \sum X_1 X_3 &= b_{1.234} \sum X_3 + b_{12.34} \sum X_2 X_3 + b_{13.24} \sum X_3^2 + b_{14.23} \sum X_3 X_4 \\ \sum X_1 X_4 &= b_{1.234} \sum X_4 + b_{12.34} \sum X_2 X_4 + b_{13.24} \sum X_3 X_4 + b_{14.23} \sum X_4^2 \end{aligned} \right\}$$

لاحظ أن هذه ليست طريقة لاستنتاج المعادلات الاعتدالية ولكنها فقط طريقة أساسية لتذكرها . . . استنتاج هذه المعادلات نحصل عليه ببساطة باستخدام التفاضل كما في الملحق VIII ، صفحة ٥٤٠ .

عدد المعادلات الاعتدالية يساوي عدد الثوابت المجهولة .

١٥ - ٣ يعتقد أن المتغير X_1 دالة خطية في X_2 و X_3 . عينة من ١٢ من أزواج القراءات (X_2 و X_3) نتج منها قيم X_1 الموضحة بالجدول ١٥ - ١

(أ) أوجد معادلة الانحدار المربعات الصغرى لـ X_1 على X_2 و X_3 .

(ب) أوجد قيمة X_1 المقدرة من قيم X_2 و X_3 المعطاة

(ج) قدر X_3 عند $X_2 = 54$ و $X_3 = 9$.

جدول ١٥ - ١

X_1	64	71	53	67	55	58	77	57	56	51	76	68
X_2	57	59	49	62	51	50	55	48	52	42	61	57
X_3	8	10	6	11	8	7	10	9	10	6	12	9

الحل :

(أ) معادلة الانحدار الخطي لـ X_1 على X_2 و X_3 يمكن كتابتها كالآتي :

$$X_1 = b_{1.23} + b_{12.3} X_2 + b_{13.2} X_3$$

فإن المعادلات الاعتدالية لانحدار المربعات الصغرى هي

$$(١) \quad \left. \begin{aligned} \sum X_1 &= b_{1.23} N + b_{12.3} \sum X_2 + b_{13.2} \sum X_3 \\ \sum X_1 X_2 &= b_{1.23} \sum X_2 + b_{12.3} \sum X_2^2 + b_{12.3} \sum X_2 X_3 \\ \sum X_1 X_3 &= b_{1.23} \sum X_3 + b_{13.2} \sum X_2 X_3 + b_{13.2} \sum X_3^2 \end{aligned} \right\}$$

ت الاعتدالية هي

العمل المتضمن في حساب المجاميع يمكن ترتيبه كما في الجدول ١٥ - ٢ . على الرغم من أننا لسنا الآن في حاجة إلى العمود المكون X_1^2 ، إلا أننا أضفناه لاستخدامه فيما بعد .

ن نجد أن المعادلات

جدول ١٥ - ٢

X_1	X_2	X_3	X_1^2	X_2^2	X_3^2	$X_1 X_2$	$X_1 X_3$	$X_2 X_3$
64	57	8	4096	3249	64	3648	512	456
71	59	10	5041	3481	100	4189	710	590
53	49	6	2809	2401	36	2597	318	294
67	62	11	4489	3844	121	4154	737	682
55	51	8	3025	2601	64	2805	440	408
58	50	7	3364	2500	49	2900	406	350
77	55	10	5929	3025	100	4235	770	550
57	48	9	3249	2304	81	2736	513	432
56	52	10	3136	2704	100	2912	560	520
51	42	6	2601	1764	36	2142	306	252
76	61	12	5776	3721	144	4636	912	732
68	57	9	4624	3249	81	3876	612	513
$\sum X_1 = 753$	$\sum X_2 = 643$	$\sum X_3 = 106$	$\sum X_1^2 = 48139$	$\sum X_2^2 = 34843$	$\sum X_3^2 = 976$	$\sum X_1 X_2 = 40830$	$\sum X_1 X_3 = 6796$	$\sum X_2 X_3 = 5779$

كرها . . . استنتاج

X_2 و X_3 نتج منها

باستخدام الجدول ١٥ - ٢ ، فإن المعادلات الاعتدالية (١) تصبح

$$(٢) \quad \left. \begin{aligned} 12b_{1.23} - 643b_{12.3} + 106b_{13.2} &= 753 \\ 643b_{1.23} - 34843b_{12.3} + 5779b_{13.2} &= 40830 \\ 106b_{1.23} - 5779b_{12.3} + 976b_{13.2} &= 6796 \end{aligned} \right\}$$

بالحل نجد $b_{1.23} = 3.6512$ ، $b_{12.3} = 0.8546$ ، $b_{13.2} = 1.5063$. معادلة الانحدار المطلوبة هي

$$(٣) \quad X_1 = 3.65 + 0.855X_2 + 1.506X_3 \quad \text{أو} \quad X_1 = 3.6512 + 0.8546X_2 + 1.5063X_3$$

طريقة أخرى تتلاقى فيها حل المعادلات آنياً ، (أنظر المسألة ١٥ - ٦)

(ب) باستخدام معادلة الانحدار (٣) نحصل على قيم X_2 المقدرة ، ويرمز لها بالرمز $X_{2 est}$ ، وذلك بالتعويض عن قيم X_1 و X_3 المقابلة . على سبيل المثال ، بالتعويض عن $X_1 = 57$ و $X_3 = 8$ في (٣) نجد أن $X_{2 est} = 64.414$.

وبطريقة مماثلة نحصل على القيم الأخرى المقدرة لـ X_1 وهي موضحة بالجدول ١٥ - ٣ مع قيم العينة لـ X_1

جدول ١٥ - ٣

X_{est}	64.414	69.136	54.564	73.206	59.286	56.925	65.717	58.229	63.153	48.582	73.857	65.920
X_1	64	71	53	67	55	58	77	57	56	51	76	68

(ج) بوضع $X_2 = 54$ و $X_3 = 9$ في المعادلة (٣) ، فإن التقدير هو $X_{est} = 63.356$ أو حوال 63.

١٥ - ٤ احسب الانحرافات المعيارية (أ) s_1 (ب) s_2 (ج) s_3 لبيانات المسألة ١٥ - ٣ .

الحل :

(أ) المقدار s_1 هو الانحراف المعياري للمتغير X_1 . إذن باستخدام الجدول ١٥ - ٣ بالمسألة ١٥ - ٣ (أ) نجد ، باستخدام طرق الفصل الرابع

$$s_1 = \sqrt{\frac{\sum X_1^2}{N} - \left(\frac{\sum X_1}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{48139}{12} - \left(\frac{753}{12}\right)^2} = 8.6035 \text{ or } 8.6$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{\sum X_2^2}{N} - \left(\frac{\sum X_2}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{34843}{12} - \left(\frac{643}{12}\right)^2} = 5.6930 \text{ or } 5.7 \quad (\text{ب})$$

$$s_3 = \sqrt{\frac{\sum X_3^2}{N} - \left(\frac{\sum X_3}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{976}{12} - \left(\frac{106}{12}\right)^2} = 1.8181 \text{ or } 1.8 \quad (\text{ج})$$

١٥ - ٥ احسب (أ) r_{12} (ب) r_{13} (ج) r_{23} لبيانات المسألة ١٥ - ٣ .

الحل :

(أ) المقدار r_{12} هو معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين X_1 و X_2 ، بإهمال المتغير X_3

إذن وباستخدام طرق الفصل الرابع عشر ، نحصل على

$$r_{12} = \frac{N \sum X_1 X_2 - (\sum X_1)(\sum X_2)}{\sqrt{[N \sum X_1^2 - (\sum X_1)^2][N \sum X_2^2 - (\sum X_2)^2]}}$$

$$= \frac{(12)(40830) - (753)(643)}{\sqrt{[(12)(48139) - (753)^2][(12)(34843) - (643)^2]}} = 0.8196 \text{ or } 0.82$$

(ب) ، (ج) باستخدام الصيغ المقابلة ، نحصل على $r_{13} = 0.7698 \text{ or } 0.77$ ، و $r_{23} = 0.7984 \text{ or } 0.80$

٦-١١ حل المسألة ١٥ - ٣ (أ) باستخدام المعادلة (٥) في صفحة ٤٣٢ ونتائج المسائل ١٥ - ٤ و ١٥ - ٥ .

الحل :

معادلة الانحدار X_1 على X_2 و X_3 هي ، بضرب طرفي المعادلة (٥) ، صفحة ٤٣٢ ، في S_1 ،

$$(١) \quad x_1 = \left(\frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \right) \left(\frac{s_1}{s_2} \right) x_2 + \left(\frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \right) \left(\frac{s_1}{s_3} \right) x_3$$

حيث $x_1 = X_1 - \bar{X}_1$ ، $x_2 = X_2 - \bar{X}_2$ ، $x_3 = X_3 - \bar{X}_3$. باستخدام نتائج المسائل ١٥ - ٤ ، ١٥ - ٥ ، نصيغ المعادلة (١) كالآتي :

$$x_1 = 0.8546x_2 + 1.5063x_3$$

ونظراً لأن $\bar{X}_1 = \frac{\sum X_1}{N} = \frac{753}{12} = 62.750$ ، $\bar{X}_2 = \frac{\sum X_2}{N} = 53.583$ ، $\bar{X}_3 = 8.833$ من الجدول ١٥ - ٢ بالمسألة ١٥ - ٣ ، المعادلة المطلوبة يمكن كتابتها كالآتي :

$$X_1 - 62.750 = 0.8546(X_2 - 53.583) + 1.506(X_3 - 8.833)$$

وهذه تتفق مع نتائج المسألة ١٥ - ٣ (أ) .

٧-١١ لبيانات المسألة ١٥ - ٣ حدد (أ) متوسط الزيادة في X_1 المقابلة لوحدة زيادة في X_2 باعتبار X_3 ثابت (ب) متوسط الزيادة في X_1 المقابلة لوحدة زيادة في X_3 باعتبار X_2 ثابت .

الحل :

من معادلة الانحدار التي حصلنا عليها في ١٥ - ٣ (أ) 'و ١٥ - ٦ نجد أن إجابة (أ) هي 0.8546 أو حوالى 0.9 وإجابة (ب) هي 1.5063 أو حوالى 1.5 .

٨-١١ وضع أن المعادلات (٣) و (٤) ، صفحة ٤٣١ ، مرتبة على (١) ، (٢) صفحات ٤٣٠ ، ٤٣١ .

الحل :

من المعادلة الأولى في المعادلات (٢) ، صفحة ٤٣١ ، نجد بقسمة الطرفين على N أن

$$(١) \quad \bar{X}_1 = b_{1.23} + b_{12.3}\bar{X}_2 + b_{13.2}\bar{X}_3$$

ب طرح المعادلة من المعادلة (١) ، صفحة ٤٣٠ ، يعطى

$$(٢) \quad X_1 - \bar{X}_1 = b_{12.3}(X_2 - \bar{X}_2) + b_{13.2}(X_3 - \bar{X}_3)$$

$X_{1,2,3}$	64.414
X_1	64

أو حوالى 63 .

بالمسألة ١٥ - ٣

$$x_1 = b_{12.3}x_2 + b_{13.2}x_3$$

أو

وهي المعادلة (٣) ، صفحة ٤٣١ .

اعتبر أن $X_1 = x_1 + \bar{X}_1$ ، $X_2 = x_2 + \bar{X}_2$ ، $X_3 = x_3 + \bar{X}_3$ في المعادلات الثانية والثالثة من مجموعة المعادلات

(٢) ، صفحة ٤٣١ . إذن بعد عمليات تبسيط جبرية ، وباستخدام النتائج $\sum x_1 = \sum x_2 = \sum x_3 = 0$ تصبح هذه المعادلات

$$(٢) \quad \sum x_1 x_2 = b_{12.3} \sum x_2^2 + b_{13.2} \sum x_2 x_3 + N \bar{X}_2 [b_{1.23} + b_{12.3} \bar{X}_2 + b_{13.2} \bar{X}_3 - \bar{X}_1]$$

$$(٤) \quad \sum x_1 x_3 = b_{13.2} \sum x_3 x_2 + b_{12.3} \sum x_3^2 + N \bar{X}_3 [b_{1.23} + b_{12.3} \bar{X}_2 + b_{13.2} \bar{X}_3 - \bar{X}_1]$$

والتي تختصر إلى المعادلات (٤) ، صفحة ٤٣١ ، نظراً لأن الكليات داخل الأقواس في الجانب الأيمن

في (٣) و (٤) تصبح صفر من المعادلة (١) .

طريقة أخرى : أنظر المسألة ١٥ - ٣٠ .

$$\frac{x_1}{s_1} = \left(\frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \right) \frac{x_2}{s_2} + \left(\frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \right) \frac{x_3}{s_3} \quad : \text{ صفحة ٤٣٢ ، المعادلة (٥) ، استنتج}$$

من المعادلات (٣) و (٤) بالمسألة ١٥ - ٨

$$(١) \quad \begin{cases} b_{12.3} \sum x_2^2 + b_{13.2} \sum x_2 x_3 = \sum x_1 x_2 \\ b_{13.2} \sum x_2 x_3 + b_{12.3} \sum x_3^2 = \sum x_1 x_3 \end{cases}$$

$$\sum x_2^2 = N s_2^2 \text{ and } \sum x_3^2 = N s_3^2 \quad \text{فإن} \quad s_2^2 = \frac{\sum x_2^2}{N} \text{ and } s_3^2 = \frac{\sum x_3^2}{N} \quad \text{بما أن}$$

$$\sum x_2 x_3 = N s_2 s_3 r_{23} \quad \text{فإن} \quad r_{23} = \frac{\sum x_2 x_3}{\sqrt{(\sum x_2^2)(\sum x_3^2)}} = \frac{\sum x_2 x_3}{N s_2 s_3} \quad \text{وبما أن}$$

$$\sum x_1 x_2 = N s_1 s_2 r_{12} \text{ and } \sum x_1 x_3 = N s_1 s_3 r_{13} \quad \text{وبالمثل}$$

بالتعويض بهذه القيم في (١) والتبسيط ، نجد

$$(٢) \quad \begin{cases} b_{12.3} s_2 + b_{13.2} s_3 r_{23} = s_1 r_{12} \\ b_{13.2} s_3 + b_{12.3} s_2 r_{23} = s_1 r_{13} \end{cases}$$

$$\therefore b_{12.3} = \left(\frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \right) \left(\frac{s_1}{s_2} \right) \text{ and } b_{13.2} = \left(\frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \right) \left(\frac{s_1}{s_3} \right) \quad \text{بحل المعادلات (٢) أنياً ،}$$

بالتعويض عن هذه القيم في المعادلة $x_1 = b_{12.3}x_2 + b_{13.2}x_3$ (المعادلة (٢) ، المسألة ١٥ - ٨) وبالقسمة على s_1 نحصل على النتيجة المطلوبة .

الخطأ المعياري للتقدير :

١٠-١١ احسب الخطأ المعياري لتقدير X_1 على X_2 و X_3 لبيانات المسألة ١٠-٣ .

الحل :

من الجدول ١٠-٣ بالمسألة ١٠-٣ (ب) ، نحصل على

$$s_{1,23} = \sqrt{\frac{\sum (X_1 - X_{1.est.})^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{(64 - 64.418)^2 + (71 - 69.136)^2 + \dots + (68 - 65.920)^2}{12}} = 4.6447 \text{ or } 4.6$$

وتقدر الخطأ المعياري للتقدير المجتمع بـ $s_{1,23} = \sqrt{N/(N-3)} s_{1,23} = 5.3$ في هذه الحالة

١١-١١ استخدم $s_{1,23} = s_1 \sqrt{\frac{1 - r_{12}^2 - r_{13}^2 - r_{23}^2 + 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$ للحصول على نتائج المسألة ١٠-١١

الحل :

من المسائل ١٠-٤ (أ) و ١٠-٥ ، نحصل على

$$s_{1,23} = 8.6035 \sqrt{\frac{1 - (0.8196)^2 - (0.7698)^2 - (0.7984)^2 + 2(0.8196)(0.7698)(0.7984)}{1 - (0.7984)^2}} = 4.6$$

لاحظ أنه بالطريقة التي استخدمت في هذه المسألة فإننا نحصل على الخطأ المعياري للتقدير بدون استخدام معادلة الانحدار .

معاميل الارتباط المتعدد :

١٢-١١ احسب معاميل الارتباط المتعدد الخطي X_1 على X_2 و X_3 من بيانات المسألة ١٠-٣ .

الحل :

الطريقة الأولى : من نتائج المسائل ١٠-٤ (أ) و ١٠-٥ ، نحصل على

$$R_{1,23} = \sqrt{1 - \frac{s_{1,23}^2}{s_1^2}} = \sqrt{1 - \frac{(4.6447)^2}{(8.6035)^2}} = 0.8418$$

مجموعة المعادلات

$$\sum x_1 = \Sigma$$

$$(2) \sum x_1 x_2$$

$$(4) \sum x_1 x_3$$

في الجانب الأيمن

$$\frac{x_1}{s_1} =$$

(١)

$$b_{12,3}$$

١٠-٨ (أ) وبالقسم

الطريقة الثانية : من نتائج المسألة ١٥ - ٥

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}} = \sqrt{\frac{(0.8196)^2 + (0.7698)^2 - 2(0.8196)(0.7698)(0.7984)}{1 - (0.7984)^2}} = 0.8418$$

لاحظ أن معامل الارتباط المتعدد $R_{1.23}$ أكبر من كل من المعاملات r_{12} أو r_{13} (أنظر المسألة ١٥ - ٥). وهذا صحيح وفي نفس الوقت متوقع ، نظراً لأنه بالأخذ في الاعتبار إضافة متغيرات مستقلة أكثر لها صلة فيجب أن نصل إلى علاقة أفضل بين المتغيرات .

١٥ - ١٣ احسب معامل التحديد المتعدد لـ X_1 على X_2 و X_3 لبيانات المسألة ١٥ - ٣ .

الحل :

معامل التحديد المتعدد لـ X_1 على X_2 و X_3 هو

$$R_{1.23}^2 = (0.8418)^2 = 0.7086$$

باستخدام المسألة ١٥ - ١٢ . إذن هناك حوالي 71 % من الاختلاف الكلي في X_1 المفسر باستخدام معادلة الانحدار

١٥ - ١٤ احسب (أ) $R_{2.13}$ (ب) $R_{3.12}$ لبيانات المسألة ١٥ - ٣ وقارن بقيمة $R_{1.23}$.

الحل .

$$R_{1.12} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}} = \sqrt{\frac{(0.8196)^2 + (0.7984)^2 - 2(0.8196)(0.7698)(0.7984)}{1 - (0.7698)^2}} = 0.8606 \quad (أ)$$

$$R_{2.13} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{13}^2}} = \sqrt{\frac{(0.7698)^2 + (0.7984)^2 - 2(0.8196)(0.7698)(0.7984)}{1 - (0.8196)^2}} = 0.8234 \quad (ب)$$

هذه المسألة توضح حقيقة أنه ، بشكل عام ، $R_{1.23}$ ، $R_{3.12}$ ، $R_{2.13}$ غير متساويين ، كما هو مشاهد بالمقارنة بالمسألة ١٥ - ١٢ .

١٥ - ١٥ إذا كانت $R_{1.23} = 1$ فاثبت أن (أ) $R_{2.13} = 1$ (ب) $R_{3.12} = 1$.

الحل :

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}} \quad (١)$$

$$R_{2.13} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{13}^2}} \quad (٢)$$

(أ) في (١) بوضع $R_{1.23} = 1$ وتربيع الطرفين ، نجد $r_{12}^2 - r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23} = 1 - r_{23}^2$ إذن

$$r_{12}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23} = 1 - r_{13}^2 \quad \text{أو} \quad \frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{13}^2} = 1$$

أي $R_{2.13}^2 = 1$ أو $R_{2.13} = 1$ ، نظراً لأن معاميل الارتباط المتعدد يعتبر غير سالب .

(ب) $R_{3.12} = 1$ نستنتج من الجزء (أ) بإبدال الأدلة ٢ ، ٣ في النتيجة $R_{2.13} = 1$

١٥ - ١٦ إذا كانت $R_{1.23} = 0$ ، هل يترتب على ذلك بالضرورة أن تكون $R_{2.13} = 0$ ؟

الحل :

من المعادلة (١) بالمسألة ١٥ - ١٥ ، $R_{1.23} = 0$ في حالة وحيدة فقط ، وهي إذا كانت

$$r_{12}^2 - r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23} = 0 \quad \text{or} \quad 2r_{12}r_{13}r_{23} = r_{12}^2 - r_{13}^2$$

من المعادلة (٢) بالمسألة ١٥ - ١٥ ،

$$R_{2.13} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 - (r_{12}^2 + r_{13}^2)}{1 - r_{13}^2}} = \sqrt{\frac{r_{23}^2 - r_{13}^2}{1 - r_{13}^2}}$$

وهي لاتساوى بالضرورة صفر .

الارتباط الجزئي :

١٥ - ١٧ احسب معاملات الارتباط الجزئي الخلى (أ) $r_{12.3}$ (ب) $r_{13.2}$ (ج) $r_{23.1}$. بيانات المسألة ١٥ - ٣ .

الحل :

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}} , \quad r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{23}^2)}} , \quad r_{23.1} = \frac{r_{23} - r_{12}r_{13}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{13}^2)}}$$

بإستخدام نتائج المسألة ١٥ - ٥ ، نجد $r_{12.3} = 0.5334$ ، $r_{13.2} = 0.3346$ ، $r_{23.1} = 0.4580$

رسمها نجد أنه إذا اعتبرنا X_3 ثابتاً فإن معامل الارتباط بين X_2 و X_1 هو 0.53 . ولقيمة ثابتة X_2 فإن معامل الارتباط بين X_3 و X_1 هو 0.33 . وبما أن هذه النتائج تعتمد على عينة صغيرة حجمها 12 مجموعة من القيم ، فإن الاعتماد عليها ليس في نفس درجة مأمونية الاعتماد على النتائج التي تحصل عليها من عينة ذات حجم أكبر .

١٥ - ١٨ إذا كانت $X_3 = b_{3.12} + b_{32.1}X_2 + b_{31.2}X_1$ و $X_1 = b_{1.23} + b_{12.3}X_2 + b_{13.2}X_3$ هي معادلات انحدار X_1 على X_2 و X_3 ، X_3 على X_2 و X_1 ، على الترتيب ، أثبت $r_{13.2}^2 = b_{13.2}b_{31.2}$

الحل :

معادلة انحدار X_1 على X_2 و X_3 يمكن كتابتها كالتالي (أنظر المعادلة (٥) صفحة ٤٣٢)

$$(١) \quad X_1 - \bar{X}_1 = \left(\frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \right) \left(\frac{s_1}{s_2} \right) (X_2 - \bar{X}_2) + \left(\frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \right) \left(\frac{s_1}{s_3} \right) (X_3 - \bar{X}_3)$$

معادلة انحدار X_3 على X_2 و X_1 يمكن كتابتها كالتالي (أنظر المعادلة (١٠) صفحة ٤٣٢)

$$(٢) \quad X_3 - \bar{X}_3 = \left(\frac{r_{23} - r_{13}r_{12}}{1 - r_{12}^2} \right) \left(\frac{s_3}{s_2} \right) (X_2 - \bar{X}_2) + \left(\frac{r_{13} - r_{23}r_{12}}{1 - r_{12}^2} \right) \left(\frac{s_3}{s_1} \right) (X_1 - \bar{X}_1)$$

من (١) ، (٢) ، نجد أن معامل X_3 هو

$$b_{31.2} = \left(\frac{r_{13} - r_{23}r_{12}}{1 - r_{12}^2} \right) \left(\frac{s_3}{s_1} \right) \text{ و معامل } X_1 \text{ هو } b_{13.2} = \left(\frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \right) \left(\frac{s_1}{s_3} \right)$$

$$b_{13.2}b_{31.2} = \frac{(r_{13} - r_{12}r_{23})^2}{(1 - r_{23}^2)(1 - r_{12}^2)} = r_{13.2}^2 \quad \text{إذن}$$

$$r_{13.2} = r_{13} \sqrt{\frac{1 - r_{23}^2}{1 - r_{12}^2}} \quad (١) \quad \text{أثبت أن } r_{12.3} = 0 \text{ إذا كانت } r_{12.3} = 0$$

$$r_{23.1} = r_{23} \sqrt{\frac{1 - r_{13}^2}{1 - r_{12}^2}} \quad (ب)$$

الحل :

$$r_{12} = r_{13}r_{23} \quad \text{عند } r_{12.3} = 0 \quad \text{إذا كانت } 0$$

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{23}^2)}} = \frac{r_{13} - (r_{13}r_{23})r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{23}^2)}} = \frac{r_{13}(1 - r_{23}^2)}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{23}^2)}} = r_{13} \sqrt{\frac{1 - r_{23}^2}{1 - r_{12}^2}} \quad (١)$$

(ب) بدل رموز الدليل 1 و 2 في نتيجة الجزء (١)

والحل التقيق للمعادلة (٢) ينتج $b_{12.34} = 4/3$ ، $b_{13.24} = 0$ ، $b_{14.23} = 5/9$.
يمكن أيضاً كتابة معادلة الانحدار كالتالى :

$$(٥) \quad X_1 = 23 + 4X_2 + 5X_4$$

ومن المهم ملاحظة أن معادلة الانحدار لا تتضمن درجات اللغة الإنجليزية ، بالتحديد X_3 . وهذا لايعنى أن معرفة الشخص باللغة الإنجليزية ، ليس لها أى صلة بأدائه فى الإحصاء . ولكن تعنى أن الحاجة إلى اللغة الإنجليزية ، فيها يختص بالتنبؤ بدرجات الإحصاء ، تحجبها الدرجات التى تتحقق فى الامتحانات الأخرى .

١٥ - ٢١ طالبان أدبا امتحان الالتحاق بالكلية الموضحة فى المسألة ١٥ - ٢٠ ، وقد سجلنا الدرجات التالية :

(أ) 30 رياضة ، 18 لغة انجليزية ، 32 معلومات عامة

(ب) 18 رياضة ، 30 لغة انجليزية ، 36 معلومات عامة . ماهى درجاتهم المتوقعة فى الإحصاء ؟

الحل :

(أ) بالتعويض $X_2 = 30$ ، $X_3 = 18$ ، $X_4 = 32$ فى المعادلة (٥) بالمسألة ١٥ - ١٩ ، فإن الدرجة المتوقعة فى الإحصاء هى $X_1 = 81$.

(ب) كما فى الجزء (أ) حيث $X_4 = 36$ ، $X_3 = 20$ ، $X_2 = 18$ ، نجد أن $X_1 = 37$.

١٥ - ٢٢ أوجد معاملات الارتباط الجزئية (أ) $r_{12.34}$ (ب) $r_{13.24}$ (ج) $r_{14.23}$. لبيانات المسألة ١٥ - ٢٠ .

الحل :

$$(١) ، (ب) \quad r_{12.4} = \frac{r_{12} - r_{14}r_{24}}{\sqrt{(1 - r_{14}^2)(1 - r_{24}^2)}} , \quad r_{13.4} = \frac{r_{13} - r_{14}r_{34}}{\sqrt{(1 - r_{14}^2)(1 - r_{34}^2)}} , \quad r_{23.4} = \frac{r_{23} - r_{24}r_{34}}{\sqrt{(1 - r_{24}^2)(1 - r_{34}^2)}} \quad (ب) ، (١)$$

باستخدام القيم الموضحة بالمسألة ١٥ - ٢٠ ، نحصل على $r_{12.4} = 0.7935$ ، $r_{13.4} = 0.2215$ ، $r_{23.4} = 0.2791$. إذن

$$r_{12.34} = \frac{r_{12.4} - r_{13.4}r_{23.4}}{\sqrt{(1 - r_{13.4}^2)(1 - r_{23.4}^2)}} = 0.7814 \quad , \quad r_{13.24} = \frac{r_{13.4} - r_{12.4}r_{23.4}}{\sqrt{(1 - r_{12.4}^2)(1 - r_{23.4}^2)}} = 0.0000$$

$$(ج) \quad r_{14.3} = \frac{r_{14} - r_{13}r_{34}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{34}^2)}} , \quad r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}} , \quad r_{24.3} = \frac{r_{24} - r_{23}r_{34}}{\sqrt{(1 - r_{23}^2)(1 - r_{34}^2)}} \quad (ج)$$

باستخدام القيم الموضحة بالمسألة ١٥ - ٢٠ ، نحصل على $r_{14.3} = 0.4664$ ، $r_{12.3} = 0.7939$ ، $r_{24.3} = 0.2791$. إذن

$$r_{12.34} = \frac{r_{12.3} - r_{14.3}r_{24.3}}{\sqrt{(1 - r_{14.3}^2)(1 - r_{24.3}^2)}} = 0.4193$$

١١-٢٢ فر معاملات الارتباط الجزئية (أ) $r_{12.4}$ (ب) $r_{13.4}$ (ت) $r_{12.34}$ (ث) $r_{14.3}$ (ج) $r_{14.23}$ التي حصلت عليها في المسألة ١٥ - ٢٢ .

الحل :

(أ) $r_{12.4} = 0.7935$. تمثل معامل الارتباط (الخطى) بين درجات الإحصاء وما سجله الطلبة في الرياضيات وذلك لجميع الطلبة الذين لهم نفس درجات المعلومات العامة . والحصول على هذا المعامل ، فإن درجات اللغة الإنجليزية (وكذلك العوامل الأخرى التي لم تأخذ في الحسبان) لم تأخذ في الاعتبار ، وهذا واضح من حقيقة أن الدليل 3 قد حذف .

(ب) $r_{13.4} = 0.2215$ تمثل معامل الارتباط بين درجات الإحصاء وما سجله الطلبة في اللغة الإنجليزية وذلك للذين سجلوا نفس الدرجة في المعلومات العامة . هنا درجة الطلبة في الرياضيات لم تأخذ في الاعتبار .

(ج) $r_{12.34} = 0.7814$ تمثل معامل الارتباط بين درجات الإحصاء وما سجله الطلبة في الرياضيات وذلك للطلبة المتساويين فيما سجلوه في اللغة الإنجليزية وما سجلوه في المعلومات العامة .

(د) $r_{14.23} = 0.4664$ تمثل معامل الارتباط بين درجات الإحصاء وما سجله الطلبة في المعلومات العامة وذلك للطلبة المتساويين فيما سجلوه في اللغة الإنجليزية .

(هـ) $r_{14.23} = 0.4193$ تمثل معامل الارتباط بين درجات الإحصاء وما سجله الطلبة في المعلومات العامة للطلبة المتساويين فيما سجلوه في الرياضيات وما سجلوه في اللغة الإنجليزية .

١١-٢٤ (أ) لبيانات المسألة ١٥ - ٢٠ ، بين أن

$$(١) \quad \frac{r_{12.4} - r_{13.4}r_{23.4}}{\sqrt{(1-r_{13.4}^2)(1-r_{23.4}^2)}} = \frac{r_{12.3} - r_{14.3}r_{24.3}}{\sqrt{(1-r_{14.3}^2)(1-r_{24.3}^2)}}$$

(ب) اشرح دلالة التساوى في الجزء (أ)

الحل :

(أ) الجانب الأيسر من (١) حسب في المسألة ١٥ - ٢٢ (أ) ، ويعطى النتيجة 0.7814 . لحساب الجانب الأيمن من (١) ، نستخدم نتائج المسألة ١٥ - ٢٢ (ج) والتي تعطى 0.7814 . أى أن الجانبين متساويان في هذه الحالة الخاصة .

بالمعاملات الجبرية المباشرة من الممكن إثبات أن الطرفين متساويان بشكل عام .

(ب) الجانب الأيسر من (١) هو $r_{12.34}$. الجانب الأيمن هو $r_{12.4}$. بما أن $r_{12.34}$ هو معامل الارتباط بين المتغيرات X_1 و X_2 مع الاحتفاظ بـ X_3 و X_4 كتوابت ، بينما $r_{12.4}$ هو معامل الارتباط بين X_1 و X_2 مع الاحتفاظ بـ X_4 و X_3 كتوابت فإن ذلك يوضح السبب في حدوث التساوى .

١٥ - ٢٥ أوجد (أ) معامل الارتباط المتعدد $R_{1.234}$

(ب) الخطأ المعياري للتقدير $s_{1.234}$ وذلك لبيانات المسألة ١٥ - ٢٠ .

الحل :

$$1 - R_{1.234}^2 = (1 - r_{12}^2)(1 - r_{13,2}^2)(1 - r_{14,23}^2) \text{ or } R_{1.234} = 0.9310 \quad (أ)$$

وبما أن $r_{12} = 0.90$ من المسألة ٥ - ٢٠ ، $r_{14,23} = 0.4193$ من المسألة ١٥ - ٢٢ (ث) ، و

$$r_{13,2} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{23}^2)}} = \frac{0.75 - (0.90)(0.70)}{\sqrt{(1 - (0.90)^2)(1 - (0.70)^2)}} = 0.3855$$

طريقة أخرى :

بإبدال الأدلة 2 و 4 في المعادلة الأولى نحصل على

$$R_{1.234} = 0.9310 \text{ أو } 1 - R_{1.234}^2 = (1 - r_{14}^2)(1 - r_{13,4}^2)(1 - r_{12,34}^2)$$

حيث استخدمت نتائج المسألة ١٥ - ٢٢ (أ) مباشرة

$$s_{1.234} = s_1 \sqrt{1 - R_{1.234}^2} = 10 \sqrt{1 - (0.9310)^2} = 3.650 \text{ أو } R_{1.234} = \sqrt{1 - s_{1.234}^2/s_1^2} \quad (ب)$$

قارن بالمعادلة (٨) ، صفحة ٤٢٢

مسائل إضافية

معادلات انحدار تتضمن ثلاث متغيرات :

١٥ - ٢٦ باستخدام رموز الدليل الملائمة ، اكتب معادلات الانحدار

(أ) X_3 على X_1 و X_2 . (ب) X_4 على X_1 و X_2 و X_3 و X_5

$$X_3 = b_{3,12} + b_{31,2}X_1 + b_{32,1}X_2 \quad (أ) : ج$$

$$X_4 = b_{4,1235} + b_{41,235}X_1 + b_{42,135}X_2 + b_{43,125}X_3 \quad (ب)$$

١٥ - ٢٧ اكتب المعادلات الاعتدالية المقابلة لمعادلات الانحدار

(أ) X_2 على X_1 و X_3 . (ب) X_5 على X_1 و X_2 و X_3 و X_4 .

٢٨ - ١٥ الجدول يوضح القيم المتقابلة لثلاث متغيرات

X_1	3	5	6	8	12	14
X_2	16	10	7	4	3	2
X_3	90	72	54	42	30	12

X_1 و X_2 و X_3 (أ) أوجد معادلة انحدار مربعات

الصغرى لـ X_3 على X_1 و X_2 .

(ب) قدر x_3 عند $x_1 = 10$ و $x_2 = 6$.

ج : (أ) $X_3 = 61.40 - 3.65X_1 + 2.54X_2$

(ب) 40

٢٩ - ١٦ محاضري الرياضيات يريد تحديد العلاقة بين درجات الامتحان النهائي ودرجات امتحانين مفاجئين خلال الفصل الدراسي.

اعتبر أن X_1 هو درجات الطالب في الامتحان المفاجيء الأول و X_2 درجاته في الامتحان المفاجيء الثاني و X_3 هي درجته في الامتحان النهائي ، وقد أعطى الحسابات التالية لمجموع 120 طالباً .

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= 6.8 & \bar{X}_2 &= 7.0 & \bar{X}_3 &= 74 \\ s_1 &= 1.0 & s_2 &= 0.80 & s_3 &= 9.0 \\ r_{12} &= 0.60 & r_{13} &= 0.70 & r_{23} &= 0.65 \end{aligned}$$

(أ) أوجد معادلة انحدار المربعات الصغرى لـ X_3 على X_1 و X_2 .

(ب) قدر درجات الامتحان النهائي لطالبيين بحلا 8 و 4 ، 7 و 9 على الترتيب في الامتحانين المفاجئين

ج : (أ) $X_3 - 74 = 4.36(X_1 - 6.8) - 4.04(X_2 - 7.0)$ or $X_3 = 16.07 + 4.36X_1 + 4.04X_2$

(ب) 66 و 84

٣٠ - ١٥ حل المسألة ١٥ - ٨ باختيار المتغيرات X_2 و X_3 بحيث تكون $\sum X_2 = \sum X_3 = 0$

الخطا المعياري للتقدير :

٣١ - ١٥ أوجد الخطأ المعياري لتقدير X_3 على X_1 و X_2 لبيانات بالمسألة ١٥ - ٢٨ .

ج : 3.12

٣٢ - ١٥ أوجد الخطأ المعياري لتقدير (أ) X_3 على X_1 و X_2

(ب) X_3 على X_2 و X_3 . لبيانات المسألة ٥١ - ٢٩

ج : (أ) 5.883 (ب) 0.6882

معامل الارتباط المتعدد

٣٣ - ١١ احسب معامل الارتباط المتعدد الخطى لـ X_3 على X_1 و X_2 لبيانات المسألة ١٥ - ٢٨

١٥ - ٢٤ احسب (أ) $R_{3 \cdot 12}$ (ب) $R_{1 \cdot 23}$ (ج) $R_{2 \cdot 13}$ لبيانات المسألة ١٥ - ٢٩ .

ج : (أ) 0.7567 (ب) 0.7255 (ج) 0.6810

١٥ - ٢٥ إذا كانت $r_{12} = r_{13} = r_{23} = r \neq 1$ ، بين أن $R_{1 \cdot 23} = R_{2 \cdot 31} = R_{3 \cdot 12} = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{1+r}}$. ناقش الحالة $r = 1$.

١٥ - ٢٦ إذا كانت $R_{1 \cdot 23} = 0$ ، أثبت أن $|r_{12}| \geq |r_{13}|$ و $|r_{23}| \geq |r_{12}|$ وفسر ذلك .

الارتباط الجزئي :

١٥ - ٢٧ احسب معامل الارتباط الجزئي الخلقى (أ) $r_{12 \cdot 3}$ (ب) $r_{13 \cdot 2}$ (ج) $r_{23 \cdot 1}$ لبيانات المسألة ١٥ - ٢٨ وفسر إجابتك

ج : (أ) 0.5950 (ب) 0.8995 (ج) 0.8727

١٥ - ٢٨ حل المسألة ١٥ - ٢٧ باستخدام بيانات المسألة ١٥ - ٢٩

ج : (أ) 0.2672 (ب) 0.5099 (ج) 0.4026 .

١٥ - ٢٩ إذا كانت $r_{12} = r_{13} = r_{23} = r \neq 1$ ، بين أن $r_{12 \cdot 3} = r_{13 \cdot 2} = r_{23 \cdot 1} = r(1+r)$. ناقش الحالة $r = 1$

١٥ - ٤٠ إذا كانت $r_{12 \cdot 3} = 1$ ، بين أن (أ) $|r_{12 \cdot 2}| = 1$ (ب) $|r_{23 \cdot 1}| = 1$ (ج) $R_{1 \cdot 23} = 1$ ، (د) $s_{1 \cdot 23} = 0$

الانحراف المتعدد والجزئي في حالة وجود أربع متغيرات أو أكثر :

١٥ - ٤١ وضع أن معادلة انحدار X_4 على X_1 و X_2 و X_3 يمكن كتابتها

$$\frac{x_4}{s_4} = a_1 \left(\frac{x_1}{s_1} \right) + a_2 \left(\frac{x_2}{s_2} \right) + a_3 \left(\frac{x_3}{s_3} \right)$$

حيث a_1 و a_2 و a_3 تحدد بحل المعادلات الآتية

$$\begin{cases} a_1 r_{11} + a_2 r_{12} + a_3 r_{13} = r_{14} \\ a_1 r_{21} + a_2 r_{22} + a_3 r_{23} = r_{24} \\ a_1 r_{31} + a_2 r_{32} + a_3 r_{33} = r_{34} \end{cases}$$

وحيث $\lambda_j = X_j - \bar{X}_j$ ، $r_{jj} = 1$ ، $j = 1, 2, 3, 4$. مهم النتيجة في حالة وجود أكثر من أربع متغيرات .

١٥ - ٤٢ إذا كانت

$$\bar{X}_1 = 20, \bar{X}_2 = 36, \bar{X}_3 = 12, \bar{X}_4 = 80, s_1 = 1.0, s_2 = 2.0, s_3 = 1.5, s_4 = 6.0, r_{12} = -0.20, r_{13} = 0.40, r_{23} = 0.50, r_{14} = 0.40, r_{24} = 0.30, r_{34} = -0.10.$$

(أ) أوجد معادلة انحدار X_4 على X_1 و X_2 و X_3 .(ب) قدر X_4 عند $X_1 = 15$ و $X_2 = 40$ و $X_3 = 14$.ج : (أ) $X_4 = 6X_1 + 3X_2 - 4X_3 - 100$ (ب) 54١٥ - ٤٢ أوجد (أ) $r_{41.23}$ (ب) $r_{42.13}$ (ج) $r_{43.12}$. لبيانات المسألة ١٥ - ٤٢ وفسر نتائجك.

ج : (أ) 0.8710 (ب) 0.8587 (د) -0.8426

١٥ - ٤٤ (أ) $R_{4.123}$ (ب) $s_{4.123}$ لبيانات المسألة ١٥ - ٤٢.

ج : (أ) 0.8947 (ب) 2.680

١٥ - ٤٥ جمع عالم بيانات خاصة بأربع متغيرات W و V و U و T . ويمتقد أن معادلة على الصورة

$$W = aT^b U^c V^d$$

حيث a, b, c, d ثوابت غير معروفة ، يمكن الحصول عليها ومنها يمكن تحديد قيمة W بمعرفة T, U, V . حدد بصورة واضحة أسلوباً يمكن به تحقيق هذا الهدف.

(إرشاد : احصل على لوغاريتم طرفي المعادلة).

ناقش الحالة

مسألة ١٥ - ٢٨

ناقش الحالة

(ب) $R_{1.23} = 1$

نثر من أربع متغيرات.

الفصل السادس عشر

تحليل السلاسل الزمنية

السلاسل الزمنية :

السلسلة الزمنية هي مجموعة من المشاهدات أخذت في فترات زمنية محددة ، عادة على فترات متساوية .

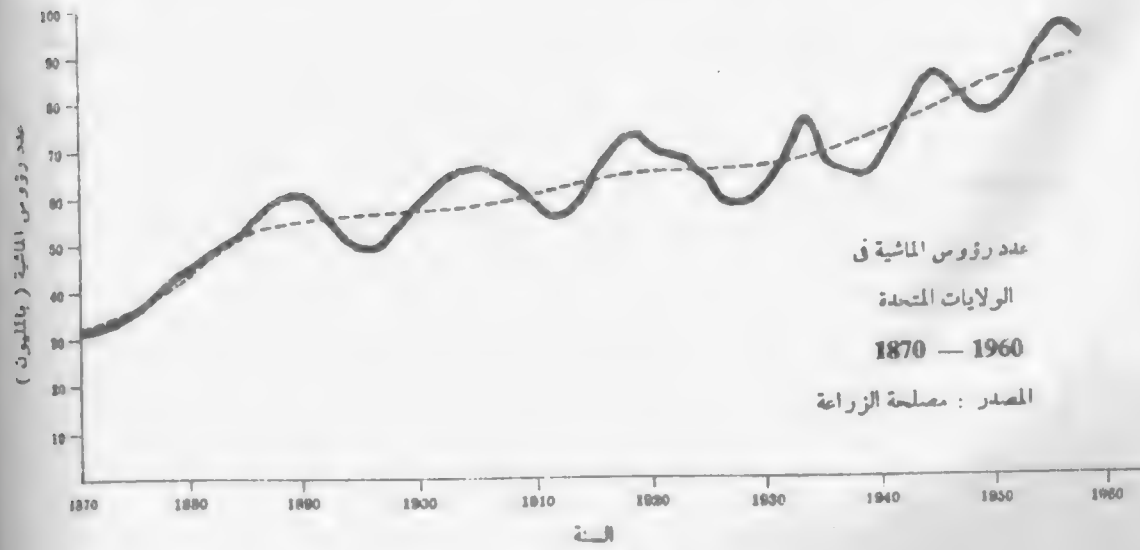
من أمثلة السلاسل الزمنية الانتاج الكلي في السنة من الصلب في الولايات المتحدة على مدار عدد من السنوات ، سعر الاقفال اليومي للأسهم في سوق الأوراق المالية ، درجات الحرارة كل ساعة والمعلن عنها بواسطة مكتب التنبؤات الجوية في مدينة ، المجموع الشهري لإبصالات المبيعات في أحد المتاجر

وتعرف السلسلة الزمنية رياضياً بالقيم Y_1, Y_2, \dots والتي يأخذها المتغير Y (درجات الحرارة ، سعر الاقفال للأسهم ، وغيرها) عند الزمن t_1, t_2, \dots أى أن Y دالة في t ، ونرمز لذلك بالرمز $Y = F(t)$.

الرسم البياني للسلاسل الزمنية :

تمثل السلسلة الزمنية المتضمنة المتغير Y تصويرياً بتكوين الشكل البياني Y مقابل t ، كما فعلنا ذلك عديداً من المرات ، في فصول سابقة .

الشكل ١٦ - ١ يوضح الرسم البياني لسلسلة زمنية توضح عدد رؤوس الماشية في الولايات المتحدة خلال السنوات 1870-1960.



شكل ١٦ - ١

التحركات المميزة في السلاسل الزمنية :

من المفيد التفكير في الرسم البياني للسلسلة الزمنية ، كما هو موضح بالشكل ١٦ - ١ ، كنقطة تتحرك مع مرور الزمن . ذلك فيما يشبه التحرك المادي للذرة تحت تأثير قوى مادية . وعلى أية حال ، فبدلاً من القوى المادية فإن الحركة قد تكون ناتجة عن قوى اقتصادية ، اجتماعية ، نفسية أو قوى أخرى .

ملاحظة كثير من السلاسل الزمنية تكشف عن وجود تحركات مميزة أو اختلافات مميزة .

بعضها أو كلها توجد بدرجات مختلفة . وتحليل مثل هذه التحركات له أهمية كبرى في كثير من الاستخدامات ، منها مشكلة التنبؤ بالتحركات المستقبلية . وهذا يوضح بصورة لا تدع مجالاً للشك الأسباب التي تجعل كثيراً من الصناعات والوكالات الحكومية تهتم بصورة حيوية بهذا الموضوع الهام .

تصنيف التحركات في السلاسل الزمنية :

يمكن تصنيف التحركات في السلاسل الزمنية إلى أربعة أنماط ، تسمى غالباً مكونات السلسلة الزمنية .

١ - **التحركات طويلة المدى (الاتجاه العام)** وتشير إلى الاتجاه العام الذي يظهر به الشكل البياني للسلسلة الزمنية على مدى فترة طويلة من الزمن . في الشكل أعلاه هذه الحركة العامة أو الاتجاه العام يرمز لها بمنحني الاتجاه العام والمعبّر عنه بخطوط متقطعة . لبعض السلاسل الزمنية قد يكون خط الاتجاه العام أكثر ملاءمة . وقد سبق دراسة تحديد مثل هذه الخطوط والمنحنيات بطريقة المربعات الصغرى في الفصل الثالث عشر . وسوف نتناقش طرق أخرى فيما بعد .

٢ - **تحركات دورية أو تغيرات دورية** وهي تشير إلى التذبذبات طويلة المدى حول خط الاتجاه العام أو منحني الاتجاه العام . هذه الدورات ، كما نسمي أحياناً ، قد تكون أو قد لا تكون على فترات ، بمعنى أنها قد تتبع وقد لا تتبع نفس النمط بعد كل فترة زمنية متساوية . في مجال الأعمال والنشاط الاقتصادي ، تعد التحركات دورية إذا تكررت بعد فترات زمنية تزيد عن السنة .

من الأمثلة الهامة للتحركات الدورية ما يسمى بدورات الأعمال والتي تمثل فترات ، الرخاء ، الركود ، الكساد ثم الإنهاء من الأزمة .

٣ - **التحركات الموسمية أو التغيرات الموسمية** وهي تشير إلى النمط المتماثل لحركة السلسلة الزمنية في الأشهر المتتالية خلال السنوات المتتالية . . مثل هذه التحركات ترجع إلى أحداث تقع سنوياً ، مثل الزيادة المفاجئة في مبيعات المحلات في الفترة السابقة لأعياد الميلاد .

في الشكل ١٦ - ١ لا تظهر أي تغيرات موسمية ، نظراً لأن الشكل يوضح الأرقام السنوية فقط .

وعلى الرغم من أن التحركات الموسمية بشكل عام تشير إلى الدورية السنوية في الأعمال والاقتصاد ، فإن الفكرة يمكن أن تمتد لتشمل الدورية لأية فترة من الزمن مثل اليوم ، الساعة ، الأسبوع ، ... وهكذا بالاعتماد على نوع البيانات المتاحة .

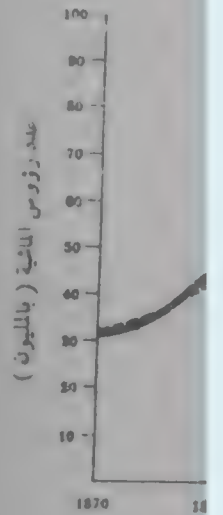
عشر

وات ، سحر
لغات الجوية في

مرارة ، سحر
٧٠

أ. من المرات ،

خلال السنوات



التحركات المميزة في السلاسل الزمنية :

من المفيد التفكير في الرسم البياني للسلسلة الزمنية ، كما هو موضح بالشكل ١٦ - ١ ، كنقطة تتحرك مع مرور الزمن . وذلك فيما يشبه التحرك المادي للذرة تحت تأثير قوى مادية . وعلى أية حال ، فبدلاً من القوى المادية فإن الحركة قد تكون ناتجة عن قوى اقتصادية ، اجتماعية ، نفسية أو قوى أخرى .

ملاحظة كثير من السلاسل الزمنية تكشف عن وجود تحركات مميزة أو اختلافات مميزة .

بعضها أو كلها توجد بدرجات مختلفة . وتحليل مثل هذه التحركات له أهمية كبرى في كثير من الاستخدامات ، منها مشكلة التنبؤ بالتحركات المستقبلية . وهذا يوضح بصورة لاتدع مجالاً للبحث الأسباب التي تجعل كثيراً من الصناعات والوكالات الحكومية تهم بصورة حيوية بهذا الموضوع الهام .

تصنيف التحركات في السلاسل الزمنية :

يمكن تصنيف التحركات في السلاسل الزمنية إلى أربعة أنماط ، تسمى غالباً مكونات السلسلة الزمنية .

١ - **التحركات طويلة المدى (الاتجاه العام)** وتشير إلى الاتجاه العام الذي يظهر به الشكل البياني للسلسلة الزمنية على مدى فترة طويلة من الزمن . في الشكل أعلاه هذه الحركة العامة أو الاتجاه العام يرمز لها بمنحنى الاتجاه العام والمعبّر عنه بخطوط متقطعة . لبعض السلاسل الزمنية قد يكون خط الاتجاه العام أكثر ملاءمة . وقد سبق دراسة تحديد مثل هذه الخطوط والمنحنيات بطريقة المربعات الصغرى في الفصل الثالث عشر . وسوف تناقش طرق أخرى فيما بعد .

٢ - **تحركات دورية أو تغيرات دورية** وهي تشير إلى التذبذبات بطويلة المدى حول خط الاتجاه العام أو منحني الاتجاه العام . هذه الدورات ، كما تسمى أحياناً ، قد تكون أو قد لا تكون على فترات ، بمعنى أنها قد تتبع وقد لا تتبع نفس النمط بعد كل فترة زمنية متساوية . في مجال الأعمال والنشاط الاقتصادي ، تعد التحركات دورية إذا تكررت بعد فترات زمنية تزيد عن السنة .

من الأمثلة الهامة للتحركات الدورية ما يسمى بدورات الأعمال والتي تمثل فترات ، الركاء ، الركود ، الكساد ثم الإنهاء من الأزمة .

٢ - **التحركات الموسمية أو التغيرات الموسمية** وهي تشير إلى النمط المتماثل لحركة السلسلة الزمنية في الأشهر المتعاقبة خلال السنوات المتتالية . . . مثل هذه التحركات ترجع إلى أحداث تقع سنوياً ، مثل الزيادة المفاجئة في مبيعات المحلات في الفترة السابقة لأعياد الميلاد .

في الشكل ١٦ - ١ لا تظهر أي تغيرات موسمية ، نظراً لأن الشكل يوضح الأرقام السنوية فقط .

وعلى الرغم من أن التحركات الموسمية بشكل عام تشير إلى الدورية السنوية في الأعمال والاقتصاد ، فإن الفكرة يمكن أن تمتد لتشمل الدورية لأي فترة من الزمن مثل اليوم ، الساعة ، الأسبوع ، ... وهكذا بالاعتماد على نوع البيانات المتاحة .

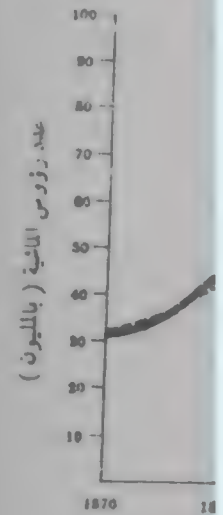
عشر

وات ، سحر
ات الجوية في

وزارة ، سحر
Y

من المرات ،

خلال السنوات

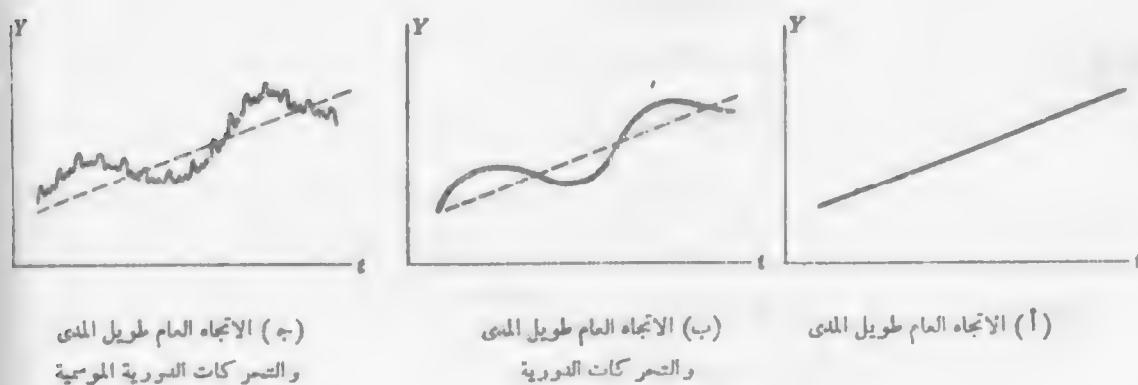


{ — تحركات منتظمة أو عشوائية : وتشير إلى الحركة المنتظمة في السلسلة الزمنية مثل الفيضانات « الإضرابات ، الانتفايات ، وغيرها . عل الرغم أنه من المعتاد افتراض أن مثل هذه الأحداث تنتج تغيرات تستمر لفترة قصيرة من الزمن ، فن المقبول أن تكون عل درجة من الكثافة نتيجة لوجود دورات جديدة أو غيرها من التحركات .

تحليل السلاسل الزمنية :

تحليل السلاسل الزمنية تتكون من وصف (بصورة عامة رياضية) مكونات التحركات الموجودة . لتوضيح الطرق التي تستخدم في هذا الوصف ، اعتبر الشكل ١٦ - ٢ والذي يشار إليها بالسلسلة الزمنية المثالية .

الشكل (أ) يوضح شكل خط الاتجاه العام طويل المدى (من الممكن أن نستخدم كذلك منحنى الاتجاه العام . الشكل (ب) يوضح خط الاتجاه العام طويل المدى موضعاً فوقه تحركات دورية (نفترض أنها عل فترات متساوية) . إذا أردنا أن نوضح عل الشكل (ج) بعض التحركات غير المنتظمة أو العشوائية ، وتظهر النتيجة أكثر شبيهاً بالسلاسل الزمنية التي تحدث في النواحي العملية



شكل ١٦ - ٢

المناقشة السابقة تعطينا أسلوباً يمكناً لتحليل السلاسل الزمنية . نفترض أن المتغير Y الذي يعبر عن السلسلة الزمنية هو حاصل ضرب المتغيرات T, C, S, I والتي تنتج الاتجاه العام (T) والتحركات الدورية (C) والتحركات الموسمية (S) والتحركات غير المنتظمة (I) . باستخدام الرموز

$$(١) \quad Y = T \times C \times S \times I = TCSI$$

تحليل السلاسل الزمنية يتضمن فحص العوامل T, C, S, I والتي يشار إليها بتفكيك السلسلة الزمنية إلى المكونات الأساسية لتحركاتها .

ويجب أن نشير إلى أن بعض الإحصائيين يفضلون اعتبار Y ك مجموع $T+C+S+I$ للمتغيرات الأساسية المدتيرة في السلسلة. وعلى الرغم من أننا سنفترض التفكيك (١) في طرق هذا الفصل ، فإن هناك طرق مشابة في حالة افتراض صيغة الجمع . ومن الناحية العملية ، فإن قرار اتخاذ أى من طرق التفكيك التي يجب افتراضها تعتمد على درجة النجاح المتحقق في تطبيق هذا الفرض .

المتوسطات المتحركة . تمهيد السلاسل الزمنية :

إذا كان لدينا مجموعة من الأرقام

$$(2) \quad Y_1, Y_2, Y_3, \dots$$

فإننا نعرف الوسط المتحرك من الدرجة N بأنه يعطى بمتتابة من الأوساط الحسابية

$$(3) \quad \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N}{N}, \frac{Y_2 + Y_3 + \dots + Y_{N+1}}{N}, \frac{Y_3 + Y_4 + \dots + Y_{N+2}}{N}, \dots$$

المجاميع في البسط بالمعادلة (٣) تسمى المجاميع المتحركة من الدرجة N .

مثال ١ : إذا كان لدينا الأرقام 2, 6, 1, 5, 3, 7, 2 فإن الوسط المتحرك من الدرجة 3 ، يعطى بالمتتابة

$$\frac{2+6+1}{3}, \frac{6+1+5}{3}, \frac{1+5+3}{3}, \frac{5+3+7}{3}, \frac{3+7+2}{3} \text{ i.e. } 3, 4, 3, 5, 4$$

ومن المعتاد أن نضع كل رقم في الوسط المتحرك في مكانه الملائم بالنسبة للبيانات الأصلية . في هذا المثال يجب أن نكتب

البيانات الأصلية 2, 6, 1, 5, 3, 7, 2

الوسط المتحرك من الدرجة 3 3, 4, 3, 5, 4

كل رقم في الوسط المتحرك عبارة عن متوسط الأرقام الثلاثة الواقعة فوقه .

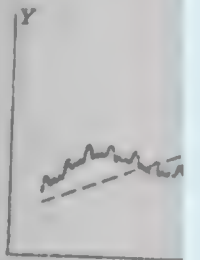
إذا كانت البيانات مطاة سنوياً أو شهرياً ، فإن المتوسط المتحرك من الدرجة N يسمى على الترتيب N سنة متوسط متحرك أو N شهر متوسط متحرك . بهذا نتحدث عن 5 سنوات متوسطات متحركة ، 12 شهراً متوسطات متحركة ، .. وغيرها ومن الواضح أنه يمكن استخدام وحدات أخرى للزمن .

المتوسطات المتحركة لها خاصية أنها تنبج إلى التقليل من كمية الاختلاف الموجودة في مجموعة من البيانات . في حالة السلاسل الزمنية تستخدم هذه الخاصية لاستبعاد التقلبات غير المرغوب فيها وتسمى العملية بتمهيد السلاسل الزمنية .

« الإحصاءات »
ميرة من الزمن ،

توضيح الطرق التي

م . الشكل (ب)
ذا أردنا أن نوضح
ن تحدث في النواحي



ماد طول المدى
للموسمية

لمسلة الزمنية هو حاصل
تحرركات الموسمية (S)

(١)

ة إلى المكونات الأساسية

إذا استخدمنا في (٣) ، الوسط الحسابي المرجح ، وكانت الترجيعات محددة مقدماً ، فإن المتتابة الناتجة تسمى الأوساط المتحركة المرجحة من الدرجة N .

مفصال ٢ : إذا استخدمت الأوزان 1, 4, 1 في المثال 1 ، فإن المتوسط المتحرك المرجح من الدرجة 3 يعطى بالمتتابة :

$$\frac{1(2) + 4(6) + 1(1)}{1 + 4 + 1}, \frac{1(6) + 4(1) + 1(5)}{1 + 4 + 1}, \frac{1(1) + 4(5) + 1(3)}{1 + 4 + 1},$$

$$\frac{1(5) + 4(3) + 1(7)}{1 + 4 + 1}, \frac{1(3) + 4(7) + 1(2)}{1 + 4 + 1}$$

أو 4.5, 2.5, 4.0, 4.0, 5.5

تقدير الاتجاه العام :

يمكن تقدير الاتجاه العام بعدة طرق :

١ — **طريقة المربعات الصغرى** المعطاة بالفصل الثالث عشر يمكن استخدامها للحصول على معادلة خط الاتجاه العام الملائم أو لمنحنى الاتجاه العام . من هذه المعادلة يمكن أن نحسب القيمة الاتجاهية T .

٢ — **طريقة التمهيد باليد** والتي تتكون من توفيق خط الاتجاه العام أو منحنى الاتجاه العام الذي يمكن استخدامه لتقدير T بالنظر إلى الشكل البياني . وعلى أية حال ، فهذه لها مفسار حيث أنها تعتمد كثير على التقدير الشخصي .

٣ — **طريقة المتوسط المتحرك** باستخدام المتوسطات المتحركة من درجات ملائمة ، فإن الأنماط الدائرية ، الموسمية وغير المنتظمة يمكن حذفها ، تاركة فقط حركة الاتجاه العام .

أحد مساوئ هذه الطريقة هو أن البيانات في بداية ونهاية السلسلة تفقد . في المثال 1 أعلاه نبدأ بسبعة أرقام وباستخدام متوسط متحرك من الدرجة 3 فننتهي بخمسة أرقام . أحد المساوئ الأخرى هو أن المتوسطات المتحركة قد تولد تحركات دائرية أو غيرها ليست موجودة في البيانات الأصلية . صموية ثلاثة هو أن المتوسطات المتحركة تتأثر بشدة بالقيم المتطرفة ولتغلب على هذه الصموية ، فإننا نستخدم أحياناً متوسطاً متحركاً مرجحاً بأوزان ملائمة . في هذه الحالة فإن القيمة المركزية (أو القيم) تعطى الوزن الأكبر وتعطى القيم المتطرفة أوزاناً أقل .

٤ — **طريقة أشباه المتوسطات** تتكون من تقسيم البيانات إلى مجموعتين (يفضل أن يكون متساويتين) ثم نحصل على متوسط كل جزء ، وهذا يعطينا نقطتين على خط السلسلة الزمنية . ويرسم خط الاتجاه العام بين هذين النقطتين ويمكن بذلك تحديد القيم الاتجاهية . ويمكن كذلك تحديد القيم الاتجاهية بفنون الرسم البياني (المسألة ١٦ - ٥) .

وعلى الرغم من أن هذه الطريقة بسيطة في تطبيقها ، إلا أنها قد تؤدي إلى نتائج غير جيدة إذا استخدمت بدون تمييز .
كذلك فإنها قابلة للتطبيق فقط في حالة ما إذا كان الاتجاه العام خطياً أو يقرب إلى خطين ، على الرغم من أنه يمكن مد صلاحيتها
في الحالات التي يمكن تمييز البيانات فيها إلى عدد من الأجزاء في كل جزء يكون الاتجاه العام فيه خطياً .

تقدير التغيرات الموسمية - الدليل الموسمي :

لتحديد المعامل الموسمي S في المعادلة (١) ، فيجب أن نقدر كيف تتغير البيانات في السلاسل الزمنية من شهر إلى شهر
خلال سنة نموذجية . مجموعة الأرقام التي توضح القيم النسبية لمختلف خلال أشهر السنة تسمى الدليل الموسمي للمنتج . فإذا كنا نعلم
على سبيل المثال أن أرقام المبيعات خلال يناير ، فبراير ، مارس ، ... هي 50 ، 120 ، 90 ، ...
في المائة من متوسط المبيعات الشهرية خلال العام كله ، فإن الأرقام 50 ، 120 ، 90 ، ... تعطي الدليل
الموسمي ويشار إليها أحياناً بالأرقام القياسية الموسمية . وسط (المتوسط) الدليل الموسمي للسنة كلها يجب أن يكون 100% ،
أي أن مجموع الأرقام القياسية يجب أن يكون 1200% .

وهناك عدة طرق متاحة لحساب الدليل الموسمي :

١ - طريقة متوسط النسب المتوية : في هذه الطريقة يعبر عن بيانات كل شهر كنسبة مئوية من المتوسط في السنة .
ثم نحصل على وسط النسبة المتوية للأشهر المتقابلة في مختلف السنوات وذلك أما باستخدام الوسط الحسابي أو الوسيط . فإذا
استخدمنا الوسط الحسابي فننأخذ القيم المتطرفة والتي يمكن أن تحدث . والـ 12 نسبة مئوية الناتجة تعطي الدليل
الموسمي . فإذا كان متوسطها ليس 100% (أي إذا كان المجموع لا يساوي 1200%) فيجب تعديله بالضرب في معامل ملائم .

٢ - طريقة النسبة المتوية للاتجاه العام أو النسبة للاتجاه العام : في هذه الطريقة فإن بيانات كل شهر يعبر
فيها كنسبة مئوية من القيم الاتجاهية في الشهر . وباستخدام وسط ملائم لهذه النسب للأشهر المتقابلة نحصل على الدليل المطلوب .
وكما في الطريقة الأولى نعدل هذه القيم إذا لم يكن متوسطها 100% .

لاحظ أن قسمة كل من القيم الشهرية Y على القيمة الاتجاهية T ينتج $Y/T = CSI$ من المعادلة (١) . وينتج عن عمليات
الحصول على متوسط Y/T الأدلة الموسمية والتي قد تحتوي على التغيرات الدورية وغير المنتظمة وعلى وجه الخصوص إذا كانت
كبيرة . وهذه قد تكون من المساوئ المهمة لهذه الطريقة .

٢ - طريقة النسبة المتوية للمتوسط المتحرك أو النسبة للمتوسط المتحرك :

في هذه الطريقة نحسب 12 شهراً متوسطاً متحركاً . وبما أن النتائج التي حصلنا عليها تقع بين الأشهر المتتالية بدلاً من
وقوعها في منتصف الشهر كما هي الحال في البيانات الأصلية ، فإننا نحسب 2 شهر متوسط متحرك لهذا 12 شهرياً متوسطاً
متحركاً . ونسب النتيجة 12 شهراً متوسطاً متحركاً مركزياً . بعد ذلك ، نعبّر عن البيانات الأصلية لكل شهر
كنسبة مئوية من الـ 12 شهراً متوسطاً متحركاً مركزياً المقابل له . وبحسب الدليل المطلوب بأخذ متوسط النسب للأشهر
المتقابلة . وكما سبق ، فإننا نعدل هذه النسب إذا لم يكن متوسطها 100% .

تسمى الأوساط

لدرجة 3 بطني

الاتجاه العام الملائم

استخدامه لتقدير T

رية ، الموسمية وغير

مة أرقام وباستخدام

نة قد تولد تحركات

شدة بالقيم المتطرفة

ة فإن القيمة المركزية

ين (ثم نحصل على

ندين التقلبات ويمكن

لاحظ أن السبب المنطقي وراء استخدام هذه الطريقة يحىء من المعادلة (١) . 12 شهراً متوسطاً متحركاً مركزياً Y_I يعمل على استبعاد التغيرات الموسمية وغير المنتظمة I و S ، وهذا مكافئ للقيم المحطاة بـ TC . بهذا فإن قسمة البيانات الأصلية على TC تنتج SI . والعملية التالية في الحصول على أوساط الأشهر المتقابلة تعمل على حذف المتغيرات العرضية I وهذا ينتج دليلاً ملائماً S .

٤ — طريقة الوصلات النسبية : في هذه الطريقة يمرر عن بيانات كل شهر كنسبة مئوية من بيانات الشهر السابق . وتسمى هذه النسب بالنسب الموصولة ، حيث أنها تربط كل شهر بالشهر السابق عليه . ثم نحصل على متوسط ملائم للنسب الموصولة للأشهر المتقابلة .

ومن هذه الإثني عشر متوسط النسب الموصولة يمكن أن نحصل على النسبة المئوية لكل شهر بالنسبة لشهر يناير والذي يعتبر مثل 100% . وبعد أن نفعل ذلك فإنه من المعتاد أن نجد أن شهر يناير التالي تقابله نسبة مئوية قد تكون أما على أو أقل من 100% وهذا يعتمد على ما إذا كان الاتجاه العام في زيادة أو في نقصان . باستخدام ذلك ، نقوم بتعديل النسب المئوية المختلفة التي حصلنا عليها بالأخذ في الاعتبار هذا الاتجاه العام . وهذه النسب المئوية النهائية ، والمعدلة بحيث يكون متوسطها 100% ، تعطى الدليل الموسمي المطلوب .

تحليل البيانات عن أثر الموسمية :

إذا قسمنا البيانات الشهرية الأصلية على الأرقام القياسية الموسمية المقابلة ، فإن البيانات التي نحصل عليها تسمى ببيانات لا موسمية أو بيانات معدلة لاستبعاد التغيرات الموسمية . مثل هذه البيانات تتضمن الاتجاه العام ، التغيرات الدورية والتغيرات غير المنتظمة .

تقدير التغيرات الدورية :

بعد تخليص البيانات من أثر الموسم ، فإنه يمكن تعديلها أيضاً للتخلص من أثر الاتجاه العام وذلك بقسمة البيانات ببساطة على القيم الاتجاهية المقابلة . وطبقاً للمعادلة (١) فإن عملية التعديل للتخلص من التغيرات الموسمية والقيم الاتجاهية تقابل قسمة Y على ST ، بحيث ينتج CI ، أي التغيرات الدورية وغير المنتظمة . وباستخدام متوسط متحرك لعدد بسيط من الأشهر (3 ، 5 أو 7 أشهر على سبيل المثال ، بحيث لا تحتاج إلى الحصول على قيم مركزية بعد ذلك) نستطيع استبعاد المتغيرات غير المنتظمة I حيث يبقى فقط التغيرات الدورية . وطالما أمكن عزل هذه التغيرات فإنه يمكن دراستها بالتفصيل . فإذا كانت الدورات متكررة فإنه يمكن تكوين دليل الدورية بطريقة مشابهة لتكوين الدليل الموسمي .

تقدير التغيرات العشوائية أو غير المنتظمة :

يمكن تقدير التغيرات العشوائية أو غير المنتظمة وذلك باستبعاد أثر الاتجاه العام والتغيرات الموسمية والتغيرات الدورية . ويمكن تحقيق ذلك بقسمة البيانات الأصلية Y على T, S, C ، وينتج عن ذلك I من المعادلة (١) . ومن الناحية العملية وجد أن التغيرات غير المنتظمة تتجه إلى أن تكون ذات حجم صغير وأنها غالباً تتجه إلى أن تتبع نمط التوزيع الطبيعي ، أي الانحرافات صغيرة نحدث بتكرارات كبيرة أما الانحرافات الكبيرة فتحدث بتكرارات صغيرة .

قابلية البيانات للمقارنة :

يجب إلزام الخفر عند مقارنة البيانات حيث يجب أن تكون مثل هذه المقارنة ممكنة . على سبيل المثال ، فعند مقارنة بيانات من شهر فبراير ، يجب أن نلاحظ أن شهر مارس 31 يوماً بينما شهر فبراير قد يكون أما 28 أو 29 يوماً . كذلك ، عند مقارنة أشهر فبراير لسنوات مختلفة يجب أن نتذكر أنه خلال السنوات الكبيسة يكون شهر فبراير 29 وليس 28 . كذلك فإن عدد أيام العمل خلال الأشهر المختلفة لنفس السنة أو لسنوات مختلفة قد تختلف نتيجة لأيام الإجازات ، الإضرابات أو الأعطال ، وغيرها . ومن الناحية العملية ، لا توجد قاعدة محددة لإجراء التعديلات اللازمة لهذه التغيرات . ويترك تقدير الحاجة لهذه التعديلات لتوجيهات الباحث .

التنبؤ :

الدراسة السابقة يمكن استخدامها في المشكلة الهامة الخاصة بالتنبؤ بالسلاسل الزمنية . وعلى أية حالة ، فيجب أن نتأكد من أن الحاجة الرياضية للبيانات لا تحل في حد ذاتها المشكلة . ولكن بالجمع بين الإحساس العام ، والخبرة والقدرة على الحكم السليم للباحث وبين التحليل الرياضي يمكن أن يكون له قيمة في كل من التنبؤ طويل المدى والتنبؤ قصير المدى .

تلخيص الخطوات الأساسية في تحليل السلاسل الزمنية :

- ١- اجمع البيانات الخاصة بالسلسلة الزمنية ، وأبذل كل مجهود لتأكد من أن البيانات يمكن الاعتماد عليها . في جميع البيانات يجب أن نضع نصب أعيننا الهدف من تحليل السلسلة الزمنية . على سبيل المثال ، فإذا أراد شخص التنبؤ بسلسلة زمنية معينة ، قد يساعد على ذلك الحصول على سلسلة زمنية على علاقة بها وكذلك معلومات أخرى . وقد يكون من الضروري تعديل البيانات لجعلها قابلة للمقارنة مثل التعديل للسنوات الكبيسة ، وغيرها .
- ٢- ارم السلسلة الزمنية ، لاحظ من الناحية الوصفية وجود الاتجاه العام طويل المدى ، التغيرات الدورية والتغيرات الموسمية .
- ٣- أوجد منحى الاتجاه العام أو خط الاتجاه العام واحصل على القيم الاتجاهية باستخدام إما طريقة المربعات الصغرى ، طريقة المقياس باليد ، طريقة المتوسطات المتحركة أو طريقة شبه المتوسطات .
- ٤- إذا كانت هناك تغيرات موسمية ، احصل على الدليل الموسمي ثم عدل البيانات وذلك لتخلص من أثر الموسم أى ، جعل البيانات لاموسمية .
- ٥- خلس البيانات اللاموسمية من أثر الاتجاه العام . بهذا تحتوى البيانات الناتجة (نظرياً) على التغيرات الدورية أو غير المنتظمة . متوسط متحرك نستخدم فيه 3 ، 5 أو 7 أشهر يفيد في حذف التغيرات غير المنتظمة وإظهار التغيرات الدورية .
- ٦- ارم التغيرات الدورية التى حصلت عليها في الخطوة الخامسة ، لاحظ أى تكرارية (أو شبه تكرارية) التى يمكن أن تحدث .
- ٧- تجميع نتائج الخطوات من ١ - ٦ مع أية معلومات أخرى متاحة ، أجرى التنبؤ (إذا كان ذلك مرغوباً فيه) وإذا كان ممكناً ناقش مصادر الخطأ وحجمه .

كأمر كزياً ٢١

بيانات الأصلية

سنة / وهذا ينتج

الشهر السابق

سط ملائم للنسب

شهر يناير والذى

قد تكون أما على

يم بتعديل النسب

هذه بحيث يكون

بليها تسمى ببيانات

الدورية والتغيرات

البيانات ببساطة على

ة تقابل قسمة ٧ على

من الأشهر (3 ،

يرات غير المنتظمة /

نت الدورات متكررة

التغيرات الدورية .

احية العملية وجد أن

ى ، أى انحرافات

مسائل مطولة

التحركات المميزة في السلاسل الزمنية :

١٦ - ١ إلى أى من التحركات المميزة في السلاسل الزمنية تنتمي أساساً مايل :

(أ) اشتعال النار في مصنع أدى إلى تأخير الإنتاج ثلاثة أسابيع

ج : غير منتظمة

(ب) عهد من الرفاهية

ج : دورية

(ج) مبيعات فترة ما بعد عيد الفصح في أحد المتاجر

ج : موسمية .

(د) الحاجة إلى زيادة إنتاج القمح نتيجة لزيادة المستمرة في السكان

ج : طويلة المدى

(هـ) عدد ملمترات الأمطار التي تهبط في الشهر على مدينة معينة خلال فترة 5 سنوات .

ج : موسمية .

المتوسطات المتحركة :

١٦ - ٢ الجدول ١٦ - ١ يوضح متوسط الإنتاج الشهري ، في بلد معين ، من فحم البيتومينس بمليون الكيلوجرامات للسنوات

من 1948 - 1958 . احسب (أ) 5 سنوات متوسط متحرك (ب) 4 سنوات متوسط متحرك (ج) 4 سنوات

متوسط متحرك مركزى .

جدول ١٦ - ١

السنة

السنة	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
متوسط الإنتاج الشهري من فحم البيتومينس (ملايين الكيلوجرامات)	50.0	36.5	43.0	44.5	38.9	38.1	32.6	38.7	41.7	41.1	33.8

الحل :

(أ) بالرجوع إلى الجدول ١٦-٢

المجموع المتحرك الأول 212.9

بالعمود الثالث (من اليسار)

هو المجموع من العنصر الأول

إلى العنصر الخامس في العمود

الثاني (من اليسار) . المجموع

المتحرك الثاني 201.0 هو

المجموع من العنصر الثاني إلى العنصر

السادس في العمود الثاني وهكذا .

من الناحية العملية فإنه بعد

الحصول على المجموع المتحرك الأول

212.9 ، فن السهل الحصول

جدول ١٦ - ٢

السنة	البيانات	5 سنوات مجموع متحرك	5 سنوات متوسط متحرك
1948	50.0		
1949	36.5		
1950	43.0	212.9	42.6
1951	44.5	201.0	40.2
1952	38.9	197.1	39.4
1953	38.1	192.8	39.6
1954	32.6	190.0	38.0
1955	38.7	192.2	38.4
1956	41.7	187.9	37.6
1957	41.1		
1958	33.8		

على المجموع المتحرك الثاني وذلك بطرح 50.0 (العنصر الأول في العمود 2) وإضافة 38.1 (العنصر السادس في العمود 2) فتكون النتيجة 201.0 . المجاميع المتحركة التالية نحصل عليها بطريقة مشابهة وبقسمة كل مجموع متحرك على 5 ينتج المتوسط المتحرك المطلوب .

(ب) بالرجوع إلى الجدول ١٦ - ٣

نحصل على الـ 4 سنوات مجموع

متحرك كما حصلنا عليه في الجزء (أ) ،

فيما عدنا أننا نجمع العناصر الأربعة

الأولى في العمود الثاني (من

اليسار) بدلا من خمسة عناصر .

لاحظ أن المجاميع المتحركة

تتمركز بين السنوات المتتالية ،

وذلك بخلاف الجزء (أ) . وهذه

دائما الحالة فيما إذا أخذنا عددا زوجيا

من السنوات عند حساب المتوسط

المتحرك . فإذا اعتبرنا أن سنة

جدول ١٦ - ٣

السنة	البيانات	4 سنوات مجموع متحرك	4 سنوات متوسط متحرك
1948	50.0		
1949	36.5		
1950	43.0	174.0	43.5
1951	44.5	162.9	40.7
1952	38.9	164.5	41.1
1953	38.1	154.1	38.5
1954	32.6	148.3	37.1
1955	38.7	151.1	37.8
1956	41.7	154.1	38.5
1957	41.1	155.3	38.8
1958	33.8		

1949 على سبيل المثال ، تغير عن أول يوليو 1949 فإن السنوات الأربع مجاميع متحركة تتمركز عند 1 يناير 1950 أو 31 ديسمبر 1949 .

ونحصل على الـ 4 سنوات متوسط متحرك بقسمة الـ 4 سنوات مجموع متحرك على 4 .

كياوجرامات للسنوات
مرك (ج) 4 سنوات

1948	1949	1
50.0	36.5	4

(ج) الطريقة الأولى : أنظر الجدول ١٦ - ٤

نحسب أولاً 4 سنوات متوسطات متحركة كافي الجزء (أ) . هذه القيم تتمركز بين السنوات المتتالية كما هو موضح .

إذا حسبنا الآن 2 سنة مجموعاً متحركاً من الـ 4 سنوات متوسطات متحركة ، فإن النتيجة تتمركز عند السنة المطلوبة .

بقسمة النتائج بالعمود 4 (من اليسار) ينتج الـ 4 سنوات متوسطات متحركة مركزية المطلوبة .

الجدول ١٦ - ٤

السنة	البيانات	4 سنوات متوسط متحرك	2 سنة مجموع متحرك للمود السابق	4 سنوات متوسط متحرك مركزي (المود 2 ÷ 4)
1948	50.0			
1949	36.5			
1950	43.0	43.5	84.2	42.1
1951	44.5	40.7	81.8	40.9
1952	38.9	41.1	79.6	39.8
1953	38.1	38.5	75.6	37.8
1954	32.6	37.1	74.9	37.5
1955	38.7	37.8	76.3	38.2
1956	41.7	38.5	77.3	38.7
1957	41.1	38.8		
1958	33.8			

الطريقة الثانية : أنظر الجدول ١٦ - ٥

نحسب أولاً 4 سنوات مجموع متحرك كافي الجزء (ب) . هذه القيم تتمركز بين السنوات المتتالية كما هو موضح .

فإذا حسبنا الآن 2 سنة مجموع متحرك لهذه الـ 4 سنوات مجموع متحرك ، فإن النتائج سوف تتمركز عند السنة المطلوبة .

بقسمة النتائج في العمود 4 على 8 (4 × 2) ينتج المتوسط المتحرك المطلوب

جدول ١٦ - ٥

السنة	البيانات	4 سنوات مجموع متحرك	2 سنة مجموع متحرك للمود الثالث	4 سنوات متوسط متحرك مركزي (المود الرابع مقسوماً على 8)
1948	50.0			
1949	36.5			
1950	43.0	174.0	336.9	42.1
1951	44.5	162.9	327.4	40.9
1952	38.9	164.5	318.6	39.8
1953	38.1	154.1	302.4	37.8
1954	32.6	148.3	299.4	37.5
1955	38.7	151.1	305.2	38.2
1956	41.7	154.1	309.4	38.7
1957	41.1	155.3		
1958	33.8			

١٦-٣ وضع أن الـ 4 سنوات متوسط متحرك مركزي بالمسألة ١٦-٢ (ج) يكافئ 5 سنوات متوسط متحرك مرجع باستخدام الأوزان 1, 2, 2, 2, 1 على الترتيب

الحل :

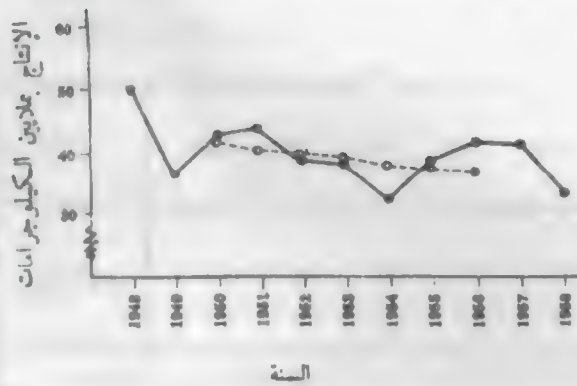
اعتبر أن Y_1, Y_2, \dots, Y_{11} تعبر عن القيم المقابلة للسنوات 1948, 1949, ..., 1958 على الترتيب . وباتباع خطوات الطريقة الثانية للمسألة ١٦-٢ (ج) ، نحصل على الجدول ١٦-٦

جدول ١٦-٦

السنة	Y	مجموع 4 سنوات متحرك	2 سنة مجموع متحرك للعمود الثالث	4 سنوات متوسط متحرك مركزي (العمود الرابع مقسوماً على 8)
1948	Y_1			
1949	Y_2			
1950	Y_3	$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$	$Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + 2Y_4 + Y_5$	$\frac{1}{8}(Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + 2Y_4 + Y_5)$
1951	Y_4	$Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5$	$Y_2 + 2Y_3 + 2Y_4 + 2Y_5 + Y_6$	$\frac{1}{8}(Y_2 + 2Y_3 + 2Y_4 + 2Y_5 + Y_6)$
1952	Y_5	$Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6$	$Y_3 + 2Y_4 + 2Y_5 + 2Y_6 + Y_7$	$\frac{1}{8}(Y_3 + 2Y_4 + 2Y_5 + 2Y_6 + Y_7)$
1953	Y_6	$Y_4 + Y_5 + Y_6 + Y_7$		
.
.
1958	Y_{11}			

من العمود الأخير ينتج عن ذلك أن 4 سنوات متوسط متحرك مركزي هي 5 سنوات متوسط متحرك مرجع بأوزان 1, 2, 2, 2, 1 على الترتيب . لاحظ أن 8 هو مجموع هذه الأوزان ، أي $1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 8$ ، هذه الطريقة يمكن استخدامها للحصول على نتائج المسألة ١٦-٢ (ج) . على سبيل المثال ، فإن القيمة الأولى (المقابلة لسنة 1950) هي :

$$\frac{(1)(50.0) + (2)(36.5) + (2)(43.0) + (2)(44.5) + (1)(38.9)}{8} = 42.1$$



شكل ١٦-٢

١٦-٤ ارسم المتوسط المتحرك للمسألة

١٦-٢ (أ) مع توضيح البيانات الأصلية .

الحل :

الرسم البياني للبيانات الأصلية

موضح بالشكل ١٦-٣ بالنظر

المشغل . الرسم البياني للمتوسط

المتحرك موضح بخطوط متقطعة .

المتتالية كما هو

ة تتمركز عند السنة

ة .

سنوات متوسط
متحرك مركزي
(سود 2 ÷ 4)

42.1
40.9
39.8
37.8
37.5
38.2
38.7

سنوات المتتالية كما هو

ف تتمركز عند السنة

سنوات متوسط
متحرك مركزي (العمود
مقسوماً على 8)

42.1
40.9
39.8
37.8
37.4
38.2
38.7

لاحظ كيف أن المتوسط المتحرك قد مهد الخط البياني للبيانات الأصلية ، مبيناً بشكل واضح خط الاتجاه العام .

أحد عيوب المتوسط المتحرك هو أننا نفقد البيانات عند بداية ونهاية السلسلة الزمنية . وقد يكون ذلك خطيراً إذا كانت كمية البيانات ليست كبيرة .

تقدير الاتجاه العام :

١٦ - ٥ أوجد القيم الاتجاهية لبيانات المسألة ١٦ - ٢

باستخدام طريقة أشباه المتوسطات ، حيث نأخذ كتوسط (أ) الوسط الحسابي (ب) الوسيط

الحل :

(أ) تقسم البيانات إلى جزئين متساويين

(مع حذف السنة المتوسطة 1953)

كما هو موضح . احسب متوسط

البيانات في كل جزء . من النتائج التي

حصلنا عليها ينتج أنه في 6 سنوات

(من 1950 إلى 1956) حدث

انخفاض يساوي $42.6 - 37.6 = 5.0$

مليون كيلوجرام ، أو انخفاض

$0.83 = 5.0 / 6$ مليون كيلوجرام في

السنة .

بمعرفة ذلك، فإنه يمكن حساب القيم الاتجاهية فالقيم الاتجاهية لسنة 1951 تساوي $42.6 - 0.83 = 41.77$ ، وهكذا ، كما هو موضح بالجدول ١٦ - ٨

جدول ١٦ - ٨

السنة	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
القيم الاتجاهية	44.3	43.4	42.6	41.8	40.9	40.1	39.3	38.5	37.6	36.8	36.0

ويمكن الحصول على النتيجة أيضاً برسم خط يصل بين النقط (42.6 و 1950) و (37.6 ، 1956)
ثم يقرأ القيم الاتجاهية من الرسم .

(ب) الوسيطان لكل من الجزئين في (أ) هما 43.0 و 38.7 على الترتيب . أن هناك نقصاً يساوي
 $0.72 = (43.0 - 38.7) / 6$ في السنة ، ويوضح الجدول ١٦ - ٩ القيم الاتجاهية في هذه الحالة .

جدول ١٦ - ٩

السنة	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
القيم الاتجاهية	44.4	43.7	43.0	42.3	41.6	40.8	40.1	39.4	38.7	38.0	37.2

وعندما نستخدم الوسيطان فإن الطريقة تسمى بأشباه الوسيطات . وإذا لم يذكر نوع الوسط المستخدم فإن هذا
يتضمن استخدام الوسط الحسابي .

١١ - ٩ صف كيف يمكن استخدام (أ) طريقة التوفيق باليد (ب) طريقة المتوسطات المتحركة لحساب القيم الاتجاهية لبيانات
المسألة ١٦ - ٢ .

الحل :

(أ) في هذه الطريقة فإننا ببساطة نرسم خطاً أو منحني يكون أفضل تقريب للبيانات المعطاة بالرسم في المسألة ١٦ - ٤ .
من هذا الخط يمكن أن نقرأ القيم الاتجاهية .

(ب) باستخدام 5 سنوات متوسطة متحركة ، فإننا نجد (المسألة ١٦ - ٤) أن بيانات السلسلة الزمنية قد مهدت بصورة
كبيرة . ومن الممكن استخدام المتوسطات التي حصلنا عليها كقيم اتجاهية للسنوات 1950 - 1956 . فإذا
فإنه من المسألة ١٦ - ٢ (أ) نجد أن القيم الاتجاهية المقابلة للسنوات 1950 ، 1951 ، 1952 ، ...
هي 42.6 ، 40.2 ، 39.4 ، ... هذه الطريقة فإن القيم الاتجاهية للسنوات 1957 ، 1958 ،
1949 ، 1948 ليست متاحة . وإذا أردنا الحصول عليها فيمكن ذلك باستخدام الاستكمال في الرسم الموضح
بالمسألة ١٦ - ٤ .

١١ - ٧ (أ) استخدام طريقة المربعات الصغرى لتوفيق خط لبيانات المسألة ١٦ - ٢

(ب) من النتيجة في (أ) أوجد القيم الاتجاهية .

الحل :

(أ) نستخدم الطريقة الثانية بالمسألة ١٣ - ١٩ (أ) بالفصل الثالث عشر ، نظراً لوجود عدد زوجي من السنوات .

ل واضح خط

يكون ذلك خطراً

1948	50
1949	34
1950	41
1951	44
1952	31
Total	210

المجموع

خط = 212.9/5

= 42.5

(نقابل سنة 1950)

= 42.6 - 0.83

باجدول ١٦ - ٨

1948	1949
44.3	43.4

الجدول ١٦ - ١٠

السنة	X	Y	X ²	XY
1948	-5	50.0	25	-250.0
1949	-4	36.5	16	-146.0
1950	-3	43.0	9	-129.0
1951	-2	44.5	4	-89.0
1952	-1	38.9	1	-38.9
1953	0	38.1	0	0
1954	1	32.6	1	32.6
1955	2	38.7	4	77.4
1956	3	41.7	9	125.1
1957	4	41.1	16	164.4
1958	5	33.8	25	169.0
		$\Sigma Y = 438.9$	$\Sigma X^2 = 110$	$\Sigma XY = -84.4$

هذا فإن خط المربعات الصغرى المطلوب هو

$$Y = \bar{Y} + \left(\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} \right) X = \frac{438.9}{11} + \left(\frac{-84.4}{110} \right) X \text{ or } Y = 39.9 - 0.767X$$

حيث نقطة الأصل $X = 0$ هي السنة 1953 ووحدة X هي السنة

(ب) بوضع 5, 3, 4, 5, - في X في معادلة المربعات الصغرى التي حصلنا عليها في الجزء (أ) ،

فإننا نحصل على القيم الاتجاهية كما هي معطاة في الجدول ١٦ - ١١ .

جدول ١٦ - ١١

السنة	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
القيم الاتجاهية	43.7	43.0	42.2	41.4	40.7	39.9	39.1	38.4	37.6	36.8	36.1

وهذه النتائج تتفق بصورة جيدة مع نتائج المسألة ١٦ - ٥ .

تقدير التغيرات الموسمية والدليل الموسمي :

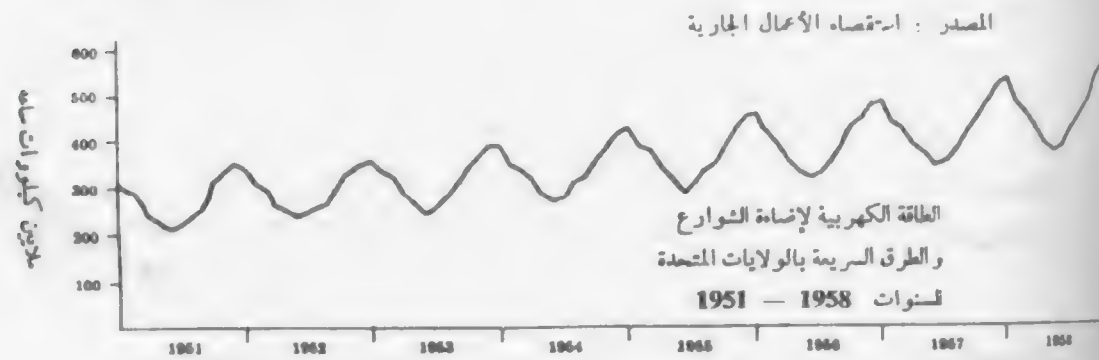
١٦ - ٨ الجدول ١٦ - ١٢ يوضح الطاقة الكهربائية الشهرية معبراً عنها بملايين الكيلووات ساعة والمستخدم في إنشاءات

والطرق السريعة بالولايات المتحدة الأمريكية في السنوات 1952 - 1958 .

(أ) كون الشكل البياني لهذه البيانات (ب) أحصل على الدليل الموسمي مستخدماً طريقة متوسط النسب المتوية

جدول ١٦ - ١٢

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	
318	281	278	250	231	216	223	245	269	302	325	347	1951
342	309	299	268	249	236	242	262	288	321	342	364	1952
367	328	320	287	269	251	259	284	309	345	367	394	1953
392	349	342	311	290	273	282	305	328	364	389	417	1954
420	378	370	334	314	296	305	330	356	396	422	452	1955
453	412	398	362	341	322	335	359	392	427	454	483	1956
487	440	429	393	370	347	357	388	415	457	491	516	1957
529	477	463	423	398	380	389	419	448	493	526	560	1958



السنة

(المصدر : استقصاء الأعمال الجارية)

(ب) المجاميع والمتوسطات الشهرية (الأوساط الحسابية) للسنوات 1951 - 1958 هي كما يلي

شكل ١٦ - ١٣

	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
المجاميع	3285	3522	3780	4042	4373	4738	5090	5505
المتوسطات الشهرية	273.7	293.5	315.0	336.8	364.4	394.8	424.2	458.7

بقسمة البيانات الشهرية المعطاة بالمتوسطات الشهرية المقابلة لكل سنة مع التعبير عن النتيجة كنسبة مئوية تنتج

القيم الموضحة بالجدول ١٦ - ١٢ على سبيل المثال ، القيمة الأولى في الجدول تحسب كما يلي :

$$318/273.7 = 116.2\%$$

ليها في الجزء (أ) ،

السنة	1948
القيم الاتجاهية	43.7

مقدمة في إحصاءات

النسب المئوية

جول ١٦ - ١٤

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	
116.2	102.7	101.6	91.3	84.4	78.9	81.5	89.5	98.3	110.3	118.7	126.8	1951
116.5	105.3	101.9	91.3	84.8	80.4	82.5	89.3	98.1	109.4	116.5	124.0	1952
116.5	104.1	101.6	91.1	85.4	79.7	82.2	90.2	98.1	109.5	116.5	125.1	1953
116.4	103.6	101.5	92.3	86.1	81.1	83.7	90.6	97.4	108.1	115.5	123.8	1954
115.3	103.7	101.5	91.7	86.2	81.2	83.7	90.6	97.7	108.7	115.8	124.0	1955
114.7	104.4	100.8	91.7	86.4	81.6	84.9	90.9	99.3	108.2	115.0	122.3	1956
114.8	103.7	101.1	92.6	87.2	81.8	84.2	91.5	97.8	107.7	115.7	121.6	1957
115.3	104.0	100.9	92.2	86.8	82.8	84.8	91.3	97.7	107.5	114.7	122.1	1958
925.7	831.5	810.9	734.2	687.3	647.5	667.5	723.9	784.4	869.4	928.4	989.7	المجموع
115.7	103.9	101.4	91.8	85.9	80.9	83.4	90.5	98.1	108.7	116.1	123.7	المتوسط

متوسط النسبة الشهرية لكل شهر معطى بالسطر الأخير بالجول ١٦ - ١٤ : مجموع هذه النسب الشهرية هي % 1200.1 وهي قريبة من المجموع المطلوب % 1200 بحيث لا يكون هناك ضرورة للتعديل . هذا فإن الأرقام بالسطر الأخير تعبر عن الدليل الموسمي المطلوب .

١٦ - ٩ حصل على الدليل الموسمي لبيانات المسألة ١٦ - ٨ باستخدام طريقة النسبة الشهرية للاتجاه العام أو نسبة الاتجاه العام . وفي تطبيق هذه الطريقة استخدم طريقة المربعات الصغرى للحصول على القيم الاتجاهية الشهرية .

الحل :

من الرسم البياني للبيانات الفعلية ، بالمسألة ١٦ - ٨ (أ) يتضح أن الاتجاه العام طويل المدى يمكن تقريبه بصورة مناسبة بخط مستقيم . وبدلاً من الحصول على هذا الخط من البيانات الشهرية المعطاة فإننا نحصل عليها من المتوسطات الشهرية لسنوات 1951 — 1958 المعطاة بالجول ١٦ - ١٥ ، المستخرج من الجول ١٦ - ١٣ للمسألة ١٦ - ٨ (أ)

جول ١٦ - ١٥

السنة	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
المتوسط الشهري	273.7	293.5	315.0	336.8	364.4	394.8	424.2	458.7

باقتراض أن الأرقام الشهرية المعطاة تقابل منتصف الشهر ، فإن المتوسطات في هذا الجدول تقابل 30 يونيو أو 1 يوليو السنة المقابلة لكل متوسط .

نستخدم الطريقة الثانية للمسألة ١٣ - ٢٠ (ب) ، الفصل الثالث عشر

الجدول ١٦ - ١٦

السنة	X	Y	X ²	XY
1951	7	273.7	49	-1915.9
1952	5	293.5	25	-1467.5
1953	3	315.0	9	-945.0
1954	1	336.8	1	-336.8
1955	1	364.4	1	364.4
1956	3	394.8	9	1184.4
1957	5	424.2	25	2121.0
1958	7	458.7	49	3210.9
		$\Sigma Y = 2861.1$	$\Sigma X^2 = 168$	$\Sigma XY = 2215.5$

حيث نجد خط المربعات الصغرى وهو

$$Y = \bar{Y} + \left(\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} \right) X = \frac{2861.1}{8} + \left(\frac{2215.5}{168} \right) X = 357.6 + 13.188X$$

حيث تقاس X بنصف السنة ونقطة الأصل هي 31 ديسمبر 1954 أو 1 يناير 1955 .

من هذه المعادلة نستنتج أن قيم Y تزيد 13.188 كل نصف سنة أو 2.20 = 13.188/6 كل شهر .
 بهذا فمتى $X = 0$ (1 يناير 1955) فإن $Y = 357.6$. وبعد نصف شهر (15 يناير 1955) فإن قيمة Y تصبح $Y = 358.7 = 357.6 + \frac{1}{2}(2.20)$. وبالإضافة المتتالية لـ 2.20 إلى 358.7 نحصل على القيمة الاتجاهية لشهر فبراير 1955 ، وهي $358.7 + 2.20 = 360.9$. ولشهر مارس 1955 وهي $360.9 + 2.20 = 363.1$. وهكذا . وبصورة مشابهة فإنه بالطرح المتتالي لـ 2.20 من 358.7 نحصل على القيم الاتجاهية لشهر ديسمبر 1954 ونوفمبر 1954 وهي على الترتيب $358.7 - 2.20 = 356.5$ لشهر ديسمبر و $354.3 = 356.5 - 2.20$ لشهر نوفمبر وبهذه الطريقة نحصل على القيم الاتجاهية الشهرية الموضحة بالجدول ١٦ - ١٧

الجدول ١٦ - ١٧

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
1951	253.1	257.5	259.7	261.9	264.1	266.3	268.5	270.7	272.9	275.1	277.3
1952	279.5	281.7	283.9	286.1	288.3	290.5	292.7	294.9	297.1	299.3	301.5
1953	305.9	308.1	310.3	312.5	314.7	316.9	319.1	321.3	323.5	325.7	327.9
1954	332.3	334.7	336.7	338.9	341.1	343.3	345.5	347.7	349.9	352.1	354.3
1955	358.7	360.9	363.1	365.3	367.5	369.7	371.9	374.1	376.3	378.5	380.7
1956	385.1	387.3	389.5	391.7	393.9	396.1	398.3	400.5	402.7	404.9	407.1
1957	411.5	413.7	415.9	418.1	420.3	422.5	424.7	426.9	429.1	431.3	433.5
1958	437.9	440.1	442.3	444.5	446.7	448.9	451.1	453.3	455.5	457.7	459.9

نوفمبر	ديسمبر
118.7	126.8
116.5	124.0
116.5	125.1
115.5	123.8
115.8	124.0
115.0	122.3
115.7	121.6
114.7	122.1
928.4	989.7
116.1	123.7

قيمة هي 1% 1200

سطر الأخير تعبر عن

بـ الاتجاه العام . وفي

يمكن تقريبه بصورة

من المتوسطات الشهرية

سألة ١٦ ٨ (أ)

سنة
لـ الشهرى

لـ تقابل 30 يونيو

ثم نقسم كل قيمة من القيم الشهرية المعطاة بالجدول ١٦ - ١٧ بالمسألة ١٦ - ٨ بالقيم الاتجاهية المقابلة بالجدول ١٦ - ١٧ . ويوضح الجدول ١٦ - ١٨ النتيجة كنسبة مئوية . على سبيل المثال ، فإن القيمة الأولى بالجدول تحسب كالآتي $125.6\% = 318 / 253.1$

جدول ١٦ - ١٨

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	
125.6	110.1	108.0	96.3	88.2	81.8	83.7	91.2	99.4	110.7	118.1	125.1	1951
122.4	110.0	105.3	93.7	86.4	81.2	82.7	88.8	96.9	107.3	113.4	119.9	1952
120.0	106.5	103.1	91.8	85.5	79.2	81.2	88.4	95.5	105.9	111.9	119.4	1953
118.0	104.3	101.6	91.8	85.0	79.5	81.6	87.7	93.7	103.4	109.8	117.0	1954
117.1	104.7	101.9	91.4	85.4	80.1	82.0	88.2	94.6	104.6	110.8	118.0	1955
117.6	106.4	102.2	92.4	86.6	81.3	84.1	89.6	97.3	105.5	111.5	118.0	1956
118.3	106.4	103.1	94.0	88.0	82.1	84.1	90.9	96.7	106.0	113.3	118.4	1957
120.8	108.4	104.7	95.2	89.1	84.7	86.2	92.4	98.4	107.7	114.4	121.2	1958
119.2	106.4	103.1	93.0	86.5	81.2	83.2	89.2	96.8	106.0	112.6	118.9	الوسيط

الحصول على متوسط النسب المئوية لكل شهر للسنوات المختلفة ، فقد استخدم الوسيط ، كما هو موضح بالصف الأخير بالجدول ، وذلك نظراً لوجود قيم متطرفة . ونظراً لأن مجموع هذه الوسيطات هو 1196.1 ، فإننا نعدل هذه الأرقام بفرعها في 1200/1196.1 بحيث يكون مجموعها 1200 . وهذه الطريقة تحصل على الدليل الموسمي المطلوب كما هو موضح بالجدول ١٦ - ١٩ .

جدول ١٦ - ١٩

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	
119.6	106.7	103.4	93.3	86.8	81.5	83.5	89.5	97.1	106.3	113.0	119.3	الدليل الموسمي

وما يستحق الانتباه ملاحظة أنه في الأشهر السبعة الأولى فإن أرقام الدليل الموسمي أعلاه أكبر من تلك التي حصلنا عليها بالمسألة ١٦ - ٨ ، بينما في الأشهر الخمسة الأخيرة فإنها تكون أقل .

ويمكن الحصول على الدليل الموسمي باستخدام الوسط الحسابي بدلا من الوسيط المذكور بالصف الأخير من الجدول ١٦ - ١٨ . في هذه الحالة فإنه يجب استبعاد القيم المتطرفة من أي عمود قبل الحساب الوسط

١٦-١٥ أوجد الدليل الموسمي لبيانات المسألة ١٦ - ٨ باستخدام طريقة النسب المئوية المتوسط المتحرك أو النسبة المتوسط المتحرك

الحل :

نبدأ أولاً الحصول على 12 شهر متوسط متحرك مركزي باستخدام الطريقة الثانية للمساءة ١٦ - ٢ (ج) كما هو موضح بالجدول ١٦ - ٢٠

جدول ١٦ - ٢٠

12 شهر متوسط متحرك مركزي (العمود 4 مقسوماً على 24)	2 شهر مجموع متحرك للمود 3	12 شهر مجموع متحرك	البيانات	السنة و الشهر	12 شهر متوسط متحرك مركزي (العمود 4 مقسوماً على 24)	2 شهر مجموع متحرك للمود 3	12 شهر مجموع متحرك	البيانات	السنة و الشهر
1951					1953				
يناير			318		يناير		3641	367	يناير
فبراير			281		فبراير		3658	328	فبراير
مارس			278		مارس		3680	320	مارس
أبريل			250		أبريل		3701	287	أبريل
مايو			231		مايو		3725	269	مايو
يونيه			216	3285	يونيه		3750	251	يونيه
يوليه			223	3309	يوليه		3780	259	يوليه
أغسطس			245	3337	أغسطس		3805	284	أغسطس
سبتمبر			269	3358	سبتمبر		3826	309	سبتمبر
أكتوبر			302	3376	أكتوبر		3848	345	أكتوبر
نوفمبر			325	3394	نوفمبر		3872	367	نوفمبر
ديسمبر			347	3414	ديسمبر		3893	394	ديسمبر
1952					1954				
يناير			342	3433	يناير		7299	392	يناير
فبراير			309	3450	فبراير		7338	345	فبراير
مارس			299	3469	مارس		7381	342	مارس
أبريل			268	3488	أبريل		7426	311	أبريل
مايو			249	3505	مايو		7475	290	مايو
يونيه			236	3522	يونيه		7530	273	يونيه
يوليه			242	3547	يوليه		7585	282	يوليه
أغسطس			262	3566	أغسطس		7631	305	أغسطس
سبتمبر			288	3587	سبتمبر		7674	328	سبتمبر
أكتوبر			321	3606	أكتوبر		7720	364	أكتوبر
نوفمبر			342	3626	نوفمبر		7765	389	نوفمبر
ديسمبر			364	7267	ديسمبر		7808	417	ديسمبر

لغة بالجمول
بول تحب

ديسمبر	يناير
125.1	11
119.9	11
119.4	11
117.0	10
118.0	11
118.0	11
118.4	11
121.2	11
118.9	11

بالصف الأخير
ل هذه الأرقام
لطلوب كما هو

ديسمبر	يناير	نوفمبر
119.3	113.0	108

ن تلك التي حصلت

الأخير من الجدول

النسبة المتوسط

تابع جدول ٢٠١٦

12 شهر متوسط متحرك مركزي (المود 4 مقسوما عل 24)	2 شهر مجموع متحرك المود 3	12 شهر مجموع متحرك	البيانات	السنة و الشهر	12 شهر متوسط متحرك مركزي (المود 4 مقسوما عل 24)	2 شهر مجموع متحرك المود 3	12 شهر مجموع متحرك	البيانات	السنة و الشهر
1955					1957				
يناير	420	4197	8417	350.7	يناير	487	4916	9854	410.6
فبراير	378	4220	8465	352.7	فبراير	440	4938	9905	412.7
مارس	370	4245	8518	354.9	مارس	429	4967	9957	414.9
أبريل	334	4273	8578	375.4	أبريل	393	4990	10010	417.1
مايو	314	4305	8643	360.1	مايو	370	5020	10077	419.9
يونيه	296	4338	8711	363.0	يونيه	347	5057	10147	422.8
يوليه	305	4373	8779	365.8	يوليه	357	5090	10222	425.9
أغسطس	330	4406	8846	368.6	أغسطس	388	5132	10301	429.2
سبتمبر	356	4440	8908	371.2	سبتمبر	415	5169	10372	432.2
أكتوبر	396	4468	8964	373.5	أكتوبر	457	5203	10436	434.8
نوفمبر	422	4496	9019	375.8	نوفمبر	491	5233	10494	437.2
ديسمبر	452	4523	9072	378.0	ديسمبر	516	5261	10555	439.8
1956					1958				
يناير	453	4549	9128	380.3	يناير	529	5294	10620	442.5
فبراير	412	4579	9187	382.8	فبراير	477	5326	10683	445.1
مارس	398	4608	9252	385.5	مارس	463	5357	10747	447.8
أبريل	362	4644	9319	388.3	أبريل	423	5390	10816	450.7
مايو	341	4675	9382	390.9	مايو	398	5426	10887	453.6
يونيه	322	4707	9445	393.5	يونيه	380	5461	10966	456.9
يوليه	335	4738	9510	396.2	يوليه	389	5505		
أغسطس	359	4772	9572	398.8	أغسطس	419			
سبتمبر	392	4800	9631	401.3	سبتمبر	448			
أكتوبر	427	4831	9693	403.9	أكتوبر	493			
نوفمبر	454	4862	9753	406.4	نوفمبر	526			
ديسمبر	483	4891	9807	408.6	ديسمبر	560			

نقوم الآن بقسمة كل من القيم الفعلية الشهرية على 12 شهراً متوسطاً متحركاً مركزياً المقابل والتعبير عن كل نتيجة كنسبة مئوية ، على سبيل المثال ، مقابل شهر يوليو 1951 نحصل على $81.2\% = 223/274.7$. ويوضح الجدول ١٦ - ٢١ هذه النتائج . لاحظ أن القيم للأشهر الستة من 1951 وكذلك للأشهر الستة الأخيرة من 1958 غير متاحة باستخدام هذه الطريقة .

الاختبارات النظرية للأرقام القياسية :

من المستحب من الناحية النظرية أن تحقق الأرقام القياسية لمجموعات من السلع الخواص التي تحققها المناسيب (أى الأرقام القياسية لسلعة واحدة) . وأى رقم قياسي له خاصية معينة يذكر عنه أنه يحقق الاختبار المرتبط بهذه الخاصية . بهذا ، فعل سبيل المثال ، الأرقام القياسية التي لها خاصية الانعكاس في الزمن يقال عنها أنها تحقق اختبار الانعكاس في الزمن ، وهكذا .

ولم يكتشف رقم قياسي للآن يحقق كل الاختبارات . هل الرغم من أنه في كثير من الحالات تتحقق هذه الاختبارات تقريبا . يحقق رقم فيشر المثال (صفحة ٥٠٢) على وجه الخصوص اختبار الانعكاس في الزمن واختبار الانعكاس في المعامل ، وهذا يقترب من أى رقم قياسي نافع آخر من تحقيق الخصائص التي تعتبر مهمة ، ومنها جاءت تسمية «المثال» . ومن وجهة النظر العملية ، يمكن استخدام أرقام قياسية أخرى كذلك وسوف نقوم باختبار بعضها .

رموز :

من المعتاد استخدام الرمز $p_n^{(1)}, p_n^{(2)}, p_n^{(3)}, \dots$ للتعبير عن أسعار السلعة الأولى ، الثانية والثالثة ، خلال الفترة الممتدة n . الأسعار المقابلة خلال فترة الأساس يرمز لها بالرمز $p_0^{(1)}, p_0^{(2)}, p_0^{(3)}$. ولهم جريا . الأرقام $1, 2, 3, \dots$ هي أدلة ويجب ألا تثير اللبس مع الأسس . بهذه الرموز فإن سعر السلعة في خلال الفترة n يمكن الإشارة إليها بالصورة $p_n^{(i)}$ وكما في الفصول السابقة ، نستخدم رمز التجميع على الدليل i . على سبيل المثال ، بافتراض أن هناك مجموعة N من السلع ، فإن مجموع أسعارها خلال الفترة n يمكن كتابته على الشكل $\sum_{i=1}^N p_n^{(i)}$ أو $\sum p_n^{(i)}$ ومن الأسهل حذف الأدلة معا وكتابة $\sum p_n$ ، وهو ما سوف نتبعه إذا لم يؤد هذا إلى أى اللباس . ويجب أن نحفظ نصب أعيننا بحقيقة أننا نستخدم مجموعة متكاملة من الرموز « بهذه الرموز » ، فإن $\sum p_0$ تعبر عن الأسعار لجميع السلع خلال فترة الأساس . ونستخدم رموزا مماثلة للكميات والقيم .

الطريقة التجميعية البسيطة :

في هذه الطريقة لحساب الرقم القياسي للأسعار ، فإننا نعبر عن مجموع أسعار السلع في سنة المقارنة كنسبة مئوية من مجموع أسعارها في سنة الأساس .

$$(٤) \quad \text{الرقم القياسي التجميعي البسيط} = \frac{\sum p_n}{\sum p_0}$$

حيث $\sum p_0$ = مجموع أسعار السلع في سنة الأساس

$$\sum p_n = \text{المجموع المقابل لأسعار السلع في سنة المقارنة}$$

حيث يعبر عن النتيجة كنسبة مئوية كما هو بالنسبة للأرقام القياسية بشكل عام .

وعلى الرغم من أن هذه الطريقة لها الميزة بأنها سهلة التطبيق ، إلا أن لها عيبين كبيرين يجعل استخدامها غير مستحب .

١ - لا تؤخذ في الحسبان الأهمية النسبية للسلع المختلفة . فمثلا طبقا لهذه الطريقة ، فإن أوزانا متساوية تمنى أن نفس الأهمية سوف تعطى للألبان وللمجموع الحلاقة عند حساب الرقم القياسي لتكلفة المعيشة .

٢ - الوحدات المستخدمة في التعبير ~~السعر~~ ، مثل ، الجرام . وغيرها . تؤثر على قيمة الرقم القياسي . أنظر المسألة ١٧-١٢ .

وصلة المناسيب ،

سنة الأساس 1953

و. اهتمامنا بالمقارنة
ثم فقط بأسعار اللبن
والملابس وغيرها .
هذا لا يمد مرضيا .

المشاكل التي يجب
ع التي يجب أن تدخل
وكميات هذه السلع .
في حالة ما إذا كانت
وفي النهاية يجب أن
لألة عملية .

من أن المتوسطات ،

لقياسية ، لكل منها

سين أنماطا عديدة من
كيف يمكن بسهولة

الوسط البسيط لمناسيب :

في الطريقة هناك عديد من الصيغ تعتمد على الطريقة المستخدمة في الحصول على أوساط مناسيب الأسعار ، مثل الوسط الحسابي ، الوسط الهندسي ، الوسط التوافقي ، الوسيط ، وما إلى ذلك . فإذا استخدمنا الوسط الحسابي ، على سبيل المثال فإننا نحصل على .

$$(٥) \quad \frac{\sum p_n/p_0}{N} = \text{الوسط الحسابي البسيط للرقم القياسي لمناسيب الأسعار}$$

حيث $\sum p_n/p_0$ = مجموع مناسيب أسعار جميع السلع .

N = عدد مناسيب أسعار السلع المستخدمة

للأرقام القياسية باستخدام أنواع أخرى من الأوساط ، أنظر المسائل ١٧-١٤ : ١٧-١٥ وعلى الرغم من أن هذه الطريقة تتخلص من العيب الثاني الموجود في الطريقة التجميعية البسيطة ولكن يظل العيب الأول موجوداً بها .

الطريقة التجميعية المرجحة :

للتغلب على عيوب الطريقة التجميعية البسيطة ، فإننا نرجع أسعار كل سلعة باستخدام معامل ملائم ويستخدم غالباً كمية أو حجم السلعة المباعة خلال فترة الأساس ، أو سنة المقارنة أو سنة نموذجية (والتي قد تتضمن متوسط عدد من السنوات) هذه الأوزان تشير إلى أهمية السلعة المعنية . وهناك ثلاث صيغ ممكنة تعتمد على ما إذا كنا سنستخدم كميات سنة الأساس أو سنة المقارنة أو سنة نموذجية ونعبر عنها بالرموز q_0 و p_n و q_1 على الترتيب .

١ - رقم لاسبيرز القياسي أو طريقة سنة الأساس :

$$(٦) \quad = \frac{\sum p_n q_0}{\sum p_0 q_0} \quad \text{الرقم القياسي التجميعي المرجح باستخدام كميات سنة الأساس}$$

٢ - رقم باش القياسي أو طريقة سنة المقارنة :

$$(٧) \quad = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_n} \quad \text{الرقم القياسي التجميعي المرجح باستخدام كميات سنة المقارنة}$$

٣ - طريقة السنة النموذجية :

إذا اعتبرنا أن q_1 تعبر عن وزن الكمية خلال فترة نموذجية ، فإننا نعرف .

$$(٨) \quad = \frac{\sum p_n q_1}{\sum p_0 q_1} \quad \text{الرقم القياسي التجميعي المرجح باستخدام كميات السنة النموذجية}$$

عندما تكون $t = 0$ و $t = n$ فإن هذه الصيغة تؤول إلى الصيغة (٦) والصيغة (٧) على الترتيب .

رقم فيشر المثالي :

نصنف

$$(٩) \quad \sqrt{\left(\frac{\sum p_n q_0}{\sum p_0 q_0}\right) \left(\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_n}\right)} \quad \text{الرقم القياسي المثالي لفيشر}$$

وهذا الرقم القياسي هو الوسط الهندسي للرقمين القياسيين لسكل من لاسبيرز وباش الموضحين بالمعادلتين (٦) و (٧) وكما سبق أن أوضحنا فإن رقم فيشر المثالي يحقق كلا من اختباري الانعكاس في الزمن والانعكاس في المعامل ، وهذا ما يبطيه بعض المزايا النظرية عن الأرقام القياسية الأخرى .

رقم مارشال - أدجورث القياسي :

يستخدم رقم مارشال - أدجورث القياسي الصيغة التجميعية المرجحة باستخدام طريقة السنة النموذجية حيث الأوزان هي الوسط الحسابي لكميات سنة الأساس وكميات سنة المقارنة . أي $q_i = 1/2 (q_0 + q_n)$. وبالتعميم بهذه القيمة لـ q_i في المعادلة (٨) ، نحصل على .

$$(١٠) \quad \text{رقم مارشال - أدجورث القياسي للأسعار} = \frac{\sum p_n(q_0 + q_n)}{\sum p_0(q_0 + q_n)}$$

الوسط البسيط للمناسيب :

التغلب على العيوب في طريقة الوسط البسيط للمناسيب فيمكن أن نستخدم متوسطاً مرجحاً للمناسيب . والوسط المرجح الأكثر شيوعاً في هذا المجال هو الوسط الحسابي المرجح ، على الرغم من أنه يمكن استخدام أوساط مرجحة أخرى مثل الوسط الهندسي المرجح (الفصل الثالث) .

في هذه الطريقة نرجح كل منسوب سعر بالقيمة الإيجابية للسلعة وذلك بدلالة بعض الوحدات النقدية مثل الدولار . وبما أن قيمة السلعة نحصل عليها بضرب السعر p للسلعة في الكمية q ، فإن الأوزان تعطى بالصيغة pq .

وهناك ثلاث صيغ يمكن استخدامها وهذه تعتمد على ما إذا كنا نستخدم قيم سنة الأساس ، أو سنة القارنة أو سنة نموذجية ، ويظهر عن ذلك بالرموز $p_0 q_0$ و $p_n q_n$ و $p_i q_i$ على الترتيب .

الوسط الحسابي المرجح لمناسيب الأسعار باستخدام قيم سنة الأساس كأوزان .

$$(١١) \quad = \frac{\sum (p_n/p_0)(p_0 q_0)}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum p_n q_0}{\sum p_0 q_0}$$

الوسط الحسابي المرجح لمناسيب الأسعار باستخدام قيم سنة المقارنة كأوزان

$$(١٢) \quad = \frac{\sum (p_n/p_n)(p_n q_n)}{\sum p_n q_n}$$

الوسط الحسابي المرجح لمناسيب الأسعار باستخدام قيم سنة نموذجية كأوزان

$$= \frac{\sum (p_n/p_n)(p_i q_i)}{\sum p_i q_i}$$

لاحظ أن المعادلة (١١) تعطى نفس نتيجة صيغة لاسبيرز المعروفة بالمعادلة (٦) .

الأرقام القياسية للكمية أو الحجم :

الصيغة الموضحة أعلاه التي تعرف الأرقام القياسية للأسعار يمكن بسهولة تمثيلها الحصول على الأرقام القياسية للكمية أو الحجم ، ذلك ببساطة بإبدال p و q . على سبيل المثال ، إبدال p بدلا من q في (٥) ينتج

$$(١٤) \quad \frac{\sum q_n/q_0}{N} = \text{الوسط الحسابي البسيط لرقم القياس لمناسيب الكميات}$$

حيث $\sum q_n/q_0$ = مجموع مناسيب كميات جميع السلع

N = عدد مناسيب أسعار السلع المستخلصة

وبالمثل ، الصيغ (٦) و (٧) تصبح

، مثل الوسط
على سبيل المثال

(٥)

يفضل العيب الأول

يستخدم غالبا كمية
عدد من السنوات
كميات سنة الأساس

(٦)

(٧)

(٨)

ل الترتيب

(٩)

ين (٦) و (٧)
امل ، وهذا مما يعطيه

$$(١٥) \quad \frac{\sum q_n p_0}{\sum q_0 p_0} = \text{الرقم القياسي التجيبي المرجح باستخدام أسعار سنة الأساس كأوزان}$$

وهذا يسمى أحياناً برقم لاسبيرز القياسي للكميات

$$(١٦) \quad \frac{\sum q_n p_n}{\sum q_0 p_n} = \text{الرقم القياسي التجيبي المرجح باستخدام أسعار سنة المقارنة كأوزان}$$

وهذا يسمى أحياناً برقم باش القياسي للكميات .

في هذه الصيغ الأوزان المستخدمة هي الأسعار . وعلى أية حال ، فإنه يمكن استخدام أى أوزان أخرى ملائمة بدلا من الأسعار الصيغ من (٨) إلى (١٣) يمكن كذلك تعديلها بنفس الأسلوب .

الأرقام القياسية للقيم :

كما حصلنا بالضغط على صيغ الأرقام القياسية للأسعار والقيم ، فإنه يمكن أن نحصل على صيغ للأرقام القياسية للقيم . وأبسط هذه الأرقام هو

$$(١٧) \quad \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_0} = \text{الرقم القياسي للقيمة}$$

حيث $\sum p_0 q_0$ = القيمة الإجمالية لجميع السلع في فترة الأساس

$\sum p_n q_n$ = القيمة الإجمالية لجميع السلع في فترة المقارنة .

وهذا رقم قياسي تجريبي بسيط ، حيث أن القيم لم ترجع . ويمكن صياغة صيغ أخرى حيث نستخدم الأوزان الدلالة على الأهمية النسبية للعناصر

تغير فترة الأساس للأرقام القياسية :

من الناحية العملية من المستحب أن تكون فترة الأساس المستخدمة للمقارنة هي فترة ثبات اقتصادي وليست على مسافة زمنية بعيدة في الماضي . هذا قد يكون ضرورياً من فترة إلى أخرى تغيير فترة الأساس

أحد الحلول هو إعادة حساب جميع الأرقام القياسية باستخدام فترة الأساس الجديدة كطريقة تقريبية مبسطة نقوم بقسمة جميع الأرقام القياسية للسنوات المختلفة المقابلة لفترة الأساس القديمة على الرقم القياسي

المقابل لفترة الأساس الجديدة ، والتعبير عن النتيجة كنسبة مئوية . هذه النتائج تمثل الأرقام القياسية الجديدة . والرقم القياسي لفترة الأساس الجديدة يصبح 100 % كما يجب أن يكون .

ومن الناحية الرياضية ، فإن هذه الطريقة قابلة للتطبيق فقط في حالة ما إذا كانت الأرقام القياسية تحقق اختبار الدائرية (انظر المسألة ١٧ - ٢٧) . وعلى أية حال ، فإنه من حسن الحظ أن كثيراً من أنواع الأرقام القياسية تعطى أساليباً نتائج لها من الناحية العملية قريبة بدرجة كافية مما يجب أن نحصل عليه من الناحية النظرية .

الانكماش في السلاسل الزمنية :

على الرغم من أن دخول الأفراد قد ترتفع من الناحية النظرية خلال فترة من السنوات ، إلا أن دخولهم الحقيقية قد تنخفض من الناحية الفعلية وذلك نظراً لارتفاع تكلفة المعيشة وبالتالي انخفاض القوة الشرائية . ونحصل على الدخول الحقيقية وذلك بقسمة الدخول المادية أو الظاهرة للسنوات المختلفة على الرقم القياسي لتكلفة المعيشة أو الأرقام القياسية للمستهلك للسنوات ، باستخدام فترة أساس ملائمة .

على سبيل ، إذا كان دخول الفرد 1960 هو 150% من دخله 1950 (أى زاد بنسبة 50%) بينا الرقم القياسى لتكلفة المعيشة تضاعف فى خلال نفس الفترة ، فإن دخل الفرد الحقيق سنة 1960 هو $75\% = 150 / 2$ ، ما كان عليه 1950 .

شرحنا سالفاً عملية « إنقاص » السلسلة الزمنية المتضمنة دخولا . ويمكن استخدام عمليات مماثلة لإنقاص السلاسل الزمنية الأخرى . فى الفصل السادس عشر ، على سبيل المثال ، استخدمنا أسلوباً مشابهاً فى تخلص البيانات من أثر الموسم باستخدام الدليل الموسمى .

ومن الناحية الرياضية ، فإن هذه الطريقة المستخدمة فى تخلص السلسلة الزمنية من أثر الانكماش تكون قابلة للتطبيق بالضبط فقط إذا كانت الأرقام القياسية تحقق اختبار الانعكاس فى المعامل ، ولهذا السبب فإن رقم فيشر المثال يعد مناسباً ، وعلى أية حال فإنه يمكن استخدام أرقام قياسية أخرى ما أنها تعطى نتائج تعد صحيحة لأغلب الأغراض العملية .

مسائل محلولة

مناسيب الأسعار :

١٧ - ١ متوسط أسعار التجزئة بالدولار للطن من القمح البتيومونى المباع فى بلد معين خلال السنوات 1958 — 1953 موضح بالجدول ١٧ - ١ (أ) باستخدام 1953 كأساس ، أوجد مناسيب الأسعار المقابلة للسنوات 1956 و 1958 .
(ب) باستخدام 1956 كأساس ، أوجد منسوب السعر المقابل لجميع السنوات المعطاة (ت) باستخدام 1955 — 1953 كأساس ، أوجه منسوب السعر لجميع السنوات المعطاة .

السنة	1953	1954	1955	1956	1957	1958
متوسط سعر التجزئة للقمح البتيومونى (بالدولارات للطن)	14.95	14.94	15.10	15.65	16.28	16.53

الحل :

(أ) منسوب السعر لسنة 1956 باستخدام سنة 1953 كأساس

$$104.7\% \quad 1.047 = \frac{15.65}{14.95} = \frac{\text{السعر فى 1956}}{\text{السعر فى 1953}} = P_{1953|1956}$$

منسوب السعر لسنة 1958 باستخدام سنة 1953 كأساس

$$110.6\% \quad 1.106 = \frac{16.53}{14.95} = \frac{\text{السعر فى 1958}}{\text{السعر فى 1953}} = P_{1953|1958}$$

فى الدراسات الإحصائية من المعتاد حذف علامة % عند ذكر الأرقام القياسية ، على أساس أن هذه العلامات مفهومة . بهذا التسهيل فإن المناسيب السابقة تكتب 104.7 و 110.6 على الترتيب .

(ب) بقسمة كل من أسعار التجزئة بالجدول ١٧ - ١ على 15.65 (دولار) ، السعر لسنة 1956 . فإن مناسيب الأسعار معبراً عنها بنسب مئوية هى كما هو موضح بالجدول ١٧ - ٢ .

جدول ١٧ - ٢

السنة	1953	1954	1955	1956	1957	1958
منسوب السعر (1956 = 100)	95.5	95.5	96.5	100.0	104.0	105.6

وهذه تمثل الأرقام القياسية لأسعار التجزئة للفحم البتوموني في السنوات 1953 — 1958 وتسمى المجموعة كلها بسلسلة الأرقام القياسية . لاحظ أن منسوب السعر (أو الرقم القياسي للسعر) المقابل لسنة 1956 في صيغة نسبة مئوية يساوي 100.0 كما هو دائماً صحيح لفترة الأساس . وهذه يعبر عنها في الدراسات الإحصائية بالرمز $1956 = 100$.

$$(ج) \text{ الوسط الحسابي لأسعار السنوات } 1956 = 1000 = \frac{\$14.95 + \$14.94 + \$15.10}{3} = \$15.00$$

بقسمة كل من أسعار التجزئة بالجدول ١٧ - ١ على متوسط سعر فترة الأساس وهو \$ 15.00 فإن مناسيب الأسعار المطلوبة معبراً عنها كنسبة مئوية موضحة بالجدول ١٧ - ٣ .

جدول ١٧ - ٣

السنة	1953	1954	1955	1956	1957	1958
منسوب السعر 1953 = 100	99.7	99.6	100.7	104.3	108.5	110.2

وهذه تمثل الأرقام القياسية لأسعار التجزئة للفحم البتوموني السنوات 1953 — 1958 باستخدام 1953 — 1955 كفترة أساس . لاحظ أن الوسط الحسابي للأرقام القياسية المقابل لفترة الأساس 1953 - 1955 هو $100.0 = \frac{99.7 + 99.6 + 100.7}{3}$ ، كما هو صحيح دائماً بالنسبة لفترة الأساس . وهذه يرمز لها في الدراسات الإحصائية بالصيغة $1953 - 1955 = 100$.

$$١٧ - ٢ \text{ أثبت أن (أ) } p_{aib} p_{bic} = p_{aie} \quad (ب) \quad p_{aib} p_{bia} = 1$$

الحل :

$$(أ) \text{ بالتعريف } p_{aib} p_{bic} = \frac{p_b}{p_a} \cdot \frac{p_c}{p_b} = \frac{p_c}{p_a} = p_{aie}$$

$$(ب) \text{ بالتعريف } p_{aib} p_{bia} = \frac{p_b}{p_a} \cdot \frac{p_a}{p_b} = 1$$

١٧ - ٣ باستخدام الجدول ١٧ - ٣ بالمسألة ١٧ - ١ (ج) حيث 1953 — 1955 أساس ، أوجد مناسيب الأسعار بأخذ 1956 كأساس .

الحل :

اقسم كل منسوب سعر بالجدول ١٧ - ٣ على منسوب السعر 104.3 المقابل لسنة 1956 . الأرقام الناتجة معبراً عنها كنسب مئوية هي مناسيب السعر المطلوبة وهي معطاة ، بها بعض من أخطاء التقريب ، بالجدول ١٧ - ٢ بالمسألة ١٧ - ٢ (ب) .

هذا المثال يوضح أنه إذا كان لدينا سلسلة من الأرقام القياسية مقابلة لفترة أساس معينة ، فإنه يمكن أن نحصل على سلسلة من الأرقام القياسية المقابلة لفترة أساس أخرى بدون استخدام بيانات الأسعار الأصلية . وهذه العملية تسمى بتغيير فترة الأساس . لإثبات الطريقة المستخدمة هنا (أنظر المسألة ١٧ - ٣٦)

١٧ - ٤ في 1956 كان متوسط سعر سلعة أكبر بنسبة 20% منه عن 1955 وأقل بنسبة 20% عن 1954 وأكبر بنسبة 50% عن 1957 اختصر البيانات إلى مناسيب أسعار مستخدماً كمنة أساس (أ) 1955 ، (ب) 1956 ، (ج) 1955 — 1954

الحل :

(أ) بأخذ 1955 أساس ، فإن منسوب السعر (أو الرقم القياسي) المقابل لها هو 100 (بالرموز $100 = 1955$ أو 100%) .

بما أن السعر سنة 1956 هو 20% أكبر من 1955 فإن منسوب السعر المقابل لسنة 1956 هو $100 + 20 = 120$ أى ، السعر سنة 1956 هو 120% من السعر سنة 1955

بما أن السعر سنة 1956 هو 20% أقل من 1954 فيجب أن يكون $80\% = 100 - 20$ من سعر 1954 بهذا فإن سعر 1954 هو $125\% = 5/4 = 1/0.80$ من السعر 1956 ، أى ، منسوب سعر 1954 يساوى 125% من منسوب سعر 1956 أى 125% من 120 يساوى 150

بما أن السعر سنة 1956 هو 50% أكبر من 1957 ، فيجب أن يكون $150\% = 100 + 50$ من سعر 1957 بهذا فإن سعر 1957 هو $2/3 = 1/1.50$ من سعر 1956 ، أى منسوب سعر 1957 من منسوب سعر 1956 أى $2/3$ من 120 يساوى 80 .

بهذا فإن مناسيب الأسعار المطلوبة هي كما في الجدول ١٧ - ٤ .

جدول ١٧ - ٤

سنة	1954	1955	1956	1957
منسوب السعر (1955 = 100)	150	100	120	80

(ب) باستخدام طريقة تغير فترة الأساس المعطاة بالمسألة ١٧ - ٣ . نقسم كل منسوب سعر بالجدول ١٧ - ٤ على 120 (منسوب السعر المقابل لسنة الأساس الجديدة 1956) ونعبر عن النتيجة كنسبة مئوية . بهذا فإن مناسيب السعر المطلوبة باستخدام سنة الأساس 1956 هي كما هو موضح بالجدول ١٧ - ٥ .

جدول ١٧ - ٥

سنة	1954	1955	1956	1957
منسوب السعر (1956 = 100)	125	83.3	100	66.7

ويمكن الحل مباشرة باستخدام الأسلوب المستخدم بالجزء (أ) ، باختيار $100 = 1956$.

(ج) الطريقة الأولى : ، باستخدام الجزء (أ)

من الجدول ١٧ - ٤ ، الوسط الحسابي لمناسيب الأسعار لسنة 1954 وسنة 1955 وهو $125 = (150 + 100) / 2$ إذن بقسمة كل منسوب سعر بالجدول ١٧ - ٤ على 125 ، نحصل على مناسيب الأسعار المطلوبة كما هي موضحة بالجدول ١٧ - ٦ .

بما أنها كلها بمللة
يساوى 100.0

فإن مناسيب

1953 — 1954

لها في الدراسات

ب الأسعار بأخذ

رقم الناتجة معبراً
١٧ - ٢ بالمسألة

كن أن نحصل على
لية تسمى بتغيير

جدول ١٧ - ٦

السنة	1954	1955	1956	1957
منسوب السعر (1954-1955=100)	120	80	96	64

الطريقة الثانية : ، باستخدام الجزء (ب)

من الجدول ١٧-٤ ، الوسط الحسابي لمناشير الأسعار لسنة 1954 وسنة 1955 هو $\frac{1}{2}(125+83.3)=104.2$ إذن بقسمة كل منسوب سعر بالجدول ١٧ - ٤ على 104.2 ، نحصل على نفس نتائج الطريقة الأولى .

مناشير الكمية أو الحجم :

١٧ - ٥ الجدول ١٧ - ٧ يوضح بيانات إنتاج القمح ، في أحد البلاد ، عمليتين اللترات للسنوات 1950 - 1958 اختصر البيانات إلى مناسير كيات مستخدماً كأساس (أ) 1955 (ب) 1953 - 1950

جدول ١٧ - ٧

السنة	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
إنتاج القمح (عمليتين اللترات)	1019	988	1306	1173	984	935	1004	951	1462

الحل :

(أ) بقسمة أرقام الإنتاج في كل سنة على 935 (رقم الإنتاج في سنة الأساس) ، فإن مناسير الكمية المطلوبة (أو الأرقام القياسية للكميات) للسنوات المختلفة معبراً عنها كنسب مئوية موضحة بالجدول ١٧ - ٨

جدول ١٧ - ٨

السنة	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
منسوب الكمية (1955=100)	109.0	105.7	139.7	125.5	105.2	100.0	107.4	101.7	156.4

(ب) الوسط الحسابي للإنتاج السنوات 1950 - 1953 هو (٤٠)

بقسمة رقم الإنتاج في كل سنة على 1122 ، فإن مناسير الكمية المطلوبة معبراً عنها كنسب مئوية هي كما هو موضح بالجدول ١٧ - ٩

جدول ١٧ - ٩

السنة	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
منسوب الكمية (1950 - 1953=100)	90.8	88.1	116.4	104.5	87.7	83.3	89.5	84.8	130.3

١٧ - ٩ إذا كان منسوب الكمية لسنة 1958 باستخدام سنة 1949 كأساس هو 105 ، بينما منسوب الكمية لسنة 1958 باستخدام 1953 كأساس هو 140 ، أوجد منسوب الكمية لسنة 1953 مستخدماً 1949 كأساس .

الحل :

الطريقة الأولى :

من خصائص مناسيب الكية فإن

$$q_{aib} q_{bic} = q_{aiv}$$

$$\text{إذن } a = 1949, b = 1953, c = 1958 \text{ اعتبر}$$

$$q_{1949/1953} = q_{1949/1958} q_{1958/1953} = (1.05)(1/1.40) = 0.75 = 75\%$$

ومنسوب الكية المطلوب هو 75

الطريقة الثانية :

اعتبر q_{1949} نمبر عن الكيات الفعلية لسنة 1949 ، q_{1953} لسنة 1953 و q_{1958} لسنة 1958 إذن

$$\frac{q_{1958}}{q_{1949}} = 105\% = 1.05 \quad \text{منسوب الكية لسنة 1958 باستخدام سنة 1949 كأساس}$$

$$\frac{q_{1958}}{q_{1953}} = 140\% = 1.40 \quad \text{منسوب الكية لسنة 1958 باستخدام سنة 1953 كأساس}$$

بهذا فإن منسوب الكية لسنة 1953 حيث 1949 هي سنة الأساس يكون

$$\frac{q_{1953}}{q_{1949}} = \frac{q_{1953}/q_{1958}}{q_{1949}/q_{1958}} = \frac{1/1.40}{1/1.05} = \frac{1.05}{1.40} = 75\%$$

الطريقة الثالثة :

$$\text{بما أن } 1.40q_{1953} = 1.05q_{1949} \quad \text{و } q_{1958} = 1.05q_{1949} \quad \text{و } q_{1958} = 1.40q_{1953} \quad \text{إذن } \frac{q_{1953}}{q_{1949}} = \frac{1.05}{1.40} = 75\% \quad \text{هذا فإن منسوب الكية هو 75}$$

مناسيب القيمة :

١٧ - ٧ في يناير 1960 كان مجموع قائمة الأجور بمصنع به 120 عاملا ذو \$ 40 000 . في يوليو من نفس العام أضيف 30 عاملا إلى قائمة الأجور ودفع المصنع \$ 6000 أكثر مما دفع في يناير . باستخدام يناير 1960 كأساس . أوجد (أ) الرقم القياسي للعمالة (منسوب الكية) لشهر يوليو ، (ب) الرقم القياسي لتكلفة العمالة (منسوب قيمة) لشهر يوليو (ج) باستخدام النتيجة منسوب السعر \times منسوب الكية = منسوب القيمة ، ماهو التفسير الممكن إعطاءه لمنسوب السعر في هذه المسألة ؟

الحل :

$$(أ) \text{ منسوب الكية } = \text{الرقم القياسي للعمالة} = \frac{120 + 30}{120} = 1.25 = 125\% \text{ or } 125$$

$$(ب) \text{ منسوب القيمة } = \text{الرقم القياسي لتكلفة العمالة} = \frac{\$40\,000 + \$6000}{\$40\,000} = 1.15 = 115\% \text{ or } 115$$

$$(ج) \text{ منسوب السعر} = \frac{\text{منسوب القيمة}}{\text{منسوب الكية}} = \frac{115}{125} = 0.92 = 92\% \text{ or } 92$$

$$\frac{1}{2}(125 + 83)$$

ولي

$$1950 - 19$$

القسم
القرارات

ملوكة (أو الأرقام

الكية
(1955 =

نوية هي كما هو

الكية
(1950 -

الكية لسنة 1958

يمكن تفسير هذا كرقم قياسي لتكلفة العامل . هذا يوضح أنه في يوليو 1960 كانت التكلفة للعامل 92% في فترة الأساس يناير 1960 . ويسمى هذا أحياناً بالرقم القياسي لتكلفة العمل .

١٧ - ٨ شركة تتوقع أن تزيد مبيعاتها من سلعة بنسبة 50% في السنة القادمة . ماهي النسبة المئوية التي يجب أن يزداد بها سعر البيع حتى يضاعف الدخل الإجمالي ؟

الحل :

$$\text{منسوب السعر} \times \text{منسوب الكمية} = \text{منسوب القيمة}$$

$$\text{أو} \quad \text{منسوب السعر} \times 150\% = 200\%$$

$$\text{إذن منسوب السعر} = \frac{200}{150} = 133\frac{1}{3}\% \quad \text{بحيث يجب أن تزيد سعر البيع بنسبة } 33\frac{1}{3}\% - 100 = 33\frac{1}{3}\%$$

سلسلة المناسيب ووصلة المناسيب :

١٧ - ٩ وصلة المناسيب لأسعار السنوات 1956 - 1960 هي 175 ، 120 ، 135 ، 150 ، 125 على الترتيب (أ) أوجد منسوب السعر لسنة 1957 حيث 1955 سنة الأساس (ب) سلسل وصلة المناسيب إلى 1956 كأساس

الحل :

$$P_{1955:1956} = 1.25, \quad P_{1956:1957} = 1.20, \quad P_{1957:1958} = 1.35, \quad P_{1958:1959} = 1.50, \quad P_{1959:1960} = 1.75$$

$$P_{1955:1957} = P_{1955:1956} P_{1956:1957} = (1.25)(1.20) = 1.50 = 150\% \quad (أ)$$

$$P_{1956:1955} = \frac{1}{P_{1955:1956}} = \frac{1}{1.25} = 80\% \quad (ب)$$

$$P_{1956:1956} = 100\% \quad P_{1956:1957} = 120\%$$

$$P_{1956:1958} = P_{1956:1957} P_{1957:1958} = (1.20)(1.35) = 1.62 = 162\%$$

$$P_{1956:1959} = P_{1956:1957} P_{1957:1958} P_{1958:1959} = (1.20)(1.35)(1.50) = 2.43 = 243\%$$

$$P_{1956:1960} = P_{1956:1957} P_{1957:1958} P_{1958:1959} P_{1959:1960} = (1.20)(1.35)(1.50)(1.75) = 4.25 = 425\%$$

الأرقام القياسية . الطريقة التجميعية البسيطة :

١٧ - ١٠ الجدول ١٧ - ١٠ يوضح متوسط أسعار الجملة في بلد والانتاج من الألبان ، والزبد والجبن السنوات 1958 .

1950 ، 1949 . احسب رقم قياسي تجميعي بسيط للأسعار الجملة لمنتجات هذه الألبان لسنة 1958 مستخدماً كأساس

(أ) 1949 (ب) 1950 - 1949

جدول ١٧ - ١٠

الكميات المنتجة

(ملايين الكيلوجرامات)

1949	1950	1958
9675	9717	10436
117.7	115.5	115.5
77.93	74.39	82.70

الأسعار (لكل كيلوجرام)

1949	1950	1958	
3.95	3.89	4.13	لبن
61.5	62.2	59.7	زبد
34.8	35.4	38.0	جبن

الحل :

(أ) الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار $\frac{\sum p_n}{\sum p_0}$ مجموع أسعار سنة المقارنة (1958)
مجموع أسعار سنة الأساس (1949)

$$= \frac{4.13 + 59.7 + 38.9}{3.95 + 61.5 + 34.8} = 102.5(\%)$$

أي أن متوسط أسعار الجملة في 1958 هي 102.5% من تلك في 1949 أو (2.5% أعلى) .

(ب) متوسط (وسط حسابي) أسعار اللبن في فترة الأساس 1949 - 1950 $\frac{1}{2}(3.95 + 3.89) = 3.92$
متوسط (وسط حسابي) أسعار الزبد في فترة الأساس 1949 - 1950 $\frac{1}{2}(61.5 + 62.2) = 61.85$
متوسط (وسط حسابي) أسعار الجبن في فترة الأساس 1949 - 1950 $\frac{1}{2}(34.8 + 35.4) = 35.1$

الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار $\frac{\sum p_n}{\sum p_0}$ مجموع أسعار سنة المقارنة (1958)
مجموع أسعار سنة الأساس (1949 - 1950)

$$= \frac{4.13 + 59.7 + 38.9}{3.92 + 61.85 + 35.1} = 101.8(\%)$$

لاحظ أن هذه الطريقة لم تستخدم الكميات المنتجة ولكن استخدمت فقط أسعار السلع .
لهذا الإيضاح ، استخدمنا فقط ثلاث سلع لحساب الرقم القياسي . في التطبيق الفعل يجب أن ندخل عددا أكبر من السلع .

١٧ وضع السبب في أن الأرقام القياسية التي حصلت عليها في المسألة ١٧ - ١٠ قد تكون مقاييس غير ملائمة للتغيير في السعر للسلع المذكورة .

الحل :

الرقم القياسي المحسوب بالمسألة ١٧ - ١٠ لم يؤخذ في الاعتبار الأهمية النسبية للسلع كما يجب تحديدها ، على سبيل المثال ، من مدى استخدامها بواسطة المستهلك أو كمية الإنتاج المخصصة لأهداف الاستهلاك . هذه الاعتبارات سوف تراعى في المسائل التالية .

١١ الجدول ١٧-١١ يوضح متوسط أسعار التجزئة والانتاج من فحم الأنتراسيت والبترول خلال السنوات 1949 و 1958 . وضع السبب في أن رقفاً قياسياً تجميعياً بسيطاً للأسعار لسنة 1958 مستخدماً سنة 1949 كأساس يمد مقاييساً غير ملائمة لتغيرات الأسعار في السلع المعطاة .

جدول ١٧ - ١١

	الكميات		الأسعار	
	1949	1958	1949	1958
فحم الأنتراسيت	3.559	1.821	\$20.13	\$28.20
	مليون طن	مليون طن	الطن	الطن
البترول	80.2	118.6	20.3c	21.4c
	مليون برميل	مليون برميل	لكل لتر	لكل لتر

• كل برميل يحتوي على 159 لتر

ملفة العامل 92%

أن يزداد بها سعر

$$133\frac{1}{3} - 100 =$$

12 على الترتيب
1956 كأساس

1949 - 1958

السنوات 1958 ،
19 مستخدماً كأساس

1949

9675
117.7
77.93

الحل :

إذا استخدمنا الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار فإن النتيجة هي

$$139.7 (\%) = \frac{\sum p_{1958}}{\sum p_{1949}} = \frac{\text{مجموع الأسعار في سنة المقارنة 1958}}{\text{مجموع الأسعار في سنة الأساس 1949}} = \frac{\$28.20 + \$0.214}{\$20.13 + \$0.203}$$

مشيراً إلى أن متوسط أسعار التجزئة لهذه السلع في 1958 أكثر ارتفاعاً بنسبة % 39.7 عنها في سنة 1949 .
إذا عبرنا عن سعر فحم الانتراسيت بدلالة سنتات لكل kg بدلا من دولارات لكل طن ، فإن السعر في 1949 هو $\$20.13(1000 \text{ kg}) = \$2.013c/kg$ بينما السعر في 1958 هو $\$28.20(1000 \text{ kg}) = 2.820c/kg$ في هذه الحالة فإن الرقم القياسي التجميعي البسيط هو

$$\frac{\sum p_{1958}}{\sum p_{1949}} = \frac{2.820c + 21.4c}{2.013c + 20.3c} = 108.5 (\%)$$

موضحاً إلى أن متوسط أسعار التجزئة لهذه السلع في 1958 أكثر ارتفاعاً بنسبة % 8.5 عنها في سنة 1949 .
وبما أن الرقم القياسي التجميعي البسيط شديد التأثير بالوحدات المستخدمة في تمييز الأسعار . فن الواضح أنه مقياس غير ملائم في مثل هذه الحالات . هذا مع إضافة العيب الموضح بالمسألة ١٧ - ١١ يعطى أسباباً جيدة في عدم استخدام هذا الرقم في التطبيق .

الملاحظة التي أبديت في نهاية المسألة ١٧ - ١٠ تنطبق كذلك على هذه المسألة

الوسط المرجح للمناسيب :

١٧ - ١٢ استخدم طريقة الوسط البسيط للمناسيب (الوسط الحسابي) لحساب الرقم القياسي لأسعار الجملة لمنتجات الألبان بالمسألة ١٧ - ١٠ لسنة 1958 مستخدماً (أ) 1949 (ب) 1950 - 1949 كأساس

الحل :

(أ) مناسيب السعر لكل من اللبن ، الزبد والجبن في 1958 باستخدام سنة 1949 كأساس هي مايل

$$\text{منسوب سعر اللبن} = \frac{\text{سعر اللبن في 1958}}{\text{سعر اللبن في 1949}} = \frac{4.13}{3.95} = 104.6 (\%)$$

$$\text{منسوب سعر الزبد} = \frac{\text{سعر الزبد في 1958}}{\text{سعر الزبد في 1949}} = \frac{59.7}{61.5} = 97.1 (\%)$$

$$\text{منسوب سعر الجبن} = \frac{\text{سعر الجبن في 1958}}{\text{سعر الجبن في 1949}} = \frac{38.9}{34.8} = 111.8 (\%)$$

$$\frac{\sum P_{1958}}{N} = \frac{104.6 + 97.1 + 111.8}{3} = 104.5 (\%) \quad \text{متوسط (الوسط الحسابي) لمناسيب الأسعار}$$

(ب) بالرجوع إلى المسألة ١٧ - ١٠ (ب) ، مناسيب السعر في 1958 باستخدام 1950 - 1949 كأساس هي

$$\text{منسوب سعر اللبن} = \frac{\text{سعر اللبن في 1958}}{\text{سعر اللبن في 1949 - 50}} = \frac{4.13}{3.92} = 105.4 (\%)$$

$$\text{منسوب سعر الزيت} = \frac{\text{سعر الزيت في 1958}}{\text{سعر الزيت في 1949 - 50}} = \frac{59.7}{61.85} = 96.5(\%)$$

$$\text{منسوب سعر الجبن} = \frac{\text{سعر الجبن في 1958}}{\text{سعر الجبن في 1949 - 50}} = \frac{38.9}{35.1} = 110.8(\%)$$

$$\text{متوسط (الوسط الحسابي) لمناصب الأسعار} = 104.2(\%) = \frac{\sum p_i/p_0}{N} = \frac{105.4 + 96.5 + 110.8}{3}$$

١٧ - ١٤ حل المسألة ١٧ - ١٣ إذا استخدم الوسيط بدلا من الوسط الحسابي .

الحل :

$$(أ) \text{ الرقم القياسي المطلوب } = \text{وسيط مناسيب السعر } 111.8 , 97.1 , 104.6 \text{ ويساوي } 104.6$$

$$(ب) \text{ للرقم القياسي المطلوب } = \text{وسيط مناسيب السعر } 110.8 , 96.5 , 105.4 \text{ ويساوي } 105.4$$

١٧ - ١٥ حل المسألة ١٧ - ١٣ إذا استخدم الوسط الهندسي بدلا من الوسط الحسابي .

الحل :

$$(أ) \text{ الرقم القياسي المطلوب } = \text{الوسط الهندسي لمناصب السعر } 111.8 , 97.1 , 104.6$$

$$= \sqrt[3]{(104.6)(97.1)(111.8)} = 104.3 \text{ باستخدام اللوغاريتمات}$$

$$(ب) \text{ الرقم القياسي المطلوب } = \text{الوسط الهندسي لمناصب السعر } 110.8 , 96.5 , 105.4$$

$$= \sqrt[3]{(105.4)(96.5)(110.8)} = 104.1 \text{ باستخدام اللوغاريتمات}$$

١٧ - ١٦ استخدم الوسط البسيط (الوسط الحسابي) لمناصب الأسعار للحصول على الرقم القياسي لأسعار التجزئة للسلع الموضحة بالمسألة ١٧ - ١٢ باستخدام 1949 كسنة أساس و 1958 كسنة مقارنة .

الحل :

$$\text{منسوب السعر لفحم} = \frac{\text{سعر الفحم في 1958}}{\text{سعر الفحم في 1949}} = \frac{\$28.20}{\$20.13} = 140.1(\%)$$

$$\text{منسوب السعر لبتترول} = \frac{\text{سعر البترول في 1958}}{\text{سعر البترول في 1949}} = \frac{21.4¢}{20.3¢} = 105.4(\%)$$

$$\text{المتوسط البسيط (الوسط الحسابي) لمناصب الأسعار} = \frac{\sum p_i/p_0}{N} = \frac{140.1 + 105.4}{2} = 122.8$$

لاحظ أن النتيجة لا تعتمد على الوحدات المستخدمة في تمييز الأسعار (قارن بالمسألة ١٧ - ١٢) .

١٧ - ١٧ حل المسألة ١٧ - ١٦ إذا استخدم الوسط الهندسي .

الحل :

$$\text{الرقم القياسي المطلوب} = \text{الوسط الهندسي لمناصب السعر } 140.1 \text{ و } 105.4$$

$$\sqrt{(140.1)(105.4)} = 121.5$$

139.7(°)

سنة 1949

طن ، فإن السعر في
\$28.20 1000kg

سنة 1949

من الواضح أنه
أسباباً جيدة في عدم

جاءت الألبان بالمسألة

مايل

$$\frac{\sum p_i/p_0}{N} = 104.6$$

1949 كأساس هي

105

الطريقة التجميعية . رقم لاسبيرز وباش :

١٧ - ١٨ باستخدام بيانات المسألة ١٧ - ١٠ حسب رقم لاسبيرز القياسي للسنة 1958 باستخدام

(أ) 1949 (ب) 1950 - 1949 كأساس .

الحل :

(أ) رقم لاسبيرز = الرقم القياسي التجميعي المرجع للأسعار باستخدام كيات فترة الأساس كأوزان

$$\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_0} = \frac{\Sigma(\text{الكميات في 1949})(\text{الأسعار في 1959})}{\Sigma(\text{الكميات في 1949})(\text{الأسعار في 1949})}$$

$$= \frac{(4.13)(9675) + (59.7)(117.7) + (38.9)(77.93)}{(3.95)(9675) + (61.5)(117.7) + (34.8)(77.93)} = 103.84, \text{ or } 103.8(\%)$$

(ب) متوسط كيات القطن والذرة والحبوب المنتجة في 1950 - 1949 هي على الترتيب .

$$\frac{1}{2}(9675 + 9717) = 9696, \frac{1}{2}(117.7 + 115.5) = 116.6 \text{ and } \frac{1}{2}(77.93 + 74.39) = 76.16$$

متوسط الأسعار في 1950 - 1949 موضح بالمسألة ١٧ - ١٠

$$\text{رقم لاسبيرز} = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_0} = \frac{\Sigma(\text{متوسط الكميات في 1949 - 50})(\text{الأسعار في 1958})}{\Sigma(\text{متوسط الكميات في 1949 - 50})(\text{الأسعار في 1949 - 50})}$$

$$= \frac{(4.13)(9696) + (59.7)(116.6) + (38.9)(76.16)}{(3.92)(9696) + (61.85)(116.6) + (35.1)(76.16)} = 104.33, \text{ or } 104.3(\%)$$

١٧ - ١٩ باستخدام بيانات المسألة ١٧ - ١٠ حسب رقم باش للأسعار لسنة 1958 باستخدام

(أ) 1949 (ب) 1950 - 1949 كأساس .

الحل :

(أ) رقم باش = الرقم القياسي التجميعي المرجع للأسعار باستخدام كيات سنة المقارنة كأوزان .

$$\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_0} = \frac{\Sigma(\text{الكميات في 1958})(\text{الأسعار في 1958})}{\Sigma(\text{الكميات في 1949})(\text{الأسعار في 1949})}$$

$$= \frac{(4.13)(10436) + (59.7)(115.5) + (38.9)(82.79)}{(3.95)(10436) + (61.5)(115.5) + (34.8)(82.79)} = 103.93, \text{ or } 103.9(\%)$$

$$\text{رقم باش} = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_n} = \frac{\Sigma(\text{الكميات في 1958})(\text{الأسعار في 1958})}{\Sigma(\text{الكميات في 1958})(\text{الأسعار في 1949 - 50})} \quad (\text{ب})$$

$$= \frac{(4.13)(10436) + (59.7)(115.5) + (38.9)(82.79)}{(3.92)(10436) + (61.85)(115.5) + (35.1)(82.79)} = 104.43 \text{ or } 104.4(\%)$$

١٧ - ٢٠ أوجد الأرقام القياسية لكل من (أ) لاسبيرز (ب) باش باستخدام بيانات المسألة ١٧ - ١٢ (ج) أذكر ميزة رقم

لاسبيرز على رقم باش في حالة ما إذا كان الرقم القياسي يراجع من سنة الأخرى

الحل :

$$(أ) \text{ رقم لاسبيرز } = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_0} = \frac{(الكليات في 1949) (الأسعار في 1958)}{(الكليات في 1949) (الأسعار في 1949)}$$

$$\frac{(\$28.20 \text{ لكل طن}) (3.559 \text{ مليون طن}) + (\$0.214 \text{ لكل لتر}) (80.2 \times 159 \text{ مليون لتر})}{(\$20.13 \text{ لكل طن}) (3.559 \text{ مليون طن}) + (\$0.203 \text{ لكل لتر}) (80.2 \times 159 \text{ مليون لتر})}$$

$$= \frac{2829.25 \text{ مليون دولار}}{2660.26 \text{ مليون دولار}} = 106.4 \% \text{ أو } 106.35 \%$$

لاحظ أنه من المهم جداً أن تكون الوحدات المستخلصة صحيحة ومتسقة .

$$(ب) \text{ رقم باش } = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_n} = \frac{(الكليات في 1958) (الأسعار في 1958)}{(الكليات في 1958) (الأسعار في 1949)}$$

$$\frac{(\$28.20 \text{ لكل طن}) (1.821 \text{ مليون طن}) + (\$0.214 \text{ لكل لتر}) (118.6 \times 159 \text{ مليون لتر})}{(\$20.13 \text{ لكل طن}) (1.821 \text{ مليون طن}) + (\$0.203 \text{ لكل لتر}) (118.6 \times 159 \text{ مليون لتر})}$$

$$= \frac{4086.84 \text{ مليون دولار}}{3864.71 \text{ مليون دولار}} = 105.7 \% \text{ أو } 105.747 \%$$

من الناحية العملية ، عندما يحسب الرقم القياسي ، لعدد كبير من السلع ، فإنه يتصح بترتيب الحسابات في صورة جدول ملائم (أنظر المسألة المسألة ١٧ - ٣١ ، على سبيل المثال) .

(ج) في حساب رقم لاسبيرز ، فإن الأوزان (الكليات المنتجة أو المستهلكة في سنة الأساس ، إذا كنا نحسب الرقم القياسي للسعر) لا تتغير من سنة لأخرى أى أننا نحتاج إلى المعلومات الخاصة بآخر الأسعار .

في حساب رقم باش ، فإن آخر المعلومات عن الأوزان (الكليات) وكذلك الأسعار يجب الحصول عليها . بهذا فإن حساب رقم باش يتضمن مجهود أكبر في تجميع البيانات .

١٧-٢١ أعط تفسيراً لكل من (أ) رقم لاسبيرز للأسعار (ب) رقم باش للأسعار ، بدلالة القيمة الإجمالية (أو التكلفة الإجمالية) للسلع .

الحل :

(أ) في حساب رقم لاسبيرز للأسعار ، $\sum p_0 q_0$ تمثل القيمة الإجمالية (أو التكلفة الإجمالية) لمجموعة من البضائع والخدمات أو السلع (تمثل أحياناً سلة السوق) في سنة أو فترة الأساس . الكمية $\sum p_n q_0$ تمثل القيمة الإجمالية لنفس سلة السوق في سنة أو فترة المقارنة . بهذا فإن رقم لاسبيرز للأسعار يفيد في قياس التكلفة الإجمالية في أن سنة مقارنة لنفس المجموعة السلعية المشتراة في سنة الأساس .

(ب) في حساب رقم باش للأسعار ، $\sum p_0 q_n$ تمثل القيمة الإجمالية (أو التكلفة الإجمالية) للسلع المشتراة في سنة المقارنة مقومة بأسعار سنة الأساس ، بينما $\sum p_n q_n$ تمثل القيمة الإجمالية للسلع المشتراة في سنة المقارنة مقومة بسعر سنة المقارنة . بهذا فإن رقم باش للأسعار يفيد في قياس التكلفة الكمية لمجموعة سلعية في سنة المقارنة بالنسبة إلى ما يمكن أن تتكلفه لو تم الشراء في سنة الأساس .

١٧-٢٢ يذكر أحياناً أن رقم لاسبيرز للأسعار يميل إلى المغالاة في تقدير تغيرات السعر بينما رقم باش للأسعار يميل إلى التقليل في تقدير هذه التغيرات بين سبب يمكن لإثبات صحة هذه العبارة .

+ 9675

رقم لاسبيرز

كأوزان

رقم باش

١ (ج) أذكر ميزة رقم

الحل :

طبقاً لقانون الاقتصادى العرض ، فإن الناس تميل إلى التقليل من الشراء إذا ارتفعت الأسعار وإلى زيادة الشراء إذا انخفضت الأسعار . وهذا ما يسمى بمرونة الطلب وهو صحيح إذا كانت الحاجة للسلع ليست ضرورية تماماً .

في حالة رقم لاسيرز ، $\sum p_i q_i$ سيكون إلى حد ما أكبر مما يجب حيث أنه طبقاً لقانون العرض والطلب فإن الأشخاص تميل إلى شراء أقل من السلع التي يترقق سعرها وأكثر من السلع التي ينخفض سعرها بحيث تكون التكلفة الكلية أقل مما هو متوقع من $\sum p_i q_i$ بهذا فإن رقم لاسيرز $\frac{\sum p_i q_i}{\sum p_i q_0}$ يميل إلى أن يكون أقل .

في حالة رقم باش ، فإن الدور الذي تلعبه كليات سنة الأساس وكليات سنة المقارنة في رقم لاسيرز يتم تبادلها . هذا التبادل يميل إلى جعل رقم باش أقل مما يجب أن يكون عليه .

والسبب السابق لا يتضمن أن رقم لاسيرز يكون دائماً أقل من رقم باش ولكن يميل فقط إلى أن يكون أقل . وفي الناحية العملية فإن رقم لاسيرز يمكن أن يكون أكبر من ، أقل من أو يساوى رقم لاسيرز (أنظر المسائل ١٧-١٨ و ١٧-١٩ حيث رقم لاسيرز ، في حقيقته أقل من رقم باش) .

١٧-٢٣ أثبت أن الرقم القياسي التجمي المرجح للأسعار حيث الأوزان (الكليات) ثابتة يحقق اختبار الدائرية

الحل :

اعتبر q_0 تمثل أوزاناً ثابتة ، فإنه لأي فترات c و p و a فإن الأرقام القياسية

$$I_{a10} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \quad \text{and} \quad I_{b10} = \frac{\sum p_0 q_0}{\sum p_0 q_1}$$

إذن

$$I_{a10} I_{b10} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \cdot \frac{\sum p_0 q_0}{\sum p_0 q_1} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} = I_{a10}$$

والذي يوضح تحقق اختبار الدائرية

الرقان القياسيان لكل من لاسيرز وباش لا يحققان اختبار الدائرية .

رقم فيشر المثالي :

١٧-٢٤ أثبت أن رقم فيشر المثالي هو الوسط الهندسي لكل من رقم لاسيرز ورقم باش .

الحل :

اعتبر أن F تعبر عن رقم فيشر و L رقم لاسيرز و P رقم باش ، فإن

$$F = \sqrt{\left(\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}\right) \left(\frac{\sum p_0 q_0}{\sum p_0 q_1}\right)} = \sqrt{LP}$$

باستخدام تعريف L ، P . وبما أن \sqrt{LP} هو الوسط الهندسي لكل من L ، P ، فإننا نحصل على النتيجة المطلوبة .

١٧-٢٥ أثبت أن رقم فيشر المثالي يقع بين رقمي لاسيرز وباش .

الحل :

هذا ينتج مباشرة من حقيقة أن $F = \sqrt{LP}$ تقع بين L ، P ، نظراً لأن L ، P أرقام موجبة . لاحظ أنه إذا كانت $L = P$ إذن $F = L = P$

رقم

-١٧

وبما أنه من المسألة ١٧ - ٢٢ ، L تميل إلى التقليل من تقدير تغيرات السعر بينما P تميل إلى المبالاة في تقديرها ، فإنه ينتج من ذلك أن F ، والتي تقع بين P و L ، سوف تمدنا بتقدير أحسن من L أو P .

١٧ - ٢٦ أوجد رقم فيشر المثالي للأسعار لمنهجات الألبان بالمسألة ١٧ - ١٠ وذلك لسنة 1958 مستخدماً (أ) 1949 (ب) 1950 - 1949 كسنة أساس .

الحل :

$$(أ) F = \sqrt{LP} = \sqrt{(103.84)(103.93)} = 103.9 \text{ من المسائل ١٧ - ١٨ (أ) و ١٧ - ١٩ (ب) .}$$

$$(ب) F = \sqrt{LP} = \sqrt{(104.33)(104.43)} = 104.4 \text{ من المسائل ١٧ - ١٨ (ب) و ١٧ - ١٩ (ب) .}$$

١٧ - ٢٧ أوجد رقم فيشر المثالي للأسعار لبيانات المسألة ١٧ - ١٢

الحل :

$$\text{من المسألة ١٧ - ٢٠ } F = \sqrt{LP} = \sqrt{(106.35)(105.75)} = 106.0$$

لاحظ أن تقريباً جيداً \sqrt{LP} عندما تكون P و L متساويين تقريباً تعطى بالصورة $\frac{1}{2}(L + P)$. هذا الوسط الحسابي لكل من P و L يمكن استخدامه كتعريف لرقم قياسي جديد يقع بين P و L .

١٧ - ٢٨ أثبت أن رقم فيشر المثالي يحقق اختبار الانعكاس في الزمن .

الحل :

اعتبر أن $F_{0|n}$ يرمز إلى رقم فيشر المثالي لسنة المقارنة بالنسبة لسنة أساس ، و $F_{n|0}$ يرمز لرقم فيشر المثالي عندما نضع سنة الأساس بدلاً من سنة المقارنة والعكس. بهذا فإن اختبار الانعكاس في الزمن يتحقق إذا كان $F_{0|n} = 1/F_{n|0}$ أو $F_{0|n} F_{n|0} = 1$.

$$\text{بالتعريف } F_{0|n} = \sqrt{\left(\frac{\sum p_0 q_n}{\sum p_n q_0}\right) \left(\frac{\sum p_n q_0}{\sum p_0 q_n}\right)} \quad \text{إذن} \quad F_{n|0} = \sqrt{\left(\frac{\sum p_n q_0}{\sum p_0 q_n}\right) \left(\frac{\sum p_0 q_n}{\sum p_n q_0}\right)}$$

$$F_{0|n} F_{n|0} = \sqrt{\left(\frac{\sum p_n q_0}{\sum p_0 q_n}\right) \left(\frac{\sum p_0 q_n}{\sum p_n q_0}\right) \left(\frac{\sum p_0 q_n}{\sum p_n q_0}\right) \left(\frac{\sum p_n q_0}{\sum p_0 q_n}\right)} = 1$$

رقم مارشال - أدجورث القياسي :

١٧ - ٢٩ احسب رقم مارشال - أدجورث القياسي للأسعار لبيانات المسألة ١٧ - ١٢

الحل :

$$\text{رقم مارشال - أدجورث} = \frac{\sum p_n(q_0 + q_n)}{\sum p_0(q_0 + q_n)}$$

$$\frac{\Sigma (\text{مجموع الكيات في 1949 و 1958}) (\text{الأسعار في سنة 1958})}{\Sigma (\text{مجموع الكيات في 1949 و 1958}) (\text{الأسعار في سنة 1949})}$$

$$= \frac{(\$28.20) \{ (3.559 + 1.821)(10^6) \} + (\$0.214) \{ (80.2 + 118.6)(159 + 10^6) \}}{(\$20.13) \{ (3.559 + 1.821)(10^6) \} + (\$0.203) \{ (80.2 + 118.6)(159 + 10^6) \}} = \frac{6916.0}{6525.0} = 105.9(\%)$$

لاحظ أن هذا يقع بين رقمي لاسيرز وباش القياسيين (أنظر المسألة ١٧ - ٢٠) لإثبات أن هذا دائماً صحيح ، أنظر

المسألة ١٧ - ٣٠ .

مار وإلى زيادة الشراء
ورية تماماً .

بانون المرض والطلب
سعرها بحيث تكون
كون أعلى .

لاسيرز يتم تبادلها .

نظ إلى أن يكون أعلى .

أنظر المسائل ١٧ - ١٨

مدائرية

، فإننا نحصل على النتيجة

، L أرقام موجبة .

٣٠-١٧ (أ) أثبت أنه إذا كان $\frac{X_1}{X_2} < \frac{Y_1}{Y_2}$ إذن $\frac{X_1}{X_2} < \frac{X_1 + Y_1}{X_2 + Y_2} < \frac{Y_1}{Y_2}$ ، حيث X_1, X_2, Y_1, Y_2 أى رقم موجب .

(ب) استخدم النتيجة في (أ) لإثبات أن الرقم القياسى لمارشال - أديجورث يقع بين رقمى لاسيرز وباش .

الحل :

(أ) إذا كانت $\frac{X_1}{X_2} < \frac{Y_1}{Y_2}$ إذن (١) $X_1 Y_2 < X_2 Y_1$.

بإضافة $X_1 X_2$ إلى الجانبين في (١) ، نحصل على

$$\frac{X_1}{X_2} < \frac{X_1 + Y_1}{X_2 + Y_2} \quad (٢) \quad \text{أو} \quad X_1 X_2 + X_1 Y_2 < X_1 X_2 + X_2 Y_1 \text{ or } X_1(X_2 + Y_2) < X_2(X_1 + Y_1)$$

وذلك بقسمة الطرفين على $X_2(X_2 + Y_2)$.

بإضافة $Y_1 Y_2$ إلى الجانبين في (١) ، نحصل على

$$\frac{X_1 + Y_1}{X_2 + Y_2} < \frac{Y_1}{Y_2} \quad (٣) \quad \text{أو} \quad X_1 Y_2 + Y_1 Y_2 < X_2 Y_1 + Y_1 Y_2 \text{ or } Y_2(X_1 + Y_1) < Y_1(X_2 + Y_2)$$

وذلك بقسمة الطرفين على $Y_1(X_1 + Y_1)$.

من (٢) و (٣) نحصل على النتيجة المطلوبة .

(ب) المسألة ١ : رقم لاسيرز أقل من رقم باش .

اعتبر $X_1 = \sum p_n q_n, X_2 = \sum p_o q_o, Y_1 = \sum p_n q_n, Y_2 = \sum p_o q_o$. إذن $\frac{X_1}{X_2} < \frac{Y_1}{Y_2}$ بهذا وباستخدام (أ)

$$\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_o} < \frac{\sum p_n q_n + \sum p_o q_o}{\sum p_o q_o + \sum p_o q_o} < \frac{\sum p_o q_o}{\sum p_o q_o} \quad \text{أو}$$

$$\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_o} < \frac{\sum p_n (q_o + q_n)}{\sum p_o (q_o + q_n)} < \frac{\sum p_o q_o}{\sum p_o q_o} \quad \text{أو}$$

رقم باش < رقم مارشال - أديجورث < رقم لاسيرز

المسألة ٢ : رقم باش أقل من رقم لاسيرز

اعتبر $X_1 = \sum p_n q_n, X_2 = \sum p_o q_o, Y_1 = \sum p_n q_n, Y_2 = \sum p_o q_o$. إذن $\frac{X_1}{X_2} < \frac{Y_1}{Y_2}$ بهذا وباستخدام (أ)

$$\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_o} < \frac{\sum p_n q_n + \sum p_o q_o}{\sum p_o q_o + \sum p_o q_o} < \frac{\sum p_o q_o}{\sum p_o q_o} \quad \text{أو}$$

$$\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_o} < \frac{\sum p_n (q_o + q_n)}{\sum p_o (q_o + q_n)} < \frac{\sum p_o q_o}{\sum p_o q_o} \quad \text{أو}$$

رقم لاسيرز < رقم مارشال - أديجورث < رقم باش

بهذا نستنتج من الحالة (١) ، (٢) أنه بصرف النظر عما إذا كان رقم لاسيرز أكبر من أو أصغر من رقم باش ، فإن رقم مارشال - أديجورث يقع بينهما .

الوسط المرجح لمناسيب :

١٧-٣١ احسب الوسط الحسابي المرجح لمناسيب الأسعار لبيانات المسألة ١٧ - ١٢ باستخدام (أ) قيم سنة المقارنة ، كأوزان (ب) قيم سنة الأساس كأوزان ، حيث سنة الأساس هي ١٩٤٩ وسنة المقارنة هي ١٩٥٨ .
الحل :

(أ) الوسط الحسابي المرجح لمناسيب الأسعار باستخدام قيم سنة المقارنة كأوزان

$$\frac{\sum (p_n/p_o)(p_n q_n)}{\sum p_n q_n} = \frac{\sum (\text{مناسيب السعر}) (\text{قيم سنة المقارنة})}{\sum \text{قيم سنة المقارنة}}$$

عمليات الحساب المطلوبة يمكن ترتيبها كما في الجدول ١٧ - ١٢ . حيث الدليل n يعبر عن سنة المقارنة ١٩٥٨ والدليل o يعبر عن سنة الأساس ١٩٤٩ ، و p تعبر عن السعر و q عن الكمية .

جدول ١٧ - ١٢

p_n	p_o	q_n	p_n/p_o	$p_n q_n$ ملايين الدولارات	$(p_n/p_o)(p_n q_n)$ ملايين الدولارات
\$20.13	\$28.20	1.821	1.4009	51.352	71.939
(لكل طن)	(لكل طن)	(مليون طن)			
\$0.203	\$0.214	118.6 × 159	1.0542	4035.484	4254.207
(لكل لتر)	(لكل لتر)	(مليون لتر)			
				$\sum p_n q_n$ = 4086.836	$\sum (p_n/p_o)(p_n q_n)$ = 4326.146

$$\frac{\sum (p_n/p_o)(p_n q_n)}{\sum p_n q_n} = \frac{4326.146}{4086.836} = 107.2(\%) = \text{إذن الرقم القياسي المطلوب}$$

(ب) الوسط الحسابي المرجح لمناسيب الأسعار باستخدام قيم سنة الأساس كأوزان هي

$$\frac{\sum (p_n/p_o)(p_o q_o)}{\sum p_o q_o} = \frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o}$$

رقم لاسيرز بالمسألة ١٧ - ٢٠ (أ) = 106.4(%) ويمكن كذلك
الخسر باستخدام جدول كما في الجزء (أ)

الأرقام القياسية للكمية او الحجم :

١٧-٢٢ استخدم بيانات المسألة ١٧-١٢ لحساب الرقم القياسي للحجم لسنة ١٩٥٨ حيث سنة ١٩٤٩ هي سنة الأساس باستخدام
(أ) وسطاً حسابياً بسيطاً لمناسيب الحجم (ب) رقماً قياسياً تجميعياً مرجحاً للحجم باستخدام أسعار سنة الأساس كأوزان
(ج) رقماً قياسياً تجميعياً مرجحاً للحجم باستخدام أسعار سنة المقارنة كأوزان .
الحل :

(أ) الوسط الحسابي البسيط لمناسيب الحجم

$$\frac{\sum q_n q_o}{N} = \frac{1.821/3.559 + 118.6/80.2}{2} = \frac{51.17(\%) + 147.88(\%)}{2} = 99.5(\%)$$

(ب) رقم قياسي تجميعي مرجح للحجم باستخدام أسعار سنة الأساس كأوزان

$$\frac{\sum p_n p_o}{\sum p_o p_o} = \frac{\sum (\text{الكميات في 1949}) (\text{الكميات في 1958})}{\sum (\text{الكميات في 1949}) (\text{الكميات في 1949})}$$

$$= \frac{(1.821 \text{ مليون طن}) (\$ 20.13 \text{ لكل طن}) + (159 \times 118.6 \text{ مليون لتر}) (\$ 0.203 \text{ لكل لتر})}{(3.559 \text{ مليون طن}) (\$ 20.13 \text{ لكل طن}) + (159 \times 80.2 \text{ مليون لتر}) (\$ 0.203 \text{ لكل لتر})}$$

Y_1, Y_2, X_1

وبما أن .

$$\frac{X_1}{X_2} < \frac{X_1 + Y_1}{X_2 + Y_2}$$

$$\frac{X_1}{X_2} + \frac{Y_1}{Y_2} < 1$$

$$\text{هذا} \quad \frac{X_1}{X_2} < \frac{Y_1}{Y_2}$$

$$\text{هذا} \quad \frac{X_1}{X_2} < \frac{Y_1}{Y_2}$$

من أو أصغر من رقم

$$\frac{3853.73 \text{ مليون دولار}}{2660.26 \text{ مليون دولار}} = 144.86, \text{ أو } 144.9 (\%)$$

وهذه تسمى أحياناً رقم لاسبيرز القياسي للكميات أو الحجم .

(ج) رقم قياسي تجريبي مرجع الحجم باستخدام أسعار سنة المقارنة كأوزان

$$\begin{aligned} \frac{\sum q_n p_n}{\sum q_0 p_n} &= \frac{\Sigma(\text{الكميات في 1958})}{\Sigma(\text{الكميات في 1949})} \\ &= \frac{(1.821 \text{ مليون طن}) (28.20 \$ \text{ لكل طن}) + (159 \times 118.6 \text{ مليون لتر}) (0.214 \$ \text{ لكل لتر})}{(3.559 \text{ مليون طن}) (28.20 \$ \text{ لكل طن}) + (159 \times 80.2 \text{ مليون لتر}) (0.214 \$ \text{ لكل لتر})} \\ &= \frac{4086.84 \text{ مليون دولار}}{2829.25 \text{ مليون دولار}} = 144.45, \text{ أو } 144.4 (\%) \end{aligned}$$

وهذه تسمى أحياناً رقم باش القياسي للكميات أو الحجم .

٣٣-١٧ من نتائج المسألة ١٧-٣٢ أوجد الرقم القياسي المثالي للكميات أو الحجم لفيشر .

الحل :

كما في الرقم القياسي للسعر ، فإن رقم فيشر المثالي للكمية يحسب بالوسط الهندسي لرقم لاسبيرز وباش للكميات . هذا فن المسألة ١٧ - ٣٢ .

$$\text{الرقم القياسي المثالي للكميات لفيشر} = \sqrt{(144.86)(144.45)} = 144.6$$

الرقم القياسي للقيمة :

٣٤-١٧ أثبت أن رقم فيشر المثالي يحقق اختبار الانعكاس في المعامل .

الحل :

يتحقق اختبار الانعكاس في المعامل للرقم القياسي إذا كان

(الرقم القياسي للسعر) (الرقم القياسي للكمية) = الرقم القياسي للقيمة . اعتبر أن F_p هو رقم فيشر المثالي للسعر و F_q هو رقم فيشر المثالي للكمية . إذن

$$F_p F_q = \sqrt{\left(\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_0}\right) \left(\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_0}\right)} \sqrt{\left(\frac{\sum q_n p_n}{\sum q_0 p_0}\right) \left(\frac{\sum q_n p_n}{\sum q_0 p_0}\right)} = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_0} = \text{الرقم القياسي للقيمة}$$

بهذا فإن رقم فيشر المثالي يحقق اختبار الانعكاس في المعامل .

٣٥-١٧ احسب الرقم القياسي للقيمة بالمسألة ١٧ - ٣٤ باستخدام بيانات المسألة ١٧ - ١٢ .

الحل :

بما أن النتيجة :

الرقم القياسي للقيمة = (الرقم القياسي للسعر) (الرقم القياسي للكمية) ، تنطبق تماماً إذا استخدمت أرقام فيشر المثالية فإنه من المسائل ١٧ - ٣٧ و ١٧ - ٣٣

$$\text{الرقم القياسي للقيمة} = (106.0\%)(144.6\%) = 153.3\%$$

وهذه النتيجة نحصل عليها بالتمويض المباشر في الصيغة

$$\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_0}$$

تغيير فترة الأساس للأرقام القياسية :

٣٦-١٧ وضع أسس صلاحية الطريقة المستخدمة في المسائل ١٧ - ٣ للحصول على مناسيب السعر لفترة أساس جديدة .

الحل :

افترض أن الفترات مرقمة على التتالي من 1 إلى N كما في الصف الأول من الجدول ١٧ - ١٣ ، وافترض أن p_1, p_2, \dots, p_N تعبر عن الأسعار في هذه الفترات كما في الصف الثاني في هذا الجدول .

جدول ١٧ - ٢

الفترة	1	2	3	...	j	...	k	...	N
الأسعار	p_1	p_2	p_3	...	p_j	...	p_k	...	p_N
مناسيب السعر المقابلة للفترة القديمة j	p_{j11}	p_{j12}	p_{j13}	...	100%	...	p_{j1k}	...	p_{j1N}
مناسيب السعر المقابلة للفترة الجديدة k	p_{k11}	p_{k12}	p_{k13}	...	p_{k1j}	...	100%	...	p_{k1N}

مناسيب السعر المقابلة للفترات j و k والتي أطلقنا عليها الفترات القديمة والجديدة على الترتيب موضحة بالصف الثالث والرابع من الجدول . هنا $p_{j1k} = p_j/p_k$ و $p_{k1j} = p_k/p_j$ وهكذا .

من الواضح أن الصف الرابع يمكن الحصول عليه من الصف الثالث بقسمة كل قيمة في الصف الثالث على p_{j1k} أي :

$$\frac{p_{j11}}{p_{j1k}} = \frac{p_1/p_j}{p_k/p_j} = \frac{p_1}{p_k} = p_{k11}$$

ومن الواضح أن النتيجة تنطبق على مناسيب الكية والقيمة كما تنطبق على مناسيب السعر .

٣٧-١٧ أثبت أن طريقة المسألة ١٧ - ٣٦ في تغيير فترة الأساس للأرقام القياسية قابلة للتطبيق في حالة وحيدة فقط وهي إذا كان الرقم القياسي يحقق اختبار الدائرية .

الحل :

إذا رمزنا للأرقام القياسية للفترات المختلفة باستخدام الفترة j كأساس بالرمز

$$(1) \quad I_{j11}, I_{j12}, \dots, I_{j1N}$$

وكانت الأرقام القياسية المناظرة باستخدام الفترة k كأساس هي :

$$(2) \quad I_{k11}, I_{k12}, \dots, I_{k1N}$$

ون دولار
ون دولار

$$\frac{\sum q_n p_n}{\sum q_n p_n} = \frac{\text{لكل لتر}}{\text{لكل لتر}} = \frac{\text{يون دولار}}{\text{يون دولار}}$$

ر باش للكميات بهذا

هو رقم فيشر المثالي

$$F_r F_o = 1$$

مت أرقام فيشر المثالية

فإننا سوف نحصل على المتتامة (٢) بقسمة كل رقم في المتتامة (١) على I_{jk} في حالة واحدة فقط وهي إذا كان

$$\frac{I_{j+1}}{I_{j,k}} = I_{k+1}, \quad \frac{I_{j+2}}{I_{j,k}} = I_{k+2}, \quad \dots$$

أو

$$I_{j+1} = I_{j,k} I_{k+1}, \quad I_{j+2} = I_{j,k} I_{k+2}, \quad \dots$$

وهذا يتضمن أن الأرقام القياسية تحقق اختبار الدائرية .

بما أن الأرقام القياسية لكل من لاسبيرر ، باش ، فيشر ومارشال - أدجورث لا تحقق اختبار الدائرية ، فإن طريقة تغيير الأساس لا تنطبق بصورة دقيقة . وعلى أية حال فإنها من الناحية العملية تنطبق بصورة تقريبية .

الرقم القياسي التجميعي المرجع حيث الأوزان المستخدمة لسنة ثانية يحقق اختبار الدائرية (أنظر المسألة ١٧-٢٣) بهذا فإنه للأرقام القياسية المحسوبة هذه الطريقة فإن الطريقة المعطاة لتغيير الأساس تنطبق تماماً .

١٧-٢٨ الجدول ١٧ - ١٤ يوضح الرقم القياسي للإنتاج الصناعي لجميع المصانع للسنوات ١٩٤٧ - ١٩٥٨ حيث ١٩٤٧ - ١٩٤٩ فترة أساس . أوجد رقماً قياسياً جديداً باستخدام (أ) ١٩٥١ (ب) ١٩٥٦ - ١٩٥٣ ، كأساس .

جدول ١٧ - ١٢

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
الرقم القياسي للإنتاج الصناعي (1947-49=100)	100	104	97	112	120	124	134	125	139	143	143	134

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

الحل :

(أ) اقم كل رقم بالجدول على 120 (الرقم القياسي المقابل لسنة 1951) وعبر عن النتيجة كنسبة مئوية .
الرقم القياسي المطلوب حيث 1951 سنة أساس موضح بالجدول ١٧ - ١٥ .

جدول ١٧ - ١٥

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
الرقم القياسي للإنتاج الصناعي (1951=100)	83	87	81	93	100	103	112	104	116	119	119	112

(ب) الوسط (الوسط الحسابي) للأرقام القياسية للسنوات 1953 - 1956 كأساس هو 135.25 (134 125 139 143) إذن بقسمة كل رقم قياسي بالجدول ١٧ - ١٤ على 135.25 والتعبير عن النتيجة كنسبة مئوية ، نحصل على الأرقام القياسية المطلوبة الموضحة بالجدول ١٧ - ١٦ .

جدول ١٧ - ١٦

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
الرقم القياسي للإنتاج الصناعي (1953-56=100)	74	77	72	83	89	92	99	92	103	106	106	99

لاحظ أن متوسط الأرقام القياسية لفترة الأساس الجديدة 1953-1956 هو 100. (106 103 92 99) كما يجب أن يكون .

الانكماش في السلسلة الزمنية :

١٧-٢٩ الجدول ١٧ - ١٧ يوضح متوسط الأجور بالدولار في الساعة لعمال السكك الحديدية بالولايات المتحدة خلال السنوات 1947 - 1958 .

كذلك يوضح الرقم القياسي لأسعار المستهلك لهذه السنوات باعتبار 1947 - 1949 فترة أساس . حدد الأجر « الحقيقي » لعمال السكك الحديدية خلال السنوات 1947 - 1958 بالمقارنة بأجورهم في 1947 .

جدول ١٧ - ١٧

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
متوسط أجر عمال السكك الحديدية (دولار في الساعة)	1.19	1.33	1.44	1.57	1.75	1.84	1.89	1.94	1.97	2.13	2.28	2.45
الرقم القياسي لأسعار المستهلك (1947-49=100)	95.5	102.8	101.8	102.8	111.0	113.5	114.4	114.8	114.5	116.2	120.2	123.5

المصدر : مكتب العمل بالولايات المتحدة

الحل :

(أ) نقوم أولاً بتكوين رقم قياسي جديد لأسعار المستهلك حيث 1947 هي سنة أساس بقسمة جميع الأرقام في الصف الثالث بالجدول ١٧ - ١٧ على 95.5 والتعبير عن النتيجة كنسبة مئوية . النتيجة موضحة بالصف الثاني

وحيدة فقط وهي

الترية ، فإن طريقة

(المسألة ١٧-٢٣)

- 1947 حيث
19 : كأساس .

السنة
الرقم القياسي للإنتاج الصناعي (1947-49=100)

مناه الأعمال الجارية

نتيجة كنسبة مئوية .

السنة
رقم القياسي للإنتاج الصناعي (1951=100)

بالجدول ١٧ - ١٨ . ثم نقوم بقسمة كل متوسط أجر للسنوات المطاة (الصف الثاني بالجدول ١٧ - ١٧)
على الرقم القياسي المقابل (الصف الثاني بالجدول ١٧ - ١٨) لنحصل على الأجر « الحقيقي » (الصف الثالث
بالجدول ١٧ - ١٨) .

هذا ، على سبيل المثال ، الأجر الحقيقي المقابل لسنة ١٩٥٨ هو \$ 1.89 = % 129.3 / \$ 2.45
وينتج عن ذلك أنه على الرغم من أن الأجر « الظاهر » زاد أكثر من الضعف في المدة من ١٩٤٧ إلى ١٩٥٨ ، فإن
الأجر « الحقيقي » زاد بنسبة % ٥٩ فقط . أي أن القوة الشرائية زادت بنسبة % ٥٩ فقط .

جدول ١٧ - ١٨

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
الرقم القياسي لأسعار المستهلك (1947=100)	100	107.6	106.6	107.6	116.2	118.8	119.8	120.2	119.9	121.7	125.9	129.3
الأجر « الحقيقي » لعمال السكك الحديدية (دولار في الساعة)	1.19	1.24	1.35	1.46	1.51	1.55	1.58	1.61	1.64	1.75	1.81	1.89

١٧ - ٤٠ استخدم الرقم القياسي لأسعار المستهلك بالمسألة ١٧ - ٣٩ لتحديد القوة الشرائية للدولار للسنوات المختلفة مفترضاً أنه في ١٩٤٧ كان الدولار يساوي فعلاً دولاراً في الشرائية .

الحل :

بقسمة \$ 1.00 على كل رقم قياسي للسعر بالصف الثاني في الجدول ١٧ - ١٨ ، نحصل على القيم بالجدول ١٧ - ١٩
التي توضح القوة الشرائية للدولار ١٩٤٧ في كل من السنوات المطاة . في ١٩٥٨ ، على سبيل المثال ، القيمة 0.77
تعني أن دولار ١٩٥٨ يمكن أن يشتري به % ٧٧ مما يمكن أن يشتري بدولار ١٩٤٧ ، أي أن الدولار يساوي
\$ 0.77 من دولار ١٩٤٧ .

البيانات المعبر عنها بقيم الدولار عند فترة معينة من الزمن يقال أنه معبر عنها بدولارات ثابتة باستخدام الفترة المعينة
كفترة أساس أو فترة أستاذ .

جدول ١٧ - ١٩

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
القوة الشرائية للدولار بدولارات ١٩٤٧	1 (X)	0.93	0.94	0.93	0.86	0.84	0.83	0.83	0.83	0.82	0.79	0.77

مسائل إضافية

مناسيب الأسعار :

١٧-٤١ الجدول ١٧ - ٢٠ يوضح متوسط أسعار الجملة للقمح في إحدى الدول لعدد من السنوات المختلفة . أوجد منسوب السعر لكل من (أ) سنة ١٩٥٨ باستخدام ١٩٤٨ كأساس ، (ب) ١٩٤٩ و ١٩٥٦ باستخدام ١٩٥٠ كأساس ، (ج) السنوات ١٩٥٥ - ١٩٥٨ باستخدام $100 = 1949 - 1947$.

جدول ١٧ - ٢٠

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
متوسط أسعار القمح بالبنس الجديد لكل كيلو جرام	2.66	2.50	2.24	2.29	2.41	2.45	2.49	2.56	2.50	2.39	2.35	2.23

ج : (أ) 89.2 (ب) 97.8، 104.4 (ج) 90.4، 95.3، 96.9، 101.4

١٧-٤٢ أثبت أن (أ) $P_{a1b}P_{b1c}P_{c1a} = 1$ ، (ب) $P_{a1b}P_{b1c}P_{c1a} = P_{a1d}$

١٧-٤٣ أثبت أن $P_{01n} = P_{011}P_{112}P_{213} \dots P_{(n-1)n}$

١٧-٤٤ أثبت أن خاصية الدائرية المعدلة تأتي مباشرة من خاصية الدائرية وخاصية الانعكاس في الزمن .

١٧-٤٥ الجدول ١٧ - ٢١ يوضح مناسيب السعر لسلة حيث $100 = 1949 - 1947$. حدد مناسيب السعر حيث (أ) $100 = 1956$ ، (ب) $100 = 1955 - 1956$

جدول ١٧ - ٢١

السنة	1955	1956	1957	1958	1959	1960
منسوب السعر (1947-1949=100)	135	128	120	150	140	162

ج : (أ) 105، 100، 93.8، 117، 109، 127 (ب) 103، 97.3، 91.3، 114، 106، 123

١٧-٤٦ منسوب السعر لسنة ١٩٥٦ حيث ١٩٥٨ سنة الأساس هو $62\frac{1}{2}$ بينما منسوب السعر لسنة ١٩٥٧ حيث ١٩٥٦ سنة الأساس هو $133\frac{1}{2}$. أوجد منسوب السعر لسنة ١٩٥٨ حيث (أ) ١٩٥٧ ، (ب) ١٩٥٦ - ١٩٥٧ كأساس . ج : (أ) 120 ، (ب) 137

١٧-٤٧ في ١٩٦٠ انخفض متوسط سعر سلة بنسبة 25% من قيمتها سنة ١٩٥٤ ولكنه زاد بنسبة 50% من قيمتها سنة ١٩٤٦ . أوجد منسوب السعر لكل من (أ) ١٩٥٤ ، (ب) ١٩٦٠ مستخدماً كأساس ١٩٤٦ . ج : (أ) 200 ، (ب) 150

بول ١٧ - ١٧
(الصف الثالث)

\$2.45 / 129.3
إلى ١٩٥٨ ، فإن

السنة
الرقم القياسي لأسعار المستهلك (1947=100)
لجبر « الحقيقي » لعمال السكك الحديدية (دولار في الساعة)

المختلفة مقترناً أنه في

يم بالجدول ١٧ - ١٩
المثال ، القيمة 0.77
أن الدولار يساوي

باستخدام الفترة المعينة

السنة
القوة الشرائية للدولار بدولارات ١٩٤٧

مناسيب الكمية أو الحجم :

١٧-٤٨ الجدول ١٧ - ٢٢ يوضح الطاقة الكهربائية بليون الكيلووات - ساعة المباعة للعملاء المحليين والمقيمين بالولايات المتحدة خلال السنوات 1947 - 1958 . اختصر البيانات إلى مناسيب الكمية مستخدماً (أ) 1953 (ب) 1947 - 1949 كأساس .

جدول ١٧ - ٢٢

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
الطاقة الكهربائية (بليون kwh)	3.68	4.25	4.84	5.59	6.42	7.23	8.09	9.04	10.04	11.15	12.26	13.25

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

ج : (أ) 45.5, 52.5, 59.8, 69.1, 79.4, 89.4, 100.0, 111.7, 124.1, 137.8, 151.5, 163.8

(ب) 86.5, 99.8, 113.7, 131.3, 150.8, 169.9, 190.1, 212.4, 235.9, 261.9, 288.0, 311.3

١٧-٤٩ في 1956 زاد الإنتاج من معدن خام بنسبة 40% عنه في 1955 ، وفي 1957 كان الإنتاج أقل بنسبة 20% منه في 1956 ولكن % 16 2/3 أعلى منه في 1958 . أوجد مناسيب المعدن السنوات 1955 - 1958 مستخدماً كأساس (أ) 1955 (ب) 1958 (ج) 1958 - 1955

ج : (أ) 100, 140, 112, 96 (ب) 104, 146, 117, 100 (ج) 89.3, 125, 100, 85.7

١٧-٥٠ في المسألة السابقة إذا كان الإنتاج من المعدن الخام لسنة 1957 هو 3.20 مليون طن ، أوجد الإنتاج السنوات (أ) 1955 (ب) 1956 (ج) 1958

ج : (أ) 2.86 (ب) 4.00 (ج) 2.74 مليون طن

مناسيب القيمة :

١٧-٥١ في 1960 زاد سعر سلعة ما بنسبة 50% عن سعرها 1952 بينما انخفضت كمية الإنتاج بنسبة 30% . ما هي النسبة المئوية للإرتفاع أو الانخفاض من القيمة الإجمالية للسلعة في 1960 بالنسبة للقيمة في 1952 ؟
ج : 5% زيادة .

١٧-٥٢ الجدول ١٧ - ٢٣ يوضح مناسيب السعر والقيمة للسلعة السنوات 1956 - 1960 حيث سنة الأساس كما هو موضح . أوجد منسوب الكمية للسلعة حيث الأساس (أ) 1956 و (ب) 1958 - 1956 فسر نتائجك .

جدول ١٧ - ٢٣

السنة	1956	1957	1958	1959	1960
منسوب السعر (1956 = 100)	100	125	150	175	200
منسوب القيمة (1947 - 1949 = 100)	150	180	207	231	252

ج : (أ) 100, 96, 92, 88, 84 (ب) 104, 100, 96, 92, 88

سلسلة المناسيب ووصلة المناسيب :

١٧-٥٣ وصلة المناسيب لاستهلاك سلة خلال السنوات 1960 - 1957 هي 80 ، 125 ، 120 ، 90 على الترتيب .

(أ) أوجد منسوب المعر لسنة 1958 حيث 1960 كأساس .

(ب) سسل وصلة المناسيب إلى 1959 كأساس .

(ج) سسل وصلة المناسيب إلى 58 - 1957 كأساس .

ج : (أ) 100 (ب) 80.0 ، 100 ، 80.0 ، 66.7 ، 74.1 ، المقابلة للسنوات 1950 - 1956 على الترتيب .

(ج) 109 ، 136 ، 109 ، 99.9 ، 101 ، المقابلة للسنوات 1960 - 1956 على الترتيب .

١٧-٥٤ في نهاية A من السنوات المتتالية كان إنتاج سلعة ما A وحدة . في كل من السنوات المتتالية كان الإنتاج يتزايد بنسبة $r\%$ عن السنة السابقة لها . (أ) وصح أن الإنتاج خلال السنة n هو $A(1 + r/100)^{n-1}$ وحدة . (ب) وضع أن الإنتاج الكلي لجميع السنوات n هو $[1 + r/100]^n - 1$ $(100 A/r)$ وحدة .

الأرقام القياسية . الطريقة التجميعية البسيطة :

١٧-٥٥ الجدول ١٧-٢٤ يوضح لبلد ما أسعار وكميات المستهلك من المعادن المختلفة غير الحديدية للسنوات 1956 و 1957 . بأخذ 1949 كسنة أساس أحسب الرقم القياسي للسعر ، باستخدام الطريقة التجميعية البسيطة ، السنوات (أ) 1956 (ب) 1957 .

ج : (أ) 121.7 (ب) 110.0 .

جدول ١٧-٢٤

	الكميات (بملايين kg)			الأسعار (بنس جديد لكل kg)		
	1949	1956	1957	1949	1956	1957
المونيسيوم	1357	3707	3698	17.00	26.01	27.52
نحاس	2144	2734	2478	19.36	41.88	29.99
رصاص	1916	2420	2276	15.18	15.81	14.46
صفح	161	202	186	99.32	101.26	96.17
زنك	1872	2018	1424	12.15	13.49	11.40

١٧-٥٦ أثبت أن الرقم القياسي التجميعي البسيط يحقق اختبار الانعكاس في الزمن واختبار الدائرية ولكنه لا يحقق اختبار الانعكاس في المعامل .

الوسط البسيط لطريقة المناسيب :

١٧ - ٥٧ من البيانات بالجدول ١٧ - ٢٤ بالمسألة ١٧ - ٥٥ ، استخدم وسطاً بسيطاً (الوسط الحسابي) لمناسيب الأسعار ،
الحصول على رقم قياسي لسعر المعادن غير الحديدية السنوات (أ) ١٩٥٦ ، (ب) ١٩٥٧ ، باستخدام ١٩٤٤
كأساس . قارن بالمسألة ١٧ - ٥٥ .

ج : (أ) ١٣٧.٣ (ب) ١٢٠.٥

١٧ - ٥٨ حل المسألة ١٧ - ٥٧ باستخدام الوسيط

ج : (أ) ١١١.٠ (ب) ٩٦.٨

١٧ - ٥٩ حل المسألة ١٧ - ٥٧ باستخدام الوسيط الهندسي

ج : (أ) ١٣١.٣ (ب) ١١٦.٨

١٧ - ٦٠ حل المسألة ١٧ - ٥٧ باستخدام الوسيط التوافقي

ج : (أ) ١٢٦.٣ (ب) ١١٣.٣

الطريقة التجميعية المرجحة . رقمي لاسبيرز وباش :

١٧ - ٦١ من بيانات الجدول ١٧ - ٢٤ بالمسألة ١٧ - ٥٥ أوجد رقم لاسبيرز للأسعار السنوات (أ) ١٩٥٦ (ب) ١٩٥٧
باستخدام ١٩٤٩ سنة أساس .

ج : (أ) ١٤٨.٧ (ب) ١٢٥.٥

١٧ - ٦٢ من بيانات الجدول ١٧ - ٢٤ بالمسألة ١٧ - ٥٥ أوجد رقم باش للأسعار السنوات (أ) ١٩٥٦ (ب) ١٩٥٧
باستخدام ١٩٤٩ كسنة أساس .

ج : (أ) ١٥٠.٥ (ب) ١٣٤.٢

١٧ - ٦٣ وضع أن (أ) رقم لاسبيرز (ب) رقم باش ، لايحققان اختبارات الانعكاس في الزمن والانعكاس في المعامل .

رقم فيشر المثالي :

١٧ - ٦٤ من بيانات الجدول ١٧ - ٢٤ بالمسألة ١٧ - ٥٥ أوجد رقم فيشر المثالي للأسعار السنوات (أ) ١٩٥٦ (ب) ١٩٥٧
باستخدام ١٩٤٩ كسنة أساس .

ج : (أ) ١٤٩.٦ (ب) ١٢٩.٨

جداول ١٦ - ٢١

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	
119.9	107.7	103.7	92.4	85.4	80.6	81.2	88.5	96.4	107.6	115.2	122.3	1951
120.7	107.3	104.1	92.8	86.4	80.0	82.2	88.4	96.6	107.1	113.5	120.2	1952
119.8	106.1	103.4	93.6	86.8	81.3	82.0	89.3	96.7	107.2	113.4	121.1	1953
119.8	107.2	104.3	93.5	87.2	81.5	83.4	89.6	95.7	105.5	112.2	119.6	1954
119.1	107.6	103.2	93.2	87.2	81.8	83.4	89.5	95.9	106.0	112.3	119.6	1955
118.6	106.6	103.4	94.2	88.1	82.1	84.6	90.0	97.7	105.7	111.7	118.2	1956
119.5	107.2	103.4	93.9	87.7	83.2	83.8	90.4	96.0	105.1	112.3	117.3	1957
119.8	107.2	103.4	93.5	87.2	81.5	83.4	89.5	96.4	106.0	112.3	119.6	الوسيط

لمحصل على متوسط النسب المئوية لكل شهر للسنوات المختلفة ، فقد استخدمنا الوسيط ، كما هو موضح بالجدول ١٦ - ٢١ ، وذلك نظراً لوجود قيم متطرفة في بعض الحالات ، (مثل نوفمبر ، ديسمبر) . ومن الممكن أن تستخدم أيضاً الوسيط الحسابي مع استبعاد القيم المتطرفة في كل عود .

مجموع الوسيطات هو 1199.8 ، وهو قريب من 1200 وهذا هو المطلوب وبهذا لا توجد حاجة إلى التعديل . ويوضح الصف الأخير بالجدول ١٦ - ٢١ الدليل الموسمي المطلوب .

وتتفق النتائج بشكل جيد مع نتائج المسألة ١٦ - ٩ .

١١-١٦ أوجد الدليل الموسمي لبيانات المسألة ١٦ - ٨ باستخدام طريقة الوصلة النسبية .

الحل :

نمبر أولاً عن بيان كل شهر كنسبة مئوية من بيانات الشهر السابق ، كما هو موضح بالجدول ١٦ - ٢٢ . كل من هذه النسب تسمى وصلة نسبية . على سبيل المثال . لمحصل على قيم شهرى فبراير ومارس 1951 ، فإنه من بيانات المسألة ١٦ - ٦ ،

$$\% 88.4 = \frac{281}{318} = \frac{\text{قيمة فبراير 1951}}{\text{قيمة يناير 1951}} = \text{الوصلة النسبية لشهر فبراير 1951}$$

$$\% 98.9 = \frac{278}{281} = \frac{\text{قيمة مارس 1951}}{\text{قيمة فبراير 1951}} = \text{الوصلة النسبية لشهر مارس 1951}$$

البيانات	السنة
420	يناير 1955
378	فبراير 1955
370	مارس 1955
334	أبريل 1955
314	مايو 1955
296	يونيه 1955
305	يوليه 1955
330	أغسطس 1955
356	سبتمبر 1955
396	أكتوبر 1955
422	نوفمبر 1955
452	ديسمبر 1955
454	يناير 1956
412	فبراير 1956
398	مارس 1956
362	أبريل 1956
341	مايو 1956
322	يونيه 1956
335	يوليه 1956
359	أغسطس 1956
392	سبتمبر 1956
427	أكتوبر 1956
454	نوفمبر 1956
483	ديسمبر 1956

والتعبير عن كل

ويوضح الجدول

ة من 1958 غير

جداول ١٦ - ٢٢

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	
1951	88.4	98.9	89.9	92.4	93.5	103.2	109.9	109.8	112.3	107.6	106.8	
1952	98.6	90.4	96.8	89.6	92.9	102.5	108.3	109.9	111.5	106.5	106.4	
1953	100.8	89.4	97.6	89.7	93.7	103.2	109.7	108.8	111.7	106.4	107.4	
1954	99.5	89.0	98.0	90.9	93.2	103.3	108.2	107.5	111.0	106.9	107.2	
1955	100.7	90.0	97.9	90.3	94.0	103.0	108.2	107.9	111.2	106.6	107.1	
1956	100.2	90.9	96.6	91.0	94.2	104.0	107.2	109.2	108.9	106.3	106.4	
1957	100.8	90.3	97.5	91.6	94.1	102.9	108.7	107.0	110.1	107.4	105.1	
1958	102.5	90.2	97.1	91.4	94.1	102.4	107.7	106.9	110.0	106.7	106.5	
الوسيط	100.7	90.1	97.6	90.6	93.8	103.1	108.2	108.4	111.1	106.6	106.6	

متوسط الوصلات النسبية للأشهر المختلفة (في هذه الحالة الوسيط) موضح بالصف الأخير للجداول ١٦ - ٢٢ . ويمكن أيضاً استخدام الوسيط الحسابي (أنظر المسألة ١٦ - ١٢) .

اعتبر أن يناير له القيمة 100% (أنظر الجدول ١٦ - ٢٣) . وبما أن متوسط الوصلة النسبية لشهر فبراير هو 90.1 (من الجدول ١٦ - ٢٢) فإن بيانات شهر فبراير هي في المتوسط 90.1% من بيانات شهر يناير ، أي 90.1% من 100 = 90.1 وبصورة مشابهة فإن متوسط الوصلة النسبية لشهر مارس هو 97.6% من شهر فبراير أي 97.6% من 90.1 = 87.9 ، وهكذا نحصل على الجدول ١٦ - ٢٣ والذي تسمى قيمه أحياناً بالمناشير المسلسلة .

الجدول ١٦ - ٢٣

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	يناير
100.0	90.1	87.9	79.6	74.7	70.4	72.6	78.6	85.2	94.7	101.0	107.6	108.5

في الجدول ١٦ - ٢٣ قيمة يناير التالي (العمود الأخير) هي 108.5 ، بزيادة قدرها 8.5 عن يناير الأول . وهذه الزيادة ترجع إلى الزيادة طويلة المدى في البيانات . لتعديل لاستبعاد هذا الاتجاه العام يجب طرح $(12/12)(8.5) = 8.5$ من قيمة العمود الأخير (وهذا يجعل قيمة يناير التالي 100) ، $7.8 = (11/12)(8.5)$ من قيمة ديسمبر ، $7.1 = (10/12)(8.5)$ من قيمة نوفمبر ، وهكذا . والقيم المعدلة لاستبعاد الاتجاه العام موضحة بالجدول ١٦ - ٢٤ ، (بصورة أكثر دقة يجب ضرب القيم الموجودة بالجدول من اليمين إلى اليسار في

$$(100.0 / 108.5)^{12/12}, (100.0 / 108.5)^{11/12}, (100.0 / 108.5)^{10/12}, \dots$$

وهذه من الناحية العملية تنتج نفس النتيجة الموضحة بالجدول (١٦ - ٢٤)

الجدول ١٦ - ٢٤

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
100.0	89.4	86.5	77.5	71.9	66.9	68.4	73.6	79.5	88.3	93.9	99.9

ونظراً لأن مجموع هذه النسب المئوية هي 995.8 ، فإننا نمد لها بالضرب في 1200/995.8 للحصول على الدليل الموسمي ، وهو موضح بالجدول ١٦ - ٢٥ .

الجدول ١٦ - ٢٥

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
120.5	107.7	104.2	93.4	86.6	80.6	82.4	88.7	95.8	106.4	113.2	120.4

١٦-١٧ حل المسألة ١٦ - ١١ إذا استخدمنا الوسط الحسابي للوصلات النسبية بدلا من الوسيط .

الحل :

متوسط الوصلات النسبية موضح بالجدول ١٦ - ٢٦

جدول ١٦ - ٢٦

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
100.4	89.8	97.6	90.5	93.6	94.2	103.1	108.5	108.4	110.8	106.8	106.6

إذا اعتبرنا أن يناير له القيمة 100(%) فإن قيمة فبراير هي 89.8% من 100=89.8 ، وقيمة مارس هي

97.6% من 89.8 تساوي 87.6 ، كما هو موضح بالجدول ١٦ - ٢٧

جدول ١٦ - ٢٧

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
100.0	89.8	87.6	79.3	74.2	69.9	72.1	78.2	84.8	94.0	100.4	107.0

ديسمبر	يناير
106.8	10
106.4	10
107.4	10
107.2	10
107.1	10
106.4	10
105.1	10
106.5	10
106.6	10

١٦ - ٢٢

شهر فبراير هو
أي 90.1%
أي 97.6%
سلة

ديسمبر	يناير
108.5	107.0

عن يناير الأول .

$$(12/12)(8.5)=$$

قيمة ديسمبر .

جدول ١٦ - ٢٤ ،

(100.0

هنا القيمة في يناير التالى هي 107.4 ، بزيادة مقدارها 7.4 عن يناير الأول وذلك راجع إلى الاتجاه العام .
لاستبعاد أثر الاتجاه العام نقوم بطرح $(12/12)(7.4) = 7.4$ من العمود الأخير ، $(11/12)(7.4) = 6.8$ من قيمة شهر ديسمبر ، $(10/12)(7.4) = 6.2$ من قيمة شهر نوفمبر وهكذا ، وينتج عن ذلك القيم الموجودة بالجدول ٢٨ - ١٦

جدول ٢٨ - ١٦

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
100.0	89.2	86.4	77.5	71.7	66.8	68.4	73.9	79.9	88.4	94.2	100.0

وبما أن مجموع القيم في الصف الأخير بالجدول ٢٨ - ١٦ هي 996.6 فإننا نعدل هذه القيمة بالضرب في 1200/996.6 ومن ثم نحصل على الدليل الموسمي المعطى بالجدول ٢٩ - ١٦

جدول ٢٩ - ١٦

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	الدليل الموسمي
120.4	107.4	104.0	93.3	86.3	80.4	82.4	89.0	96.2	106.4	113.4	120.7	

تخليص البيانات من أثر الموسم :

١٦-١٣ عدل بيانات المسألة ١٦ - ٨ للتغيرات الموسمية ، أى خُصص البيانات من أثر الموسم .

الحل :

لتعديل البيانات للتخلص من أثر التغيرات الموسمية ، يجب قسمة كل عنصر في البيانات الأصلية للمسألة ١٦-٨ بالدليل الموسمي للشهر المقابل كما حصلنا عليه في الطريقة السابقة .

فإذا استخدمنا ، على سبيل المثال ، الدليل الموسمي للمسألة ١٦ - ١٠ فإننا نقسم كل قيم يناير على 119.8% (أى 1.198) ، وكل قيم فبراير على 107.2% (أى 1.072) وهكذا . وهذا فإن البيانات المخلصة من أثر الموسم هي كما يلي بالجدول ٣٠ - ١٦

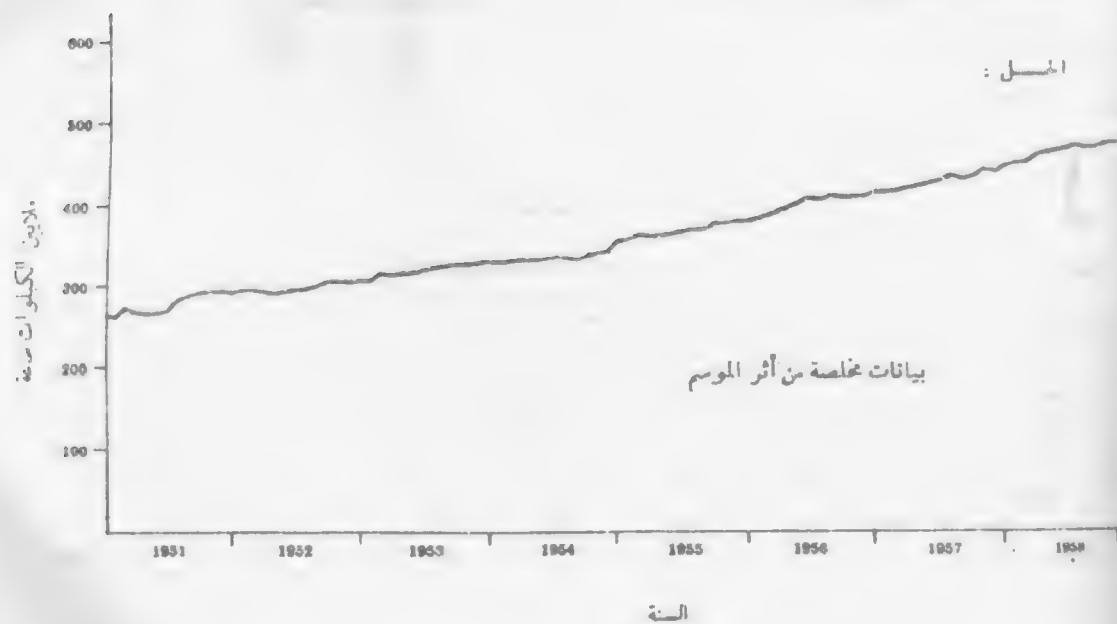
الجدول ١٦ - ٢٠

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
265	262	269	267	265	265	267	274	279	285	289	290
285	288	289	287	286	290	290	293	299	303	305	304
306	306	309	307	308	308	311	317	321	325	327	329
327	326	331	333	333	335	338	341	340	343	346	349
351	353	358	357	360	363	366	369	369	374	376	378
378	384	385	387	391	395	402	401	407	403	404	404
407	410	415	420	424	426	428	434	430	431	437	431
442	445	448	452	456	466	466	468	465	465	468	468

1951
1952
1953
1954
1955
1956
1957
1958

١٦-١٨ (أ) ارسم البيانات المخلصة من الموسم بالمسألة السابقة

(ب) قارن الرسم برسم المسألة ١٦ - ٨ (أ)



شكل ١٦ - ٥

(ب) الشكل البياني للبيانات المعدلة للتخلص من أثر الموسم تظهر بوضوح الاتجاه العام طويل المدى والذي ، باستثناء بعض التقلبات الطفيفة ، يعد تقريباً جيداً لخط مستقيم على الرغم من وجود اتجاه طفيف إلى أعلى .

إذا رمزنا لبيانات المسألة ١٦ - ٨ بالرمز $Y = TCSI$ ، فإن الرسم في (أ) يعبر عن المتغير $YIS = TCI$ مرسوماً في مقابل الزمن t وهذا يحتوي على الاتجاه العام طويل المدى ، التغيرات الدورية وغير المنتظمة . وبما أن الرسم يوضح الاتجاه طويل المدى بصورة جيدة فإنه يظهر أن حاصل الضرب CI للعناصر الدورية وغير المنتظمة يجب أن يكون من الناحية العملية 100% . وهذه الحقيقة ستأكد منها في المسألة ١٦ - ١٦ .

الاتجاه العام .

(7.4/11/12)

جودة بالجدول

قيمة بالضرب في

ديسمبر	نوفمبر
120.7	113.4

صلية للمسألة ١٦ - ٨

ر على 119.8% (أى

المخلصة من أثر الموسم

تقدير التغيرات الدورية وغير المنتظمة :

١٥-١٦ عدل بيانات المسألة ١٦ - ١٣ لتخلص من أثر الموسم .

الحل :

لاستبعاد أثر الاتجاه العام من بيانات المسألة ١٦-١٣ نقسم كل قيمة على القيمة الاتجاهية المقابلة لكل شهر ، محسوبة بأي من الطرق الموضحة . في هذه المسألة سوف نستخدم القيم الاتجاهية الشهرية ، التي حصلنا عليها في المسألة ١٠ - ١٦ مستخدمين طريقة المتوسطات المتحركة . ويوضح الجدول ١٦ - ٣١ النتائج . للحصول على قيمة يوليو 1951 على سبيل المثال ، نقسم القيمة المقابلة 267 الموضحة بالجدول ١٦ - ٣ على المسألة ١٦ - ١٣ على القيمة 274.7 (أنظر المسألة ١٠ - ١٦ ، القيمة الأولى في العمود 5 من الجدول ١٦ - ٣٠) ، والتي تعطى $267/274.7 = 97.2\%$ ونحصل على القيم الأخرى بطريقة مماثلة . أحد عيوب هذه الطريقة ، كما في جميع الطرق المتضمنة استخدام المتوسطات المتحركة ، أننا نفقد البيانات عند طرفي السلسلة الزمنية .

الجدول ١٦ - ٣١

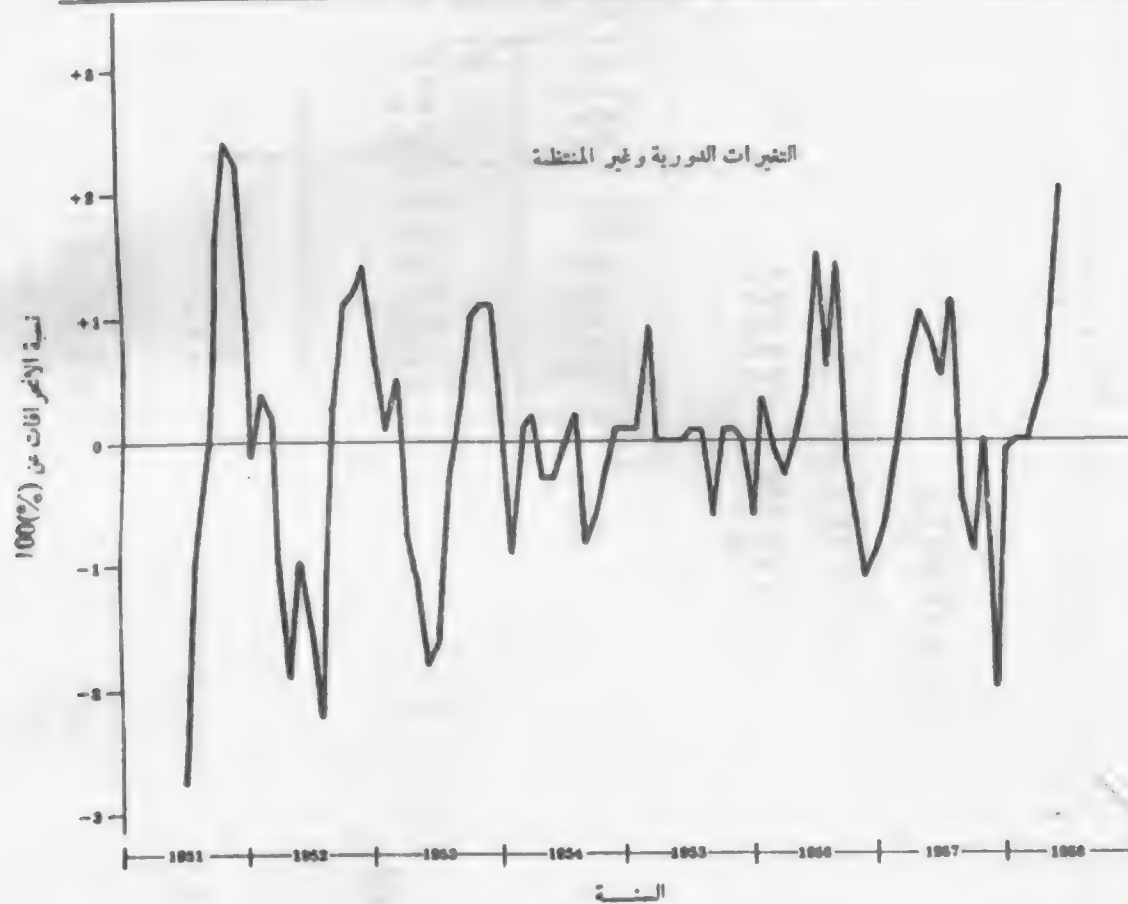
	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
1951	99.9	100.4	100.2	99.0	98.1	99.0	98.5	97.2	99.0	100.0	101.6	102.4
1952	100.6	100.1	100.5	99.2	98.9	98.2	98.4	97.8	100.3	101.1	101.2	100.4
1953	99.9	99.1	100.1	100.2	99.7	99.7	98.9	99.7	100.4	101.0	101.1	101.1
1954	100.1	100.1	100.9	100.0	100.0	100.0	100.0	100.2	99.4	99.4	99.8	100.1
1955	99.4	100.3	99.9	99.7	100.0	100.4	100.6	101.5	101.4	99.8	99.4	98.9
1956	99.1	99.3	100.0	100.7	101.0	100.8	100.5	101.1	99.5	99.1	100.0	98.0
1957	99.9	100.0	100.0	100.3	100.5	102.0						
1958												

١٦-١٦ (أ) ارسم البيانات التي حصلت عليها بالمسألة ١٦ - ١٥

(ب) فسر دلالة الرسم .

الحل :

(أ) من الملائم طرح 100% من بيانات المسألة السابقة ورسم الانحرافات الناتجة . الرسم الناتج ، باستخدام محور رأسي مكبر موضح بالشكل ١٦ - ٦ .



شكل ١٦ - ١

(ب) يعبر عن البيانات الأصلية بالمعادلة $Y = TCSI$. إجراء التعديل لاستبعاد التغيرات الموسمية كما في المسألة ١٦ - ١٣ يعتبر بمثابة قسمة الطرفين على الدليل الموسمي S للحصول على $Y/S = TCI$. والتعديل التالي لاستبعاد الاتجاه العام يعد بمثابة القسمة على T لنحصل على $Y/ST = CI$. بطرح 100% نحصل على $T/ST - 100 = CI - 100$. أى أن المتغير التابع في الشكل أعلاه هو $Y/ST - 100$ ، والمتغير المستقل هو الزمن t .

ويتكون الشكل من الناحية النظرية من التحركات الدورية وغير المنتظمة فقط ، ممثلة بالعناصر C و I على الترتيب . لاحظ أن حاصل القسب CI يتغير بين 97% و 103% وهذا يؤكد العبارة التي وردت في نهاية المسألة ١٦ - ١٤ .

١١-١٧ (أ) أوجد 3 أشهر متوسط و 7 أشهر متوسط لبيانات المسألة ١٦ - ١٥

(ب) كون الرسم البياني للمتوسطات المتحركة للجزء (أ)

(ت) فسر الرسوم البيانية .

الحل :

(أ) المتوسطات المتحركة المطلوبة موضحة بالجدول ١٦ - ٣٢ .

لغالبية لكل شهر ،
سلكنا عليها في المسألة
على قيمة يوليو 1951
قيمة 274.7 (أنظر
 $267/274.7 = 97$
استخدام المتوسطات

ر	ديسمبر	
1951	102.2	10
1952	100.4	10
1953	101.1	10
1954	100.1	9
1955	100.0	10
1956	98.9	9
1957	98.0	10
1958		

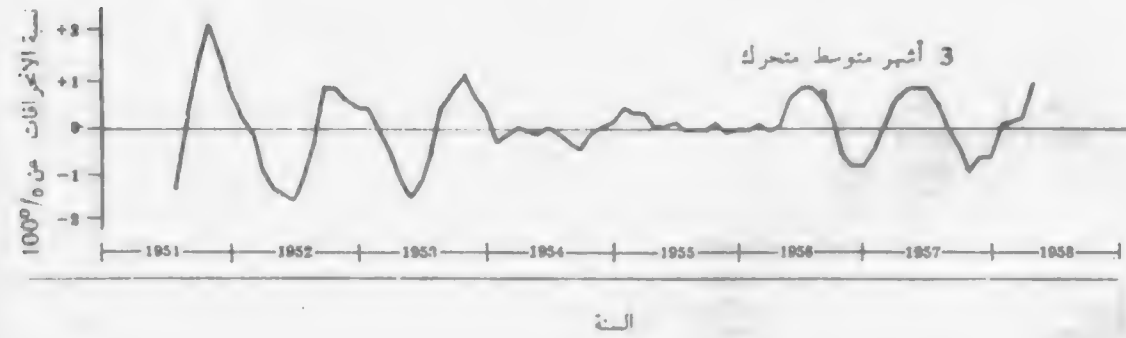
م النتائج ، باستخدام

جنول ١٦ - ٢٢

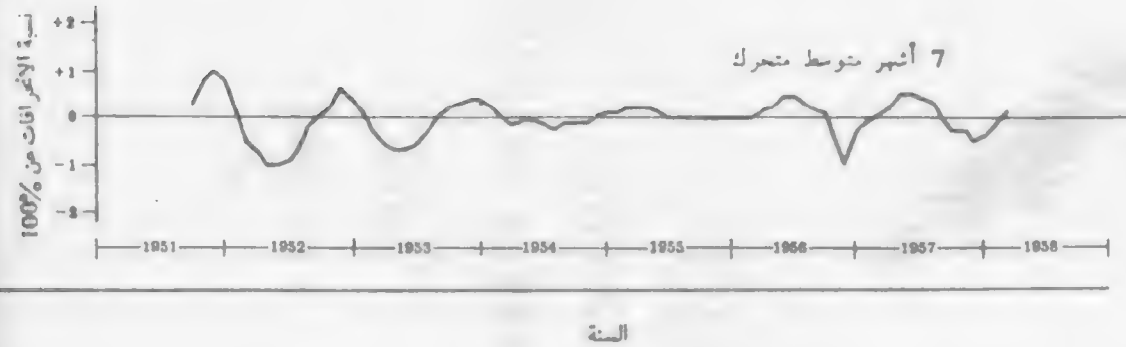
السنة و الشهر	البيانات	3 أشهر مجموع متحرك	3 أشهر متوسط متحرك	7 أشهر متوسط متحرك	7 أشهر مجموع متحرك
1951					
يوليه	97.2		98.7		
أغسطس	99.0	296.2	100.2		
سبتمبر	100.0	300.6	101.3	702.3	100.3
أكتوبر	101.6	304.0	102.1	705.5	100.8
نوفمبر	102.4	306.2	101.5	706.7	101.0
ديسمبر	102.2	304.5			
1952					
يناير	99.9	302.5	100.8	705.7	100.8
فبراير	100.4	300.5	100.2	702.2	100.3
مارس	100.2	299.6	99.9	698.8	99.5
أبريل	99.0	297.3	99.1	695.1	99.3
مايو	98.1	296.1	98.7	693.0	99.0
يونيه	99.0	295.6	98.5	692.9	99.0
يوليه	98.5	295.3	98.4	693.8	99.1
أغسطس	97.8	296.6	98.9	696.0	99.4
سبتمبر	100.3	299.2	99.7	698.3	99.8
أكتوبر	101.1	302.6	100.9	699.9	100.0
نوفمبر	101.2	302.7	100.9	701.5	100.2
ديسمبر	100.4	302.2	100.7	704.2	100.6
1953					
يناير	100.6	301.1	100.4	703.1	100.4
فبراير	100.1	301.2	100.4	700.9	100.1
مارس	100.5	299.8	99.9	697.9	99.7
أبريل	99.2	298.6	99.5	695.9	99.4
مايو	98.9	296.3	98.8	695.0	99.3
يونيه	98.2	295.5	98.5	695.3	99.3
يوليه	98.4	296.3	98.8	695.8	99.4
أغسطس	99.7	298.5	99.5	697.7	99.7
سبتمبر	100.4	301.1	100.4	699.9	100.0
أكتوبر	101.0	302.5	100.8	701.6	100.2
نوفمبر	101.1	303.2	101.1	702.3	100.3
ديسمبر	101.1	302.1	100.7	702.7	100.4
1954					
يناير	99.9	300.9	100.3	702.5	100.4
فبراير	99.1	299.1	99.7	701.2	100.2
مارس	100.1	299.4	99.8	699.8	100.0
أبريل	100.2	300.0	100.0	698.7	99.8
مايو	99.7	299.6	99.9	699.0	99.9
يونيه	99.7	299.4	99.8	699.1	99.9
يوليه	100.0	299.9	100.0	698.4	99.8
أغسطس	100.2	299.4	99.8	698.0	99.7
سبتمبر	99.2	298.8	99.6	698.4	99.8
أكتوبر	99.4	298.4	99.5	698.8	99.8
نوفمبر	99.8	299.3	99.8	698.9	99.8
ديسمبر	100.1	300.0	100.0	699.6	100.0

السنة و الشهر	البيانات	3 أشهر متحرك مجموع	3 أشهر متوسط مجموع	7 أشهر مجموع متحرك	7 أشهر متوسط متحرك
1955					
يناير	100-1	300-3	100-1	700-4	100-1
فبراير	100-1	301-1	100-4	701-0	100-1
مارس	100-9	301-0	100-3	701-2	100-2
أبريل	100-0	300-9	100-3	701-2	100-2
مايو	100-0	300-0	100-0	701-2	100-2
يونيه	100-0	300-1	100-0	700-5	100-1
يوليه	100-1	300-2	100-1	699-7	100-0
أغسطس	100-1	299-6	99-9	699-8	100-0
سبتمبر	99-4	299-6	99-9	699-8	100-0
أكتوبر	100-1	299-6	99-9	699-2	100-0
نوفمبر	100-1	300-2	100-1	699-4	100-0
ديسمبر	100-0	299-5	99-8	699-2	100-0
1956					
يناير	99-4	299-7	99-9	699-5	100-0
فبراير	100-3	299-6	99-9	699-4	100-0
مارس	99-9	299-9	100-0	699-7	100-0
أبريل	99-7	299-6	99-9	701-2	100-2
مايو	100-0	300-1	100-0	702-4	100-3
يونيه	100-4	301-9	100-6	703-5	100-5
يوليه	101-5	302-5	100-8	703-4	100-5
أغسطس	100-6	302-5	100-8	703-1	100-4
سبتمبر	101-4	301-8	100-6	702-0	100-3
أكتوبر	99-8	300-6	100-2	700-7	100-1
نوفمبر	99-4	298-1	99-4	698-5	99-5
ديسمبر	98-9	297-4	99-1	697-9	99-0
1957					
يناير	99-1	297-3	99-1	697-2	99-6
فبراير	99-3	298-4	99-5	698-4	99-8
مارس	100-0	300-0	100-0	699-8	100-0
أبريل	100-7	301-7	100-6	701-4	100-2
مايو	101-0	302-5	100-8	703-4	100-5
يونيه	100-8	302-3	100-8	703-6	100-5
يوليه	100-5	302-4	100-8	702-7	100-4
أغسطس	101-1	301-1	100-4	702-0	100-3
سبتمبر	99-5	299-7	99-9	699-0	99-9
أكتوبر	99-1	298-6	99-5	698-1	99-7
نوفمبر	100-0	297-1	99-9	697-6	99-7
ديسمبر	98-0	297-9	99-3	696-5	99-5
1958					
يناير	99-9	297-9	99-3	697-3	99-6
فبراير	100-0	299-8	100-0	698-7	99-8
مارس	100-0	300-3	100-1	700-7	100-1
أبريل	100-3	300-8	100-2		
مايو	100-5	302-8	100-9		
يونيه	102-0				
يوليه					
أغسطس					
سبتمبر					
أكتوبر					
نوفمبر					
ديسمبر					

(ب) كما في المسألة ١٦ - ١٦ في الملامح طرح (100%) من المتوسطات المتحركة ورسم الانحرافات الناتجة كما هو موضح أدناه .



الشكل ١٦ - ٧



الشكل ١٦ - ٧

(ج) وكما هو متوقع ، فإن المتوسطات المتحركة تعمل في تمهيد علم الانتظام في بيانات المسألة ١٦ - ١٥ ، كما هو واضح من مقارنة الأشكال في (ب) بشكل المسألة ١٦ - ١٦ . ويتضح أيضا من الشكل أن الـ 7 أشهر متوسط متحرك يعطي تمهيدا أكبر للبيانات عن الـ 3 أشهر متوسط متحرك في هذه المسألة . وما يشير الاهتمام أن النهايات الثلاث إلى اليسار والنهايتين الصغيرتين إلى اليمين في أشكال (ب) تحدث كلها بالقرب من ديسمبر . كذلك ، فإن النهايتين الصغيرتين إلى اليسار والنهايتين العظيمين إلى اليمين تحدث بالقرب من يونيو . هذه الملاحظات يظهر أنها تشير إلى بقايا ضئيلة لتغيرات موسمية عند بداية ونهاية فترة السنوات الثماني والتي تعمل في اتجاهات مضادة ، وهذه تشير إلى تغير محتمل في نمط الموسمية . والتي من الطبيعي خلال فترة ثمانية سنوات كاملة أن تحدث وتظهر البقايا الضئيلة الموسمية بصررة أوضح إذا استخدمنا 12 شهرا متوسطا متحركا مركزيا

من المعتاد استخدام طريقة هذه المسألة لاستقصاء نمط الدورية .

ويجب أن نتوقع ذلك حيث أنه لو كانت البيانات الأصلية ، معطاة بالصورة $Y = TCSI$ ، فإن تعديلها لاستبعاد أثر الاتجاه العام والتغيرات الموسمية فإننا نحصل على بيانات جديدة $Y/ST = CI$ ، والتي (نظريا) تحتوى فقط على التحركات الدورية وغير المنتظمة . وبهذا فإن متوسطا متحركا مناسباً يفيد في حذف عدم الانتظام وإيضاح نمط الدورية ، في حالة وجودها . لهذا الفرض فإن 12 شهرا لمتوسطا متحركا مركزيا قد يكون أفضل لحذف بقايا التغيرات الموسمية وكذلك عدم الانتظام .

في المسألة الحالية لا يوجد أثر ظاهر للدورية ، أو إذا كانت موجودة فإنه يمكن إهمالها . في النظرية الاقتصادية فإننا غالبا ما نطلب بيانات لعدد قد يصل إلى فترة 20 سنة قبل أن تبدأ الدورات في الظهور .

قابلية البيانات لمقارنة :

١٨-١٦ كيف يمكن تعديل بيانات المسألة ٨-١٦ بحيث نمنح مسموحات السنوات الكبيسة 1952 و 1956 ؟

الحل :

في السنة الكبيسة ، فبراير 29 يوما بدلا من 28 يوما كالمعتاد . لتحقيق قابلية البيانات للمقارنة فإننا نقوم بضرب بيانات شهر فبراير في السنة الكبيسة في 28/29 . بهذا فإنه في الجدول ١٢،١٦ للمسألة ٨-١٦ .

قيمة شهر فبراير 1952 يوضع بدلا منها $298 = (309) (28/29)$

قيمة شهر فبراير 1956 يوضع بدلا منها $398 = (412) (28/29)$

هذه التعديلات لم تستخدم عند حساب الدليل الموسمي (أنظر المسائل ١٦-١٦، ١٢-١٦) . وعلى أية حال ، فإن تأثيرها على النتائج يمكن إهماله (انظر المسألة ١٦-٥٢) .

التنبؤ :

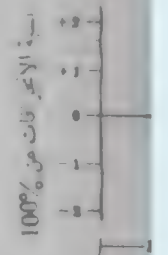
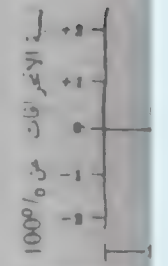
١٩-١٦ (١) باستخدام البيانات في الجدول ١٢-١٦ بالمسألة ٨-١٦ ، تنبؤ بالطاقة الكهربائية الشهرية المستخدمة في إضاءة الشوارع والطرق السريعة في الولايات المتحدة خلال سنة 1959

(ب) قارن القيم المتنبؤ بها بالقيم الفعلية .

الحل :

(١) القيم الشهرية المستقبلية تعطى بالمعادلة $Y = TCSI$ ، حيث يجب أن نقدر T, C, S, I

النتيجة كما هو



١٥ ، كما هو

بهر متوسط متحرك

لاهتمام أن النهايات

مير . كذلك ، فإن

محطات يظهر أنها

اتجاهات مضادة ،

قائمة أن تحذف

ريا

لتقدير الاتجاه العام T ، هناك عدد من الطرق يمكن أن تستخدم . من الرسم البياني للمساءلة ١٦-١٤ (أنظر الشكل ١٦-٥) يتضح أنه في إمكاننا الحصول على تقدير دقيق للقيم الاتجاهية في المستقبل بتوفيق خط القيم الاتجاهية في السنتين الأخيرتين ، على سبيل المثال ، وهذا يمكن عمله باستخدام طريقة المربعات الصغرى أو من الطرق الأخرى التي سبق مناقشتها .

سوف نحصل على القيم بطريقة

سهلة نسبياً وهي طريقة شبهات

المتوسطات مطبقة على النتائج التي

حصلنا عليها في المسألة ١٦-١٠ .

في الجدول المرفق قسمنا الـ 12

شهر متوسطات متحركة مركزية

إلى مجموعتين متساويتين للأشهر من

يوليو 1956 إلى يونية 1958 .

من متوسطات البيانات في

كل جزء يتضح أن هناك زيادة مقدارها

$31.9 = 441.3 - 409.4$ في

12 شهر أو $2.66 = 31.9 / 12$

في الشهر . بالإضافة المتتالية 2.66

إلى 456.9 ، وهو آخر رقم متاح ويقابل شهر يونيو 1958 ، فإنه يمكن أن نحصل على القيم الاتجاهية من سنة 1959 كما هو موضح بالعمود الثالث بالجدول ١٦-٣٤ (١) أدناه .

لتقدير عنصر الموسمية S ، فإننا نستخدم الدليل الموسمي الذي حصلنا عليه في المسألة ١٦-١٠ ، على الرغم من أنه يمكن أن نستخدم الدليل الموسمي الذي حصلنا عليه باستخدام طرق أخرى . هذا الدليل الموسمي قد كرر في الصف الرابع بالجدول ١٦ - ٣٤ (١) .

من الشكل ١٦-٦ بالمسألة ١٦-١٦ يتضح أن تقدير العناصر البورية وغير المنتظمة CI يختلف من 100% بمقدار أقل من 2.5% بهذا فلو افترضنا أن $CI=100\%$ أي $CI=1$ أو $Y = T \times S \times C \times I = (T \times S)(C \times I) = T \times S$ فإننا يجب ألا نكون أعمل بأكثر من 2.5% في Y .

جدول ١٦ - ٣٣

يولية	1956	396.2	يولية	1957	425.9
المستطس	1956	398.8	المستطس	1957	429.2
سبتمبر	1956	401.3	سبتمبر	1957	432.2
اكتوبر	1956	403.9	اكتوبر	1957	434.8
نوفمبر	1956	406.4	نوفمبر	1957	437.2
ديسمبر	1956	408.6	ديسمبر	1957	439.8
يناير	1957	410.6	يناير	1958	442.5
فبراير	1957	412.7	فبراير	1958	445.1
مارس	1957	414.9	مارس	1958	447.8
ابريل	1957	417.1	ابريل	1958	450.7
مايو	1957	419.9	مايو	1958	453.6
يونية	1957	422.8	يونية	1958	456.9
المجموع		4913.2	المجموع		5295.7
المتوسط		409.4	المتوسط		441.3

(١)
بأ

١٦

-١٦

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيه	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
475.5	478.2	480.8	483.5	486.2	488.8	491.5	494.1	496.8	499.5	502.1	504.8
119.8	107.2	103.4	93.5	87.2	81.5	83.4	89.5	96.4	106.0	112.3	119.6
570	513	497	452	424	398	410	442	479	529	564	604

بضرب قيم T لسنة 1959 بـ S المقابلة (تذكر أن S هي نسبة مئوية) فإننا نحصل على القيم الشهرية المتوقعة أو المسطرة لسنة 1959 المسطرة في الصف الأخير بالجدول ٣٤-١٦ (١) أعلاه . على سبيل المثال ، القيمة المتوقعة ليناير 1959 هي $570 = (1.198)(475.5)$ وهكذا .

(ب) القيم الشهرية الفعلية لسنة 1959 ، موضحة بالجدول التالي ٣٤-١٦ (ب) وهي تظهر اتفاقا جيدا مع القيم المتنبؤ بها .

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
563	509	497	454	424	404	415	446	478	524	561	594

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

مسائل إضافية

الحركات المميزة في السلاسل الزمنية :

٢٠-١١ إلى أي من التحركات المميزة في السلاسل الزمنية ترتبط بصورة أساسية مايل :

(١) كساد مؤقت (ب) زيادة العمالة في خلال أشهر الصيف

(ج) انخفاض معدل الوفيات الراجع إلى التقدم في العمر .

(د) اضطراب في صناعة الصلب .

(هـ) الزيادة المستمرة في الطلب على سيارات الركوب الصغيرة .

ج : (١) دورية (ب) موسمية (ج) اتجاه عام طويل المدى .

(د) غير منتظمة (هـ) اتجاه عام طويل المدى .

١٤-١١ (أ) أنظر

يحق خط القيم

هجات الصغرى

يوليه	19
أغسطس	19
سبتمبر	19
أكتوبر	19
نوفمبر	19
ديسمبر	19
يناير	19
فبراير	19
مارس	19
أبريل	19
مايو	19
يونيه	19

مجموع

وسط

على القيم الاتجاهية

١١ ، على الرغم من

في قد كرر في الصف

يختلف عن 100%

$$Y = T \times C \times S \times I$$

المتوسطات المتحركة :

٢١-١٦ إذا أُعطينا الأرقام $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1$ حدد متوسطا متحركا من الرتبة

(أ) الثانية (ب) الثالثة (ج) الرابعة (د) الخامسة

ج : (أ) $0.5, -0.5, -0.5, 0.5, 0.5, -0.5, -0.5, 0.5$

(ب) $0, -1/3, 0, 1/3, 0, -1/3, 0, 1/3$ (ج) $0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0$ (د) $1/5, 0, -1/5, 0, 1/5$

٢٢-١٦ أثبت أنه إذا كانت متتالية من الأرقام لها دورة مقدارها N (أي أن المتتالية تعيد نفسها بعد N حد) فإن كل متوسط متحرك رتبته أقل من N له دورة N . فسر إجابتك بالرجوع إلى المسألة ٢١-١٦.

٢٣-١٦ (أ) في المسألة ٢٢-١٦ ماذا يحدث في حالة المتوسط المتحرك من الدرجة N ؟ (ب) ماذا يحدث إذا كانت الرتبة أكبر من N ؟ فسر إجابتك بالرجوع إلى المسألة ٢١-١٦.

٢٤-١٦ أثبت أنه إذا كان كل رقم في متتالية يزيد (أو ينقص) بمقدار ثابت ، فإن المتوسط يزيد أيضا (أو ينقص) بمقدار ثابت.

٢٥-١٦ أثبت أنه إذا كان كل رقم في متتالية يضرب في (أو يقسم على) ثابت يختلف عن الصفر ، فإن المتوسط المتحرك يضرب أيضا في (أو يقسم على) هذا الثابت.

٢٦-١٦ أوجد المتوسط المتحرك المرجح للأرقام في المسألة ٢١-١٦ (ب) ، (ج) ، (د) إذا كانت الأوزان هي على الترتيب : (ب) $1, 2, 1$ (ج) $1, 2, 2, 1$ (د) $1, 2, 2, 2, 1$ قارن بنتائج المسألة ٢١-١٦.

١٦ ج : (ب) $0.5, 0, 0.5, 0, 0.5, 0, 0.5, 0$ (ج) $0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5$ (د) $0, 0, 0, 0, 0$

١٦ ٢٧-١٦ (أ) أثبت الخصائص في المسائل ٢٤-١٦ و ٢٥-١٦ للمتوسطات المتحركة المرجحة (ب) هل نتائج المسألة ٢٢-١٦ تنطبق في حالة المتوسطات المتحركة المرجحة ؟

٢٨-١٦ متتالية بها (أ) 24 (ب) 25 (ج) 200 رقم . ما هو عدد الأرقام الموجودة إذا استخدم متوسط متحرك من الرتبة 5 ؟

-١٦

ج : (أ) 20 ، (ب) 21 ، (ج) 196

٢٩-١٦ متتالية بها M . عدد (أ) أثبت أن متوسط متحرك من الدرجة N سيكون به $M - N + 1$ رقم . فسر إجابتك باستخدام قيم مختلفة لـ N و M (ب) ناقش الحالة عند $M = N$.

٣٠-١٦ الجدول ٣٥-١٦ يوضح متوسط الاستهلاك الشهري ، بآلاف البالات من القطن المحل والأجنبي بالولايات المتحدة الأمريكية للسنوات ١٩٥٨ - ١٩٤٥ . أوجد (أ) ٢ سنة متوسط متحرك ، (ب) ٢ سنة متوسط متحرك مركزي ، (ج) ٣ سنوات متوسط متحرك ، (د) ٤ سنوات متوسط متحرك مركزي (هـ) ٦ سنوات متوسط متحرك مركزي .

جدول ٣٥-١٦

السنة	١٩٤٩	١٩٥٠	١٩٥١	١٩٥٢	١٩٥٣	١٩٥٤	١٩٥٥	١٩٥٦	١٩٥٧	١٩٥٨
استهلاك القطن بالولايات المتحدة (بآلاف البالات)	656	804	836	765	777	711	755	747	696	677

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

ج : (أ) 730, 820, 800, 771, 744, 733, 751, 722, 686

(ب) 775, 810, 786, 758, 738, 742, 736, 704

(ج) 765, 802, 793, 751, 748, 738, 733, 707

(د) 780, 784, 762, 750, 737, 723

(هـ) 766, 770, 753, 734

٣١-١١ ارم المتوسطات المتحركة في المسألة ٣٠-١٦ مع البيانات الأصلية وناقش النتائج التي حصلت عليها .

٣٢-١١ (أ) وضع أن ٢ سنة متوسط متحرك بالمسألة ٣٠-١٦ (ب) يكافئ ٣ سنوات متوسط متحرك مرجح بأوزان 1, 2, 1 على الترتيب . مثل بحسابات رقمية مباشرة . (ب) وضع أن ٦ سنوات متوسط متحرك مركزي بالمسألة ٣٠-١٦ (ج) يكافئ متوسطا متحركا مرجحا بأوزان مناسبة .

٣٣-١١ (أ) لبيانات المسألة ٣٠-١٦ حدد متوسطا متحركا مرجحا من الرتبة ٣ إذا كانت الأوزان المستخدمة 1, 4, 1 .

(ب) ارم هذا المتوسط المتحرك وقارن بالمسألة ٣٠-١٦ (ج)

ج : 785, 819, 779, 764, 729, 746, 740, 701

٣٤-١٦ الجدول ٣٦-١٦ يوضح اجمالي المبيعات الشهرية بالآلاف لصنع عربات ركوب بالولايات المتحدة خلال السنوات 1953 - 1958 .

كون (١) 12 شهرا متوسطا متحركا (ب) 12 شهرا متوسطا متحركا مركزيا (ج) 6 أشهر متوسط متحرك مركزي .

في الأجزاء (ب) و (ج) ارم المتوسط المتحرك مع البيانات الأصلية وقارن بين النتائج .

جدول ٣٦-١٦

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونية	يولية	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	
452.6	485.3	566.1	595.8	548.3	585.7	596.9	512.7	476.2	528.8	378.9	389.6	1953
454.6	446.7	531.5	534.7	497.1	507.1	451.7	445.3	301.0	221.2	498.2	669.9	1954
635.5	677.7	791.3	753.4	721.1	647.7	658.7	620.6	467.8	505.2	746.0	695.1	1955
591.0	560.9	583.2	552.9	474.0	445.8	441.0	417.0	203.9	352.1	576.7	617.6	1956
628.0	570.0	585.7	541.7	537.1	496.3	484.7	521.3	318.3	291.1	583.8	555.2	1957
478.4	396.2	359.5	322.5	352.1	342.2	316.4	195.0	102.7	272.2	511.9	608.7	1958

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

تقدير الاتجاه العام :

٣٥-١٦ حصل على القيم الاتجاهية لبيانات المسألة ٣٠-١٦ باستخدام طريقة أشباه المتوسطات حيث يأخذ المتوسط :
(١) الوسط الحسابي (ب) الوسيط . كون رسما يوضح النتائج التي حصلت عليها .

ج : (١) 788, 778, 768, 758, 747, 737, 727, 717, 707, 697

(ب) 803, 790, 777, 764, 751, 737, 724, 711, 698, 685

٣٦-١٦ حل المسألة ٣٠-١٦ باستخدام (١) طريقة التمهيد باليد (ب) متوسط متحرك من رتبة مناسبة . قارن بنتائج المسألة ٣٥-١٦ .

٣٧-١٦ (١) استخدم طريقة المربعات الصغرى لتوفيق خط لبيانات المسألة ٣٠-١٦ .

(ب) من النتائج في (١) أوجد القيم الاتجاهية . قارن بنتائج المسائل ٣٥-١٦ و ٣٦-١٦

ج : (١) $Y = 742.4 - 3.358X$ ، حيث X نصف سنة ونقطة الأصل هي 1 يناير 1954 .

(ب) 758.0, 754.7, 751.3, 747.9, 744.6, 741.2, 737.9, 734.5, 731.1, 727.8

٣٨-١٦ (١) وفق القطع $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2$ لبيانات المسألة ٨-١٦ باستخدام المتوسطات بالجدول

١٣-١٦ بالمسألة ٩-١٦ (ب) قارن النتائج في (١) بخط المربعات الصغرى بالمسألة ٩-١٦ وقارن بالقيم الاتجاهية .

ج : (١) $Y = 351.1 + 13.188X + 0.3110X^2$ حيث X مقاسة بوحدات نصف سنوية ونقطة الأصل عند 1 يناير 1955 .

٣٩-١٦ حصل على القيم الاتجاهية لبيانات المسألة ١٦-٣٤ باستخدام (١) طريقة أشباه المتوسطات ، (ب) طريقة التمهيد باليد ، (ج) 12 شهر متوسط ، متحرك مركزي ، (د) منحني مربعات صغرى ملامم .
(للتحديد ذلك استخدم رسم البيانات الأصلية المستخدم في المسألة ١٦-٣٤) ناقش مزايا وعيوب كل طريقة .

تغير التغيرات الموسمية - الدليل الموسمي :

٤٠-١٦ الجدول ١٦-٣٧ يوضح ، لبلد معينة ، الانتاج الشهري من الزبدة - بملايين الكيلوجرامات خلال السنوات 1951 - 1958 .

(١) ارسم البيانات (ب) كون الدليل الموسمي مستخدما طريقة متوسط النسب المثوية .

عدل البيانات لتأخذ في الاعتبار السنوات الكبيسة قبل الحصول على الدليل .

جدول ١٦-٣٧

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونية	يولية	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
1951	85.6	80.9	92.2	101.8	132.6	141.2	130.5	119.0	93.6	86.6	68.4
1952	78.7	78.8	91.5	102.5	135.0	128.0	117.7	105.7	92.1	87.7	75.9
1953	103.9	101.9	121.4	133.5	156.0	154.0	135.6	118.7	95.0	91.6	91.3
1954	118.7	116.6	143.3	142.0	164.5	160.9	129.7	109.4	92.6	87.8	86.8
1955	108.1	104.3	121.1	129.4	157.9	151.9	123.0	102.1	91.9	94.7	92.7
1956	114.6	114.1	129.6	135.4	151.9	149.0	127.6	109.8	92.4	93.1	92.3
1957	115.3	110.3	124.6	132.3	159.3	148.1	125.8	106.9	90.1	100.3	94.1
1958	118.6	113.4	129.5	130.3	150.6	144.7	126.9	97.7	86.7	91.9	90.9

٤١-١٦ أوجد الدليل الموسمي لبيانات المسألة ١٦-٤٠ باستخدام طريقة الاتجاه العام للنسب المثوية أو الاتجاه العام للنسب . للحصول على القيم الاتجاهية ، وفق منحني مربعات صغرى ملامم للمتوسطات الشهرية للسنوات المعطاة .

٤٢-١٦ أوجد الدليل الموسمي لبيانات المسألة ١٦-٤٠ باستخدام طريقة النسب المثوية لمتوسط المتحرك أو نسبة المتوسط المتحرك .

٤٣-١٦ أوجد الدليل الموسمي لبيانات المسألة ١٦-٤٠ باستخدام طريقة الوصلة النسيبة

٤٤-١٦ الجدول ١٦-٣٨ يوضح القيم المقدرة لمبيعات محلات البيع بالجزئة بملايين الدولارات وذلك بالولايات المتحدة خلال السنوات 1951 - 1958

(١) ارسم البيانات

(ب) أوجد الدليل الموسمي باستخدام طريقة متوسط النسب المثوية .

ت المتحدة

(٦ أشهر

ديسمبر	37
389.6	49
669.9	74
695.1	57
617.6	58
555.2	51
608.7	

مذ متوسط

مناسبة . قارن

ناير 1954

سطات بالجدول

٩-١٦ وقارن

ية ونقطة الأصل

جدول ١٦-٣٨

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	
12-63	11-72	13-43	12-53	13-29	13-27	12-36	13-27	13-10	13-86	13-39	15-38	1951
11-84	11-74	12-74	13-40	14-85	13-81	13-40	13-45	13-62	14-82	14-01	16-91	1952
13-05	12-33	13-96	14-17	14-66	14-58	14-38	14-18	14-08	14-95	13-96	16-44	1953
12-34	12-06	13-54	14-32	14-25	14-66	14-39	13-90	14-14	14-66	14-53	17-87	1954
13-15	12-64	13-55	15-72	16-11	16-58	15-38	16-19	15-58	16-13	16-49	19-38	1955
13-73	13-55	15-72	16-11	17-20	17-11	16-86	17-49	16-37	16-95	17-13	19-84	1956
14-74	14-06	15-79	16-44	17-20	17-11	16-86	17-49	16-37	16-95	17-13	19-84	1957
15-29	13-78	15-55	16-27	17-36	16-60	16-60	17-00	16-33	17-36	17-04	21-17	1958

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

٤٥-١٦ أوجد الدليل الموسمي لبيانات المسألة ١٦-٤٤ باستخدام طريقة النسب المتوقعة للاتجاه العام أو النسبة للاتجاه العام.

٤٦-١٦ أوجد الدليل الموسمي لبيانات المسألة ١٦-٤٤ باستخدام طريقة النسبة للمتوسط المتحرك.

٤٧-١٦ أوجد الدليل الموسمي لبيانات المسألة ١٦-٤٤ باستخدام طريقة الوصلات النسبية.

٤٨-١٦ الجدول ١٦-٣٩ يوضح أجور الشحن بمربرات السكك الحديدية بالولايات المتحدة بآلاف عربات السكك الحديدية خلال السنوات 1951 — 1958 . (١) ارسم هذه البيانات .

(ب) أوجد الدليل الموسمي باستخدام طريقة متوسط النسب المتوقعة.

جدول ١٦-٣٩

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	
3661	2834	2999	3152	3977	3295	3807	3307	3312	4317	3139	2700	1951
3562	2911	2868	2912	3678	2606	2969	3149	3364	4156	3139	2672	1952
3351	2730	2801	2957	3883	3204	3758	3229	3153	4024	2797	2413	1953
2967	2462	2412	2445	3345	2730	3251	2708	2711	3629	2685	2518	1954
2505	2556	3256	2757	3754	3052	3015	3883	3148	3282	3758	2669	1955
2713	2751	3517	2971	3835	3143	2397	3700	3155	3284	3740	2641	1956
2565	2616	3446	2696	3558	2959	2708	3737	2849	2920	3223	2221	1957
2164	2108	2702	2105	2729	2489	2138	3146	2570	2733	2462	2188	1948

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

٤٩-١٦ حل المسألة ١٦-٤٨ بطريقة النسبة إلى الاتجاه العام .

٥٠-١٦ حل المسألة ١٦-٤٨ بطريقة النسبة إلى المتوسط المتحرك .

٥١-١٦ حل المسألة ١٦-٤٨ بطريقة الوصلات النسبية .

١٦-٥٢ أعد حل (أ) المسألة ١٦-٨ ، (ب) المسألة ١٦-٩ ، (ج) المسألة ١٠-١٠ (د) المسألة ١٦-١١ ، باستخدام البيانات بعد تعديلها لمراعاة الأشهر الكبيسة وحدد ما إذا كان التعديل يؤدي إلى تغيير معنوي في الدليل الموسمي النهائي الذي حصلت عليه .

١٦-٥٣ (أ) احسب الدليل الموسمي للسنوات الأربع الأخيرة والسنوات الأربع الأولى لبيانات المسألة ١٦-٨ باستخدام أى طريقة .

(ب) قارن الدليلين الذين حصلت عليهما واطرح الاختلاف إذا وجد .

تخليص البيانات من أثر الموسم :

١٦-٥٤ (أ) خلع بيانات المسألة ١٦-١٠ من أثر الموسم ، مستخدماً أى دليل موسمي من الذي حصلت عليه في المسائل ١٦-٤٠ إلى ١٦-٤١ .

(ب) ارسم البيانات المخلصة من أثر الموسم وفسر النتائج .

١٦-٥٥ (أ) عدل بيانات المسألة ١٦-٤٤ لاستبعاد التغيرات الموسمية باستخدام أى من نتائج المسائل ١٦-٤٤ إلى ١٦-٤٧ .

(ب) ارسم البيانات المعدلة موسمياً وفسر النتائج التي حصلت عليها .

١٦-٥٦ (أ) خلع بيانات المسألة ١٦-٤٨ من أثر الموسم باستخدام الأدلة الموسمية للمسائل ١٦-٤٨ إلى ١٦-٥١ .

(ب) ارسم البيانات المعدلة موسمياً وفسر النتائج التي حصلت عليها .

تقدير التغيرات الدورية وغير المنتظمة :

١٦-٥٧ (أ) عدل بيانات المسألة ١٦-٥٤ لاستبعاد أثر الاتجاه العام باستخدام أى طريقة .

(ب) ارسم البيانات التي حصلت عليها

(ج) احسب 3 أشهر متوسط متحرك أو 5 أشهر متوسط متحرك للبيانات في (أ) .

(د) فسر أى تذبذبات مشاهدة وعلى وجه الخصوص حدد ما إذا كان هناك أى وجود لتحركات دورية .

١٦-٥٨ الجدول ١٦-٤٠ يوضح ، البلد المشار إليه بالمسألة ١٦-٤٠ ، متوسط الانتاج الشهري من الزبد بملايين الكيلوجرامات خلال السنوات 1958 — 1930 .

(أ) ارسم البيانات وناقش امكانية وجود دورات بها .

(ب) قارن النتائج التي توصلت إليها في (أ) مع النتائج التي توصلت إليها في المسألة ١٦-٥٧ (ج) وفسر أى تعارض .

فبراير

13.1

14.0

13.9

14.2

15.7

16.4

17.1

17.0

الاتجاه العام

عربات السكك

نوفمبر

3139

3139

2797

2685

3758

3740

3223

2462

جول ١٦-٤٠

السنة	1944	1943	1942	1941	1940	1939	1938	1937	1936	1935	1934	1933	1932	1931	1930
المتوسط الشهري	124.0	139.5	147.0	156.0	153.1	148.5	148.8	135.3	135.8	136.0	141.2	146.9	141.1	139.0	133.1

السنة	1958	1957	1956	1955	1954	1953	1952	1951	1950	1949	1948	1947	1946	1945
المتوسط الشهري	115.5	117.7	117.8	115.2	120.7	117.7	99.0	100.2	115.5	117.7	100.9	110.8	97.6	113.6

١٦-٥٩ حل المسائل ١٦-٥٧ و ١٦-٥٨ البيانات المخلصة من أثر الموسم بالمسألة ١٦-٥٦. المتوسط الشهري للتأمين على حمولات عربات السكك الحديدية معبرا عنه بآلاف عربات السكك الحديدية موضح للسنوات 1958 - 1930 بالجدول التالي

جول ١٦-٤١

السنة	1944	1943	1942	1941	1940	1939	1938	1937	1936	1935	1934	1933	1932	1931	1930
المتوسط الشهري	3617	3537	3564	3529	3030	2826	2538	3139	3009	2625	2570	2435	2348	3096	3823

السنة	1958	1957	1956	1955	1954	1953	1952	1951	1950	1949	1948	1947	1946	1945
المتوسط الشهري	2517	2958	3154	3136	2826	3185	3165	3375	3242	2993	3560	3709	3445	3493

١٦-٩٠ في تعديل البيانات لتخلص من أثر الاتجاه العام والتغيرات الموسمية ، هل يحدث اختلاف في النتائج حسب أى منهم الذى نبدأ به أولا ؟ مثل إجابتك (١) نظريا (ب) باستخدام أحد السلاسل الزمنية بالمسائل ١٦-٤٠ ، ١٦-٤٤ أو ١٦-٤٨

١٦-٩١ (١) حل المسألة ١٦-١٧ باستخدام 12 شهرا متوسلا متحركا مركزيا وارسم البيانات (ب) ماهى الاستنتاجات التى تحصل عليها من النتائج فى (١) ؟

١٦-٩٢ (١) أوجد التوزيع التكرارى لحجم التغيرات غير المنتظمة الموجود بالمسألة ١٦-١٥ و ١٦-١٦ .
(ب) حل التوزيع التكرارى الذى حصلت عليه فى (١) يمكن تقريبه بالتوزيع الطبى ؟ إذا كان هذا صحيحا أذكر مبررات ذلك

التنبؤ :

١٦-٩٣ (١) استخدم أى نتائج بالمسائل ١٦-٤٠ إلى ١٦-٤٣ ، ١٦-٥٧ و ١٦-٥٨ التنبؤ بانتاج الزيت خلال سنة 1959 .

(ب) ناقش المصادر الممكنة للخطأ .

(ج) قارن تنبؤاتك بالقيم الفعلية لسنة 1959 للمطاة بالجدول ١٦-٤٣ .

جدول ١٦-٤٣

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونية	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
116.3	108.2	121.4	126.8	143.4	135.6	112.5	90.9	82.6	91.2	92.1	108.0

١٦-٩٤ (١) استخدم أى نتائج فى المسائل ١٦-٤٤ إلى ١٦-٤٧ التنبؤ بمبيعات جميع متاجر التجزئة بالولايات المتحدة خلال سنة 1959 .

(ب) ناقش المصادر الممكنة للخطأ .

(ج) قارن تنبؤاتك بالقيم الفعلية لسنة 1959 للمطاة بالجدول ١٦-٤٣ .

جدول ١٦-٤٣

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونية	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
16.23	14.96	17.19	17.59	18.60	18.71	18.33	18.05	17.57	19.10	17.64	21.45

المصدر : استقصاء الأعمال التجارية

١٦-٩٥ (١) استخدم أى نتائج فى المسائل ١٦-٤٨ إلى ١٦-٥١ و ١٦-٥٩ التنبؤ بالشحن على عربات السكك الحديدية بالولايات المتحدة خلال سنة 1959 .

(ب) ناقش المصادر الممكنة للخطأ .

(ج) قارن تنبؤاتك بالقيم الفعلية لسنة 1959 للمطاة بالجدول ١٦-٤٤

جدول ١٦-٤٤

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونية	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
2742	2291	2398	2489	3419	2813	2249	2712	2190	2908	2403	2376

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

1930	1931	1932
133.1	139.0	141.1

1945	1946
113.6	97.6

برى التأمين
1930 - 1

1930	1931	1932
3823	3096	2341

1945	1946
3493	3445

اتج حسب
نية بالمسائل

(ب) ما هي

جميعاً أذكر

مسائل متنوعة

١٦-٩٩ حلل كلا من السلاسل الزمنية المعطاة بالجدول ١٦-٤٥ والتي تشير إلى بيانات أحد الدول . يمكن استخدام بيانات السنوات حتى 1958 . إذا كان هذا مرغوباً فيه . وتنبؤ بالنتائج لسنة 1959 ، مقارناً بالبيانات الفعلية لهذه السنة . لاحظ أن البيانات للسنوات 1958 — 1929 في الجزء الأول من الجدول معطاة على أساس متوسطات شهرية لكل سنة ، بينما البيانات في نهاية الجدول معطاة على أساس قيم شهرية لكل سنة

جدول ١٦-٤٥

السنة	وحدات البناء المستديرة غير الريفية تحت التأسيس (بالآلاف)	مجموع الاعلانات في الصحف في 52 مدينة (ملايين السطور)	الانتاج من ألواح الخشب (آلاف الأمتار المكعبة)	إنتاج الألمنيوم الخام (آلاف الأطنان)	قيمة نشاط الأبنية العامة الجديدة (ملايين الدولارات)
1929	42.4	158.1	3074	9.50	207
1930	27.5	137.9	2171	9.54	238
1931	21.2	122.2	1377	7.40	222
1932	11.2	97.1	902	4.37	155
1933	7.8	88.8	1225	3.55	137
1934	10.5	98.2	1291	3.09	184
1935	18.4	103.9	1628	4.97	186
1936	26.6	115.0	2030	9.37	293
1937	28.0	117.5	2166	12.20	258
1938	33.8	102.1	1804	11.95	285
1939	42.9	103.6	2096	13.63	317
1940	50.2	105.7	2411	17.19	302
1941	58.8	109.4	2801	25.76	479
1942	29.7	103.5	3028	43.47	888
1943	15.9	116.4	2857	76.68	527
1944	11.8	113.4	2745	64.70	256
1945	17.4	116.0	2344	41.26	200
1946	55.9	144.1	2843	34.14	186
1947	70.8	167.4	2950	47.65	277
1948	77.6	188.6	3064	51.96	392
1949	85.4	191.8	2742	50.29	522
1950	116.3	203.3	3242	59.89	572
1951	90.9	206.5	3126	69.74	771
1952	93.9	208.8	3122	78.11	898
1953	92.0	217.6	3062	104.33	936
1954	101.7	215.1	3030	121.71	973
1955	110.7	237.0	3154	130.48	977
1956	93.2	242.6	3219	139.91	1059
1957	86.8	235.8	2851	137.31	1168
1958	100.8	223.8	2798	130.46	1284

البيانات أعلاه تشير إلى متوسطات شهرية

جول ١٦-٤٥ (تابع)

السنة و الشهر	وحدات البناء المستديعة غير الريفية تحت التأسيس (بالآلاف)	مجموع الاعلانات في الصحف في مدينة (مدين الطور	الانتاج من الواح الخشب (آلاف الأمتار المكعبة)	إنتاج الألومنيوم الخام (آلاف الأطنان)	قيمة نشاط الأنشطة العامة الجديدة ملايين الدولارات
1952					
يناير	64.9	178.1	2694	76.93	671
فبراير	77.7	184.6	2766	72.37	636
مارس	103.9	213.2	2872	77.07	722
أبريل	106.2	218.4	3123	76.88	829
مايو	109.6	225.6	3049	80.80	924
يونية	103.5	209.3	3214	77.48	1002
يولية	102.6	175.4	3213	78.37	1037
أغسطس	99.1	186.6	3489	85.18	1089
سبتمبر	100.8	214.5	3569	76.88	1109
أكتوبر	101.1	245.0	3596	77.31	1071
نوفمبر	86.1	234.9	3052	74.64	922
ديسمبر	71.5	219.8	2825	83.42	769
1953					
يناير	72.1	182.7	2769	89.90	732
فبراير	79.2	186.1	2754	92.65	719
مارس	105.8	231.7	3091	104.46	798
أبريل	111.4	232.6	3280	102.07	880
مايو	108.3	244.4	3071	105.46	953
يونية	104.6	216.0	3219	104.15	1034
يولية	96.7	188.0	3141	109.29	1089
أغسطس	93.2	198.6	3237	110.55	1097
سبتمبر	95.1	219.6	3266	109.33	1143
أكتوبر	90.1	244.4	3326	108.22	1084
نوفمبر	81.5	241.3	2893	105.64	933
ديسمبر	65.8	224.3	2695	110.29	774
1954					
يناير	66.4	182.9	2746	116.25	745
فبراير	75.2	180.7	2906	110.48	730
مارس	95.2	216.2	3361	122.34	792
أبريل	107.7	233.3	3307	120.43	888
مايو	108.5	234.6	3324	125.14	998
يونية	116.5	216.6	3124	120.76	1088
يولية	116.0	185.8	2724	126.16	1159
أغسطس	114.3	199.4	2956	125.30	1202
سبتمبر	115.7	218.9	3279	120.33	1205
أكتوبر	110.7	244.9	3363	125.09	1103
نوفمبر	103.6	238.5	3154	121.25	964
ديسمبر	90.6	229.5	3085	127.04	804
1955					
يناير	87.6	196.2	2707	128.20	742
فبراير	89.9	194.4	2845	116.24	697
مارس	113.8	242.5	3268	130.27	776
أبريل	132.0	243.8	3147	126.39	898
مايو	137.6	260.4	3327	131.13	1030
يونية	134.5	243.7	3491	127.63	1107
يولية	122.7	212.3	2946	132.67	1165
أغسطس	124.7	219.8	3554	133.55	1216
سبتمبر	114.9	246.2	3442	130.61	1208
أكتوبر	105.8	273.1	3334	134.66	1131
نوفمبر	89.2	268.5	3009	133.69	971
ديسمبر	76.2	242.5	2788	140.75	783

البيانات أعلاه تشير إلى قيم شهرية

مستخدم بيانات
ات الفعلية لهذه
باس متوسطات

قيمة نشاط
الأنشطة العامة
الجديدة (ملايين
الدولارات)

207
238
252
155
137
184
186
293
258
285
317
302
479
888
527
256
200
186
277
392
522
572
771
898
936
973
977
1059
1168
1284

جدول ١٦-٤٥ (تابع)

القيمة نشاط الأبنية العامة الجديدة (ملايين الدولارات)	الانتاج الألومنيوم الحام (آلاف الأطنان)	الانتاج من ألواح الخشب (آلاف الأمتار المكعبة)	مجموع الاعلانات في الصحف في مدينة (ملايين السلور)	وحفات البناء المستديرة غير الربحية تحت التأسيس (بالآلاف)	السنة و الشهر
741	140.39	2991	212.2	75.1	1955 يناير
700	132.76	2993	218.3	78.4	فبراير
774	145.90	3182	251.3	98.6	مارس
932	144.73	3245	261.0	111.4	أبريل
1099	150.80	3545	268.5	113.7	مايو
1223	145.73	3437	239.3	107.4	يونيو
1290	151.62	3175	214.0	101.1	يوليو
1349	92.41	3669	227.3	103.9	أغسطس
1341	132.32	3263	244.1	93.9	سبتمبر
1296	149.13	3496	269.9	93.6	أكتوبر
1066	145.08	3036	262.0	77.4	نوفمبر
901	148.39	2597	243.1	63.6	ديسمبر
896	147.03	2693	210.5	64.2	1956 يناير
793	119.06	2687	207.1	65.8	فبراير
885	135.71	2914	249.5	87.0	مارس
1055	139.15	3003	245.4	93.7	أبريل
1204	145.17	3113	265.6	103.0	مايو
1326	138.01	2952	240.6	99.9	يونيو
1303	142.04	2793	204.0	97.8	يوليو
1436	143.45	3194	216.4	100.0	أغسطس
1473	129.28	2970	241.3	91.9	سبتمبر
1453	133.76	3097	259.0	97.0	أكتوبر
1170	135.02	2559	250.0	78.2	نوفمبر
1023	140.04	2239	239.5	63.4	ديسمبر
951	139.91	2526	197.1	67.9	1957 يناير
861	121.98	2388	188.3	66.1	فبراير
938	134.02	2548	227.8	81.4	مارس
1109	125.00	2676	228.0	99.1	أبريل
1274	126.33	2824	240.9	108.5	مايو
1422	115.33	2889	226.2	113.0	يونيو
1486	118.54	2810	198.0	112.8	يوليو
1555	125.42	3056	211.6	124.0	أغسطس
1604	125.94	3143	224.6	121.0	سبتمبر
1600	139.84	3272	259.2	115.0	أكتوبر
1403	140.96	2731	252.9	109.4	نوفمبر
1209	152.30	2716	231.0	91.2	ديسمبر
1130	156.7	2650	193.5	87.0	1958 يناير
1032	142.1	2642	196.1	94.5	فبراير
1126	157.2	2964	236.5	121.0	مارس
1285	155.2	3121	255.0	142.2	أبريل
1468	163.9	3163	263.8	137.0	مايو
1637	167.3	3216	237.0	136.7	يونيو
1611	179.2	3136	220.4	128.8	يوليو
1608	172.8	3171	234.4	129.3	أغسطس
1528	168.2	3324	246.9	120.3	سبتمبر
1420	173.7	3304	271.3	105.5	أكتوبر
1119	153.7	2892	259.5	92.5	نوفمبر
1013	163.0	2947	250.9	83.7	ديسمبر

البيانات أعلاه تشير إلى قيم شهرية

الفصل السابع عشر

الأرقام القياسية

الرقم القياسي :

الرقم القياسي هو مقياس احصائي مصمم لظهور التغيرات في متغير أو مجموعة مرتبطة من المتغيرات بالنسبة للزمن ، المكان ، بلزاق ، أو أى خاصية أخرى مثل الدخل ، الوظيفة ، وغير ذلك . وتسمى أحيانا المجموعة من الأرقام القياسية لسنوات / أماكن مختلفة ، وما إلى ذلك ، بالسلسلة القياسية .

تطبيقات الأرقام القياسية :

باستخدام الأرقام القياسية يمكننا ، على سبيل المثال ، مقارنة الغذاء أو تكاليف المعيشة الأخرى في أحد المدن خلال سنة معينة بتلك خلال سنوات سابقة أو يمكن مقارنة انتاج الصلب خلال سنة معينة في أحد مناطق البله بالإنتاج في منطقة أخرى . رغم الرغم من أن الأرقام القياسية تستخدم أساسا في الأعمال والاقتصاد ، فإنه يمكن تطبيقها في مجالات كثيرة مختلفة . في مجال التعليم ، على سبيل المثال ، نستخدم الأرقام القياسية لمقارنة ذكاء الطلبة في مناطق مختلفة أو سنوات مختلفة .

كثير من الوكالات الحكومية والخاصة تقوم بحساب أرقام قياسية أو أدلة كاتسي في أغلب الأحيان ، وذلك بهدف تيسر بأحوال الأعمال والاقتصاد ، وكذلك الحصول على معلومات عامة ، وما إلى ذلك . فثلا هناك الأرقام القياسية للأجور ، لأرقام القياسية للإنتاج ، الأرقام القياسية للبطالة وغير ذلك . ومن أكثر الأرقام المعروفة الرقم القياسي لتكاليف المعيشة أو الرقم القياسي للمستهلك والذي يمدد مكتب احصاءات العمل . وفي كثير من عقود العمل يظهر شرط معين للتدرج والذي بمقتضاه نطى زيادة تلقائية في الأجور مقابلة لزيادة في الرقم القياسي لتكاليف المعيشة .

في هذا الفصل سنهم أساسا بالأرقام القياسية التي تظهر التغيرات بالنسبة للزمن ، على الرغم من أن الطرق التي ستشرح بكن تطبيقها على الحالات الأخرى .

مؤشر الأسعار :

من أبسط الأمثلة للرقم القياسي هو مؤشر السعر ، وهو نسبة السعر لساعة واحدة في فترة المقارنة إلى سعرها في فترة أخرى تسمى بفترة الأساس أو فترة الاسناد . وللتسهيل سوف نفترض أن الأسعار ثابتة لأي فترة . فإذا لم يكن هذا صحيحا فإنه يمكن استخدام متوسط ملائم للفترة حتى نجعل هذا الفرض صحيحا .

إذا كانت p_0 تمثل سعر السلعة خلال فترة الأساس و p_n سعرها خلال فترة المقارنة ، فإنه بالتعريف .

$$(1) \quad \text{مؤشر السعر} = \frac{p_n}{p_0} \times 100$$

يظهر منه بشكل عام في صورة نسبة مئوية بضربه في 100

وبشكل أكثر عمومية إذا كانت p_a ، p_b هي أسعار سلعة خلال الفترات a ، b على الترتيب ، فإن مؤشر السعر في الفترة b بالنسبة للفترة a يعرف بأنه p_b/p_a ويرمز له بالرمز $p_{b/a}$ ، ونسجد أن هذا الرمز مفيد فيما بعد . بهذا الرمز فإن مؤشر السعر بالمعادلة (1) يمكن أن يرمز له بالرمز $p_{0:n}$.

السنة و الشهر	
1955 يناير فبراير مارس أبريل مايو يونيو يوليه أغسطس سبتمبر أكتوبر نوفمبر ديسمبر	
1956 يناير فبراير مارس أبريل مايو يونيو يوليه أغسطس سبتمبر أكتوبر نوفمبر ديسمبر	
1957 يناير فبراير مارس أبريل مايو يونيو يوليه أغسطس سبتمبر أكتوبر نوفمبر ديسمبر	
1958 يناير فبراير مارس أبريل مايو يونيو يوليه أغسطس سبتمبر أكتوبر نوفمبر ديسمبر	8 9 12 14 13 13 12 12 12 10 92 83

ملاء تشير إلى قيم شهرية

مثال ١ : افترض أن أسعار المستهلكين لعنصر معين في السنوات 1960 ، 1955 هي 30 ، 52 بنسا جديدا على الترتيب . فإذا أخذنا 1955 كسنة أساس و 1960 سنة المقارنة ، فإن

$$\text{منسوب السعر} = P_{1955|1960} = \frac{\text{السعر في 1960}}{\text{السعر في 1955}} = \frac{52}{30} = 120\%$$

أو باختصار 120 ، بحذف علامة % كما هو متبع غالبا في المؤلفات الإحصائية . هذه النتيجة تعني ببساطة أن سعر العنصر سنة 1960 أصبح % 120 من سعره في سنة 1955 أي زاد بنسبة % 20 .

مثال ٢ : بأخذ 1960 كسنة أساس و 1955 هي سنة المقارنة في المثال ١ ، فإن

$$\text{منسوب السعر} = P_{1960|1955} = \frac{\text{السعر في 1955}}{\text{السعر في 1960}} = \frac{30}{52} = 83\frac{1}{3}\%$$

أو باختصار $83\frac{1}{3}$ وهذا يعني أنه في 1955 كان سعر العنصر هو $83\frac{1}{3}\%$ من سعره في 1960 ، أي أنه كان ينقص بنسبة $16\frac{2}{3}\%$.

لاحظ أن منسوب السعر لفترة معينة بالنسبة لنفس الفترة سيكون دائما 100% أو 100 . وعلى وجه الخصوص فإن منسوب السعر المقابل لفترة الأساس يصبح دائما 100 . وهذا يوضح الرمز الذي يستخدم غالبا في المؤلفات الإحصائية بكتابة ، على سبيل المثال ، 1955 = 100 للإشارة إلى أن سنة 1955 أخذت كسنة أساس .

خصائص مناسيب أسعار :

إذا كانت p_a ، p_b ، p_c ، ... تعبر عن أسعار الفترات a ، b و c ، ... على الترتيب ، فإن الخصائص التالية تتحقق لمناسيب الأسعار المرتبطة بها . الاتبانات تحصل عليها مباشرة من التعاريف .

١ - خاصية التطابق :

وهذه تقرر ببساطة أن منسوب السعر لفترة معينة بالنسبة لنفس الفترة تساوى 1 أو 100% .

$$p_{a|a} = 1 \text{ or } p_{a|b} = \frac{1}{p_{b|a}} \quad \text{٢ - خاصية الانعكاس في الزمن :}$$

وهذه تقرر أنه إذا أحلنا فترتين كلا محل الأخرى ، فإن مناسيب الأسعار المقابلة تكون كل منها معكوس الأخرى .

$$p_{a|b} p_{b|c} p_{c|a} = 1 \quad \text{٣ - خاصية الدورية أو الدائرية :}$$

$$p_{a|b} p_{b|c} = p_{a|c} \quad \text{٤ - خاصية الدورية أو الدائرية المعلقة :}$$

وهذه تحصل عليها مباشرة من الخاصيتين ٢ ، ٣ .

مناسيب الكمية أو الحجم :

بدلا من مقارنة أسعار السلعة ، قد نهم بمقارنة كميات أو أحجام السلعة ، مثل كمية أو حجم الانتاج ، الاستهلاك ، التصدير ، وغيرها . في مثل هذه الحالات نتكلم عن مناسيب الكمية أو مناسيب الحجم للتسهيل ، كما في حالة الأسعار ، نفترض أن الكميات ثابتة في أي فترة . إذا لم يكن هذا صحيح ، فإنه يمكن استخدام متوسط ملائم لجعل هذا الفرض ممكنا

إذا كانت q_0 تعبر عن كمية أو حجم السلعة المنتجة ، المستهلكة ، المصدرة وغير ذلك خلال فترة الأساس ، بينما q_n تعبر عن كمية الانتاج ، الاستهلاك وغير ذلك المقابلة ، خلال فترة المقارنة ، فإننا نعرف :

$$(٢) \quad \frac{q_n}{q_0} = \text{منسوب الكمية أو الحجم}$$

ويعبر عنها بصفة عامة في شكل نسب مئوية .

كما في حالة مناسيب السعر ، فإننا نستخدم الرمز $q_{a|b} = q_b/q_a$ لتمييز عن منسوب السعر في الفترة b بالنسبة للفترة a نفس الملاحظات التي تتعلق بمناسيب السعر تنطبق على مناسيب الكمية .

مناسيب القيمة :

إذا كان p هو سعر السلعة خلال فترة ما و q هي الكمية أو الحجم المنتج ، المباع ، وغير ذلك ، خلال الفترة ، إذن pq تسمى القيمة الاجمالية . بهذا فإذا بيعت 1000 وحدة بسعر 30 بنسا جديدا لكل وحدة فإن القيمة الاجمالية هي $£300 = (1000) (30) (£0.30)$.

إذا كانت p_0 تعبر عن السعر و q_0 عن الكمية لسلعة خلال فترة الأساس بينما p_n تعبر عن السعر المقابل و q_n الكمية المقابلة خلال الفترة المعطاة ، كذلك فإن القيمة الاجمالية خلال هذه الفترات هي v_0 لفترة الأساس و v_n لفترة المعطاة ، فإننا نعرف :

$$(٣) \quad \frac{v_n}{v_0} = \frac{p_n q_n}{p_0 q_0} = \left(\frac{p_n}{p_0}\right) \left(\frac{q_n}{q_0}\right) \quad \text{منسوب القيمة}$$

نفس التعليقات ، الرموز والخصائص التي تتعلق بمناسيب السعر والكمية يمكن أن تنطبق على مناسيب القيمة .

وعلى وجه الخصوص إذا كانت $p_{a|b}$ تعبر عن منسوب السعر و $q_{a|b}$ عن منسوب الكمية و $v_{a|b}$ عن منسوب القيمة للفترة b بالمقارنة بالفترة a ، هذا ، كما في المعادلة (٣)

$$v_{a|b} = p_{a|b} q_{a|b}$$

والتي يسمى خاصية الانعكاس في المعامل .

سلسلة المناسيب ووصلة المناسيب :

إذا كانت p_1, p_2, p_3, \dots تمثل الأسعار خلال الفترات المتتالية 1, 2, 3, ... إذن $p_1/2, p_2/3, p_3/4, \dots$ نقل مناسيب الأسعار لكل فترة زمنية بالمقارنة بالفترة الزمنية السابقة لها وتسمى بمناسيب الوصلات .

مثال ١ : إذا كانت أسعار سلعة خلال السنوات 1953 ، 1954 ، 1955 ، 1956 هي 8 ، 12 ، 15 ، 18 سنت على الترتيب ، فإن الوصلات النسبية هي

$$p_{1953|1954} = 12/8 = 150(\%) , p_{1954|1955} = 15/12 = 125(\%) , p_{1955|1956} = 18/15 = 120(\%)$$

يمكن التعبير دائما عن مناسيب الأسعار لفترة معينة بالمقارنة بفترة الأساس بدلالة وصلة المناسيب . هذا فعل سبيل

$$p_{312} = p_{314} p_{413} p_{312} \quad \text{للمثال}$$

مثال ٢ : من المثال ١ ، منسوب السمر لسنة 1956 بالمقارنة بسنة الأساس 1953 هو

$$P_{1953/1956} = P_{1953/1954} \cdot P_{1954/1955} \cdot P_{1955/1956} = \frac{12}{8} \cdot \frac{15}{12} \cdot \frac{18}{15} = \frac{18}{8} = 225(\%)$$

مناسيب السمر بالنسبة لفترة أساس ثانية ، والتي كما سبق أن أوضحنا يمكن أن نحصل عليها باستخدام وصلة المناسيب ، نسمى أحيانا بسلسلة المناسيب بالنسبة لهذا الأساس ، أو المناسيب مسلسلة إلى أساس ثابت .

مثال ٢ : في الأمثلة ١ ، ٢ مجموعة سلسلة المناسيب للسنوات 1956 ، 1955 ، 1954 بالمقارنة بسنة الأساس 1953 تعطى كما يلي . :

$$P_{1953/1954} = \frac{12}{8} = 150(\%)$$

$$P_{1953/1955} = P_{1953/1954} \cdot P_{1954/1955} = \frac{12}{8} \cdot \frac{15}{12} = 187.5(\%)$$

$$P_{1953/1956} = P_{1953/1954} \cdot P_{1954/1955} \cdot P_{1955/1956} = \frac{12}{8} \cdot \frac{15}{12} \cdot \frac{18}{15} = 225(\%)$$

الأنكار السابقة قابلة للتطبيق أيضا في حالة مناسيب الكيات ومناسيب القيمة .

المشاكل المتعلقة بحساب الأرقام القياسية :

في نواحي التطبيق الفعلي لانهم بدرجة كبيرة بالمقارنة بين أسعار ، كيات أو قيم سلع بمفردها بقدر اهتمامنا بالمقارنة بين مجموعات كبيرة من هذه السلع . على سبيل المثال ، عند حساب الرقم القياسي لتنفقات المعيشة لانهم فقط بأسعار البين في فترة واحدة بالمقارنة بفترة أخرى ولكن نرغب أيضا في مقارنة أسعار البيض ، اللحم ، الخبز الإيجار والملابس وغيرها . بحيث يمكن أن نحصل على صورة عامة . وبالطبع يمكن وضع قائمة بمناسيب أسعار كل السلع . ولكن هذا لا يعد مرضيا . فانرغب فيه هو رقم قياسي واحد والذي يمكن أن يقارن الأسعار في الفترتين في المتوسط .

وليس من الصعب التنبؤ بأن حسابات الأرقام القياسية المتضمنة مجاميع من السلع تتضمن كثيرا من المشاكل التي يجب حلها . فثلا عند حساب ، الرقم القياسي لتكاليف المعيشة ، على سبيل المثال ، فيجب أن نقرر ما هي السلع التي يجب أن تدخل ضمن الرقم وكذلك كيفية ترجيحها بما تتناسب مع أهميتها النسبية . فيجب أن نجتمع بيانات تتعلق بأسعار و كيات هذه السلع . كذلك فإننا نواجه مشكلة التعرف في حالة وجود درجات مختلفة لنفس النوع من السلع ، أو ماذا نفعل في حالة ما إذا كانت بعض أنواع من المواد أو الآلات متاحة في أحد السنوات ولكنها لم تكن موجودة في سنة الأساس . وفي النهاية يجب أن نقرر كيف نضع هذه المعلومات معا بحيث ننتهي بالحصول على رقم قياسي واحد لتكلفة المعيشة له دلالة عملية .

استخدام المتوسطات :

بما أننا يجب أن نصل إلى رقم قياسي واحد يلخص كمية كبيرة من المعلومات ، فإنه من السهل التحقق من أن المتوسطات ، مثل تلك التي درست في الفصل الثالث ، تلعب دورا مهما في حساب الأرقام القياسية .

وكما أن هناك طرقا عديدة موجودة لحساب المتوسطات ، فإن هناك طرقا كثيرة لحساب الأرقام القياسية ، لكل منها مزاياه وعيوبه .

فيما يلي سوف نقوم باختيار عدد قليل من الطرق الشائعة الاستخدام في النواحي العملية مستخدمين أنماطا عديدة من طرق المتوسطات . وعلى الرغم من أننا سنقتصر على الأرقام القياسية للأسعار أولا ، فإننا سوف نوضح كيف يمكن بسهولة تعديلها لتطبيق في حالة الكية أو القيمة .

١٧ - ٦٥ وضع أن رقم فيشر المثال لا يحقق اختبار الدائرية

رقم مارشال - انجورث :

١٧ - ٦٦ من بيانات الجدول ١٧ - ٢٤ بالمسألة ١٧ - ٥٥ أوجد رقم مارشال - أدجورث القياسي لسعر لسنوات (أ) 1956 (ب) 1957 باستخدام سنة 1949 كسنة أساس .

ج : (أ) 149.8 (ب) 130.5

١٧ - ٦٧ وضع أن رقم مارشال - أدجورث يحقق اختبار الانعكاس في الزمن ولكنه لا يحقق اختبار الانعكاس في المعامل .

طريقة الوسط المرجح لمناسيب :

١٧ - ٦٨ من بيانات الجدول ١٧ - ٢٤ بالمسألة ١٧ - ٥٥ أوجد الوسط المرجح للمناسيب لسنة 1956 و 1957 باستخدام 1949 كسنة أساس مستخدماً (أ) قيم سنة المقارنة (ب) قيم سنة الأساس ، كأوزان

ج : (أ) 141.4 ، 163.8 (ب) 125.5 ، 148.7

الأرقام القياسية للكمية أو الحجم :

١٧ - ٦٩ استخدم البيانات بالجدول ١٧ - ٢٤ بالمسألة ١٧ - ٥٥ لحساب الأرقام القياسية للأحجام لسنوات 1956 و 1957 حيث سنة الأساس هي 1949 مستخدماً (أ) الوسط الحسابي البسيط لمناسيب الحجم

(ب) الوسط الهندسي البسيط لمناسيب الحجم

(ج) رقماً قياسياً تجميعياً مرجحاً للحجم حيث تستخدم أسعار سنة الأساس كأوزان (رقم لاسبيرز للكميات)

(د) رقم قياسي تجميعي مرجح للحجم حيث تستخدم أسعار سنة المقارنة كأوزان (رقم باش للكميات)

(هـ) رقم فيشر المثال للكميات .

(و) رقم مارشال - أدجورث القياسي للكمية .

الرقم القياسي للقيمة :

١٧ - ٧٠ (أ) باستخدام 1949 كسنة أساس في بيانات المسألة ١٧ - ٥٥ أحسب الرقم القياسي للقيمة لسنوات 1956، 1957 (ب) حقق أن الرقم القياسي للقيمة في (أ) هو مثل ناتج حاصل ضرب رقم فيشر المثال للسعر في رقم فيشر المثال للكمية .

ج : (أ) 183.6 ، 224.4

١٧ - ٧١ باستخدام 1949 كسنة أساس في بيانات المسألة ١٧ - ٥٥ ، احسب الرقم القياسي للسعر \times الرقم القياسي للكمية لسنوات 1956 و 1957 باستخدام (أ) رقم لاسبيرز (ب) رقم باش .

مناسيب الأسعار ،
باستخدام 1944

19 (ب) 1957

19 (ب) 1957

في المعامل .

1956 (ب) 1957

قارن بالرقم القياسي الفعل للقيمة .

(أ) 171.7 ، 221.6 (ب) 196.3 ، 226

القيم الحقيقية هي 183.6 ، 224.2 على الترتيب (المسألة ١٧ - ٧٠) .

١٧ - ٧٢ أثبت أن الرقم القياسي التجيبي البسيط للقيمة يحقق اختبار الانعكاس في الزمن واختبار الدائرية .

تغيير فترة الأساس للأرقام القياسية :

١٧ - ٧٣ الجدول ١٧ - ٢٥ يوضح رقمين قياسيين لتكلفة التشييد للسنوات 1947 - 1958 . الأول ، مبني على متوسط 30

مدينة ومجمع بواسطة الشركة الأمريكية للتقييم ، ويوضح الرقم القياسي لتكلفة التشييد حيث $100 = 1913$ والثاني

مجمع بواسطة مصلحة التجارة ، ويوضح رقم قياسي حيث $100 = 1949 - 1947$.

(أ) باستخدام البيانات حيث $100 = 1913$ ، أوجد رقماً قياسياً $100 = 1949 - 1947$ وذلك باستخدام

الطريقة المبسطة في تغيير الأساس المستخدمة في مناسيب السعر .

(ب) قارن النتائج في (أ) بالرقم المجمع بواسطة مصلحة التجارة معدداً الأسباب المختلفة لأي تناقض مشاهد .

جدول ١٧ - ٢٥

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
الرقم القياسي للتشييد للشركة الأمريكية للتقييم ($100 = 1913$)	430	490	490	500	532	553 ^٢	577	591	608	635	663	682
الرقم القياسي للتشييد لمصلحة التجارة ($100 = 1949 - 1947$)	93	104	103	107	116	119	122	122	125	132	137	139

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

الانكماش في السلاسل الزمنية :

١٧ - ٧٤ الرقم القياسي لأسعار الجملة بالولايات المتحدة للسنوات 1947 - 1958 حيث $100 = 1949 - 1947$ معطى

بالبندول ١٧ - ٢٦ . حدد قوة الدولار الشرائية في سوق الجملة في كل من السنوات المعطاة بدلالة دولارات 1954

ج : 0.93 ، 0.94 ، 0.97 ، 1.00 ، 1.00 ، 0.99 ، 0.96 ، 1.07 ، 1.11 ، 1.06 ، 1.14

جدول ١٧ - ٢٦

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
الرقم القياسي لأسعار الجملة (1947-1949=100)	96.4	104.4	99.2	103.1	114.8	111.6	110.1	110.3	110.7	114.3	117.6	119.2

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

١٧ - ٧٥ توضح سلسلة زمنية معينة القيمة الإجمالية السنوية بالدولار لمجموعة من السلع . (أ) وضع كيف يمكن تعديل السلسلة الزمنية لحذف أثر التغير في قيمة الدولار من سنة لأخرى . (ب) برر نظرياً الطريقة المستخدمة في (أ) . (ج) وضع إجابتك مثال .

١٧ - ٧٦ (أ) خالص السلسلة الزمنية الموضحة بالعمود الأخير من الجدول ١٦ - ٤٥ بالفصل السادس عشر من أثر الانكماش و (ب) فسر دلالة البيانات المخلصة من أثر الانكماش .

١٧ - ٧٧ أثبت أن طريقة تخلص السلاسل الزمنية من أثر الانكماش ، المستخدمة على سبيل المثال في المسألة ١٧ - ٣٩ ، قابلة للتطبيق تماماً فقط في حالة ما إذا كانت الأرقام القياسية تحقق اختبار الانعكاس في المعامل .

مسائل متنوعة :

١٧ - ٧٨ أثبت أنه إذا كان رقماً لاسيرز وباش القياسان متساويان فإنهما متساويين مع رقم مارشال - أدمورث ورقم فيشر المثال

١٧ - ٧٩ كون جدولاً للأعطاف المختلفة للأرقام القياسية ، موضحاً في كل حالة ما إذا كانت تحقق أو لا تحقق اختبارات الانعكاس في المعامل واختبار الدائرية .

مبنى على متوسط 30
1913 = 1 والثاني

19 وذلك باستخدام

مشهد .

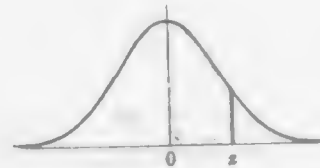
السنة
القياسي للتشيد للشرطة
مركبة للتقسيم
(1913 = 100)
قم القياسي للتشيد
لمصلحة التجارة
(1947 - 1949 =)

ية

194 - 1947 مبنى
لة دولارات 1954

ملحق II

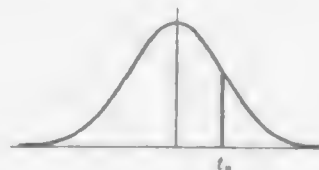
المساحات
تحت المنحنى الطبيعي المعياري
من 0 إلى z



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0754
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2258	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2518	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2996	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

z	0
0.0	0.3989
0.1	0.3970
0.2	0.3910
0.3	0.3814
0.4	0.3683
0.5	0.3521
0.6	0.3332
0.7	0.3123
0.8	0.2897
0.9	0.2661
1.0	0.2420
1.1	0.2179
1.2	0.1942
1.3	0.1714
1.4	0.1497
1.5	0.1295
1.6	0.1109
1.7	0.0940
1.8	0.0790
1.9	0.0656
2.0	0.0540
2.1	0.0440
2.2	0.0355
2.3	0.0283
2.4	0.0224
2.5	0.0175
2.6	0.0136
2.7	0.0104
2.8	0.0079
2.9	0.0060
3.0	0.0044
3.1	0.0033
3.2	0.0024
3.3	0.0017
3.4	0.0012
3.5	0.0009
3.6	0.0006
3.7	0.0004
3.8	0.0003
3.9	0.0002

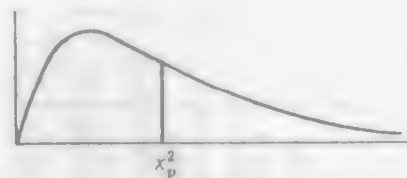
قيم الثنائيات (p)
لتوزيع استودينت t -
لدرجات حرية v
(المساحة المظلة = p)



V	$I_{0.995}$	$I_{0.99}$	$I_{0.975}$	$I_{0.95}$	$I_{0.90}$	$I_{0.80}$	$I_{0.75}$	$I_{0.70}$	$I_{0.60}$	$I_{0.55}$
1	63.66	31.82	12.71	6.31	3.08	1.376	1.000	0.727	0.325	0.158
2	9.92	6.96	4.30	2.92	1.89	1.061	0.816	0.617	0.289	0.142
3	5.84	4.54	3.18	2.35	1.64	0.978	0.765	0.584	0.277	0.137
4	4.60	3.75	2.78	2.13	1.53	0.941	0.741	0.569	0.271	0.134
5	4.03	3.36	2.57	2.02	1.48	0.920	0.727	0.559	0.267	0.132
6	3.71	3.14	2.45	1.94	1.44	0.906	0.718	0.553	0.265	0.131
7	3.50	3.00	2.36	1.90	1.42	0.896	0.711	0.549	0.263	0.130
8	3.36	2.90	2.31	1.86	1.40	0.889	0.706	0.546	0.262	0.130
9	3.25	2.82	2.26	1.83	1.38	0.883	0.703	0.543	0.261	0.129
10	3.17	2.76	2.23	1.81	1.37	0.879	0.700	0.542	0.260	0.129
11	3.11	2.72	2.20	1.80	1.36	0.876	0.697	0.540	0.260	0.129
12	3.06	2.68	2.18	1.78	1.36	0.873	0.695	0.539	0.259	0.128
13	3.01	2.65	2.16	1.77	1.35	0.870	0.694	0.538	0.259	0.128
14	2.98	2.62	2.14	1.76	1.34	0.868	0.692	0.537	0.258	0.128
15	2.95	2.60	2.13	1.75	1.34	0.866	0.691	0.536	0.258	0.128
16	2.92	2.58	2.12	1.75	1.34	0.865	0.690	0.535	0.258	0.128
17	2.90	2.57	2.11	1.74	1.33	0.863	0.689	0.534	0.257	0.128
18	2.88	2.55	2.10	1.73	1.33	0.862	0.688	0.534	0.257	0.127
19	2.86	2.54	2.09	1.73	1.33	0.861	0.688	0.533	0.257	0.127
20	2.84	2.53	2.09	1.72	1.32	0.860	0.687	0.533	0.257	0.127
21	2.83	2.52	2.08	1.72	1.32	0.859	0.686	0.532	0.257	0.127
22	2.82	2.51	2.07	1.72	1.32	0.858	0.686	0.532	0.256	0.127
23	2.81	2.50	2.07	1.71	1.32	0.858	0.685	0.532	0.256	0.127
24	2.80	2.49	2.06	1.71	1.32	0.857	0.685	0.531	0.256	0.127
25	2.79	2.48	2.06	1.71	1.32	0.856	0.684	0.531	0.256	0.127
26	2.78	2.48	2.06	1.71	1.32	0.856	0.684	0.531	0.256	0.127
27	2.77	2.47	2.05	1.70	1.31	0.855	0.684	0.531	0.256	0.127
28	2.76	2.47	2.05	1.70	1.31	0.855	0.683	0.530	0.256	0.127
29	2.76	2.46	2.04	1.70	1.31	0.854	0.683	0.530	0.256	0.127
30	2.75	2.46	2.04	1.70	1.31	0.854	0.683	0.530	0.256	0.127
40	2.70	2.42	2.02	1.68	1.30	0.851	0.681	0.529	0.255	0.126
60	2.66	2.39	2.00	1.67	1.30	0.848	0.679	0.527	0.254	0.126
120	2.62	2.36	1.98	1.66	1.29	0.845	0.677	0.526	0.254	0.126
∞	2.58	2.33	1.96	1.645	1.28	0.842	0.674	0.524	0.253	0.126

ملحق IV

قيم المئينات (χ_p^2)
لتوزيع كاي - تربيع
لدرجة حرية ν
(المساحة المظلة = p)



ν	$\chi_{0.995}^2$	$\chi_{0.90}^2$	$\chi_{0.875}^2$	$\chi_{0.85}^2$	$\chi_{0.80}^2$	$\chi_{0.75}^2$	$\chi_{0.50}^2$	$\chi_{0.25}^2$	$\chi_{0.10}^2$	$\chi_{0.05}^2$	$\chi_{0.025}^2$	$\chi_{0.01}^2$	$\chi_{0.005}^2$
1	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.455	0.102	0.0158	0.0039	0.0010	0.0002	0.0000
2	10.6	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	0.575	0.211	0.103	0.0506	0.0201	0.0100
3	12.8	11.3	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	0.584	0.352	0.216	0.115	0.072
4	14.9	13.3	11.1	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.711	0.484	0.297	0.207
5	16.7	15.1	12.8	11.1	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.831	0.554	0.412
6	18.5	16.8	14.4	12.6	10.6	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.872	0.676
7	20.3	18.5	16.0	14.1	12.0	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.989
8	22.0	20.1	17.5	15.5	13.4	10.2	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34
9	23.6	21.7	19.0	16.9	14.7	11.4	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73
10	25.2	23.2	20.5	18.3	16.0	12.5	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16
11	26.8	24.7	21.9	19.7	17.3	13.7	10.3	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60
12	28.3	26.2	23.3	21.0	18.5	14.8	11.3	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07
13	29.8	27.7	24.7	22.4	19.8	16.0	12.3	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57
14	31.3	29.1	26.1	23.7	21.1	17.1	13.3	10.2	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07
15	32.8	30.6	27.5	25.0	22.3	18.2	14.3	11.0	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60
16	34.3	32.0	28.8	26.3	23.5	19.4	15.3	11.9	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14
17	35.7	33.4	30.2	27.6	24.8	20.5	16.3	12.8	10.1	8.67	7.56	6.41	5.70
18	37.2	34.8	31.5	28.9	26.0	21.6	17.3	13.7	10.9	9.39	8.23	7.01	6.26
19	38.6	36.2	32.9	30.1	27.2	22.7	18.3	14.6	11.7	10.1	8.91	7.63	6.84
20	40.0	37.6	34.2	31.4	28.4	23.8	19.3	15.5	12.4	10.9	9.59	8.26	7.43
21	41.4	38.9	35.5	32.7	29.6	24.9	20.3	16.3	13.2	11.6	10.3	8.90	8.03
22	42.8	40.3	36.8	33.9	30.8	26.0	21.3	17.2	14.0	12.3	11.0	9.54	8.64
23	44.2	41.6	38.1	35.2	32.0	27.1	22.3	18.1	14.8	13.1	11.7	10.2	9.26
24	45.6	43.0	39.4	36.4	33.2	28.2	23.3	19.0	15.7	13.8	12.4	10.9	9.89
25	46.9	44.3	40.6	37.7	34.4	29.3	24.3	19.9	16.5	14.6	13.1	11.5	10.5
26	48.3	45.6	41.9	38.9	35.6	30.4	25.3	20.8	17.3	15.4	13.8	12.2	11.2
27	49.6	47.0	43.2	40.1	36.7	31.5	26.3	21.7	18.1	16.2	14.6	12.9	11.8
28	51.0	48.3	44.5	41.3	37.9	32.6	27.3	22.7	18.9	16.9	15.3	13.6	12.5
29	52.3	49.6	45.7	42.6	39.1	33.7	28.3	23.6	19.8	17.7	16.0	14.3	13.1
30	53.7	50.9	47.0	43.8	40.3	34.8	29.3	24.5	20.6	18.5	16.8	15.0	13.8
40	66.8	63.7	59.3	55.8	51.8	45.6	39.3	33.7	29.1	26.5	24.4	22.2	20.7
50	79.5	76.2	71.4	67.5	63.2	56.3	49.3	42.9	37.7	34.8	32.4	29.7	28.0
60	92.0	88.4	83.3	79.1	74.4	67.0	59.3	52.3	46.5	43.2	40.5	37.5	35.5
70	104.2	100.4	95.0	90.5	85.5	77.6	69.3	61.7	55.3	51.7	48.8	45.4	43.3
80	116.3	112.3	106.6	101.9	96.6	88.1	79.3	71.1	64.3	60.4	57.2	53.5	51.2
90	128.3	124.1	118.1	113.1	107.6	98.6	89.3	80.6	73.3	69.1	65.6	61.8	59.2
100	140.2	135.8	129.6	124.3	118.5	109.1	99.3	90.1	82.4	77.9	74.2	70.1	67.3

ν	$t_{0.005}$
1	63.66
2	9.92
3	5.84
4	4.60
5	4.03
6	3.71
7	3.50
8	3.36
9	3.25
10	3.17
11	3.11
12	3.06
13	3.01
14	2.98
15	2.95
16	2.92
17	2.90
18	2.88
19	2.86
20	2.84
21	2.83
22	2.82
23	2.81
24	2.80
25	2.79
26	2.78
27	2.77
28	2.76
29	2.76
30	2.75
40	2.70
60	2.66
120	2.62
∞	2.58

ملحق V

اللوغاريتمات المعتادة لاربعة ارقام عشرية

N											الفروق									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37	
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34	
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31	
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29	
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27	
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25	
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24	
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22	
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21	
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20	
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19	
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18	
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17	
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17	
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16	
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15	
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15	
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14	
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14	
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13	
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13	
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12	
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12	
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12	
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11	
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11	
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11	
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10	
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10	
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10	
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10	
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8	
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8	
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8	
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8	
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8	
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8	
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7	
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7	
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

اللوغاريتمات المعتادة لأربعة أرقام عشرية

N											الفروق								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	4	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N	0
10	0000
11	0414
12	0792
13	1135
14	1462
15	1762
16	2044
17	2308
18	2555
19	2788
20	3000
21	3222
22	3422
23	3611
24	3800
25	3977
26	4155
27	4311
28	4477
29	4622
30	4777
31	4911
32	5055
33	5188
34	5311
35	5444
36	5566
37	5666
38	5777
39	5888
40	6000
41	6111
42	6222
43	6333
44	6444
45	6555
46	6666
47	6777
48	6888
49	6999
50	7000
51	7111
52	7222
53	7333
54	7444
N	0

ملحق VI

قيم $e^{-\lambda}$

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	1.0000	0.9900	0.9802	0.9704	0.9608	0.9512	0.9418	0.9324	0.9231	0.9139
0.1	0.9048	0.8958	0.8869	0.8781	0.8694	0.8607	0.8521	0.8437	0.8353	0.8270
0.2	0.8187	0.8106	0.8025	0.7945	0.7866	0.7788	0.7711	0.7634	0.7558	0.7483
0.3	0.7408	0.7334	0.7261	0.7189	0.7118	0.7047	0.6977	0.6907	0.6839	0.6771
0.4	0.6703	0.6636	0.6570	0.6505	0.6440	0.6376	0.6313	0.6250	0.6188	0.6126
0.5	0.6065	0.6005	0.5945	0.5886	0.5827	0.5770	0.5712	0.5655	0.5599	0.5543
0.6	0.5488	0.5434	0.5379	0.5326	0.5273	0.5220	0.5169	0.5117	0.5066	0.5016
0.7	0.4966	0.4916	0.4868	0.4819	0.4771	0.4724	0.4677	0.4630	0.4584	0.4538
0.8	0.4493	0.4449	0.4404	0.4360	0.4317	0.4274	0.4232	0.4190	0.4148	0.4107
0.9	0.4066	0.4025	0.3985	0.3946	0.3906	0.3867	0.3829	0.3791	0.3753	0.3716

 $(\lambda = 1, 2, 3, \dots, 10)$

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$e^{-\lambda}$	0.36788	0.13534	0.04979	0.01832	0.006738	0.002479	0.000912	0.000335	0.000123	0.000045

ملحوظة : الحصول على قيم $e^{-\lambda}$ لقيم λ الأخرى ، استخدم قوانين الأسس .

مثال : $e^{-3.48} = (e^{-3.00})(e^{-0.48}) = (0.04979)(0.6188) = 0.03081$

ملحق VII

الأرقام العشوائية

51772	74640	42331	29044	46621	62898	93582	04186	19640	87056
24033	23491	88587	06568	21960	21387	76105	10863	97453	90581
45939	60173	52078	25424	11645	55870	56974	37428	93507	94271
30586	02133	75797	45406	31041	86707	12973	17169	88116	42187
03585	79353	81938	82322	96799	85659	36081	50884	14070	74950
64937	03355	95863	20790	65304	55189	00745	65253	11822	15804
15630	64759	51135	98527	62586	41889	25439	88036	24034	67283
09448	56301	57683	30277	94623	85418	68829	06652	41982	49159
21631	91157	77331	60710	52290	16835	48653	71590	16159	14676
91097	17480	29414	06829	87843	28195	27279	47152	35683	47280
50532	25496	95652	42457	73547	76552	50020	24819	52984	76168
07136	40876	79971	54195	25708	51817	36732	72484	94923	75936
27989	64728	10744	08396	56242	90985	28868	99431	50995	20507
85184	78949	36601	46253	00477	25234	09908	36574	72139	70185
54398	21154	97810	36764	32869	11785	55261	59009	38714	38723
65544	34371	09591	07839	58892	92843	72828	91341	84821	63886
08263	65952	85762	64236	39238	18776	84303	99247	46149	03229
39817	67906	48236	16057	81812	15815	63700	85915	19219	45943
62257	04077	79443	95203	02479	30763	92486	54083	23631	05825
53298	90276	62545	21944	16530	03878	07516	95715	02526	33537

λ	0
0.0	1.0000
0.1	0.9048
0.2	0.8187
0.3	0.7408
0.4	0.6703
0.5	0.6065
0.6	0.5488
0.7	0.4966
0.8	0.4493
0.9	0.4066

λ	1
$e^{-\lambda}$	0.36788

ملحق VIII

خطوات الحصول على المعادلات الاعتدالية
لخط المربعات الصغرى

اعتبر أن المعادلة المطلوبة لخط المربعات الصغرى هي $Y = a_0 + a_1 X$ فإن قيم Y على هذا الخط المقابلة لقيم $X = X_1, X_2, \dots, X_N$ هي $a_0 + a_1 X_1, a_0 + a_1 X_2, \dots, a_0 + a_1 X_N$ بينما القيم الفعلية هي Y_1, Y_2, \dots, Y_N على الترتيب. هذا فإن خط المربعات الصغرى يحقق (أنظر صفحة ٢٥٢)

$$S = (a_0 + a_1 X_1 - Y_1)^2 + (a_0 + a_1 X_2 - Y_2)^2 + \dots + (a_0 + a_1 X_N - Y_N)^2$$

من قواعد التفاضل ، نهاية صغرى عندما تكون التفاضلات الجزئية لـ S بالنسبة لـ a_0, a_1 تساوى صفراً ، إذن :

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2 \{ (a_0 + a_1 X_1 - Y_1) + (a_0 + a_1 X_2 - Y_2) + \dots + (a_0 + a_1 X_N - Y_N) \} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \{ (a_0 + a_1 X_1 - Y_1) X_1 + (a_0 + a_1 X_2 - Y_2) X_2 + \dots + (a_0 + a_1 X_N - Y_N) X_N \} = 0$$

وهذه المعادلة تعطى المعادلات الاعتدالية المطلوبة :

$$N a_0 + a_1 \sum X - \sum Y = 0$$

$$a_0 \sum X + a_1 \sum X^2 - \sum XY = 0$$

Glossary قائمة المصطلحات

Chapter 1

Population
Universe
Sample
Finite
Infinite
Inductive statistics
Statistical inference
Probability
Descriptive statistics
Deductive statistics
Variable
Domain
Constant
Continuous variable
Discrete variable
Discrete data
Continuous data
Measurements
Enumerations
Counting
Even integer
Cumulative rounding errors
Exponent
Base
Significant digits (figures)
Independent variable
Dependent variable
Single - valued function
Multiple - valued function
Quadrants
Origin

الفصل الأول

المجتمع الإحصائي
المجموعة الكلية
عينة
محدود
غير محدود (لا نهائي)
الإحصاء الاستقرائي
الاستدلال الإحصائي
إحتمال
الإحصاء الوصفي
الإحصاء الاستنتاجي
متغير
مجال
ثابت
متغير متصل
متغير متقطع
بيانات متقطعة
بيانات متصلة
القياسات
العدد
الترقيم (العدد)
رقم زوجي
أخطاء التقريب المتراكم
أس
أساس
أرقام معنوية
متغير مستقل
متغير تابع
دالة وحيدة القيمة
دالة متعددة القيم
الأرباع
نقطة الأصل

الخط المقابل لقيم
 Y_1, Y_2, \dots

S نهاية صفري،
ي صفرا، إذن :

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2 \{a_0\}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \{a_0\}$$

المتدرج
المضلع
التوزيع
توزيع
المتدرج
المضلع
التوزيع
التوزيع
التوزيع
المتدرج
الفترة
تكرار
عشوائي
التوزيع

أ

رمز
المتوسط
مقاييس
الوسط
الوسط
المتوسط
الوسط
الوسط
التكرار
معاملات
الوسط
الوسط
طريقة
محصول
ذو متوا
وحيد
الوسط

Graph

Bar graphs

Pie graphs

Picto graphs

Identity

Simultaneous equations

Mantissa

Characteristic

Interpolation

Linear function

Parabola

Quadratic function

Line graph

Time series

Component part bar chart

Percentage component part graph

Complex numbers

Natural base of logarithms

Chapter 2

Range

Classes

Categories

Class frequency

Frequency distribution

Frequency table

Grouped data

Class interval

Class limits

Lower class limit

Upper class limit

Class boundaries

Lower class boundray

Upper class boundray

الخطوط البيانية

الرسوم الدائرية

الرسوم التصويرية

متطابقة

معادلات آتية

الجزء العشري

العدد البياني

الاستكمال

دالة خطية

قطع مكافئ

دالة من الدرجة الثانية

خط بياني

سلسلة زمنية

خريطة الأعمدة البيانية المخرأة

الشكل البياني للنسب المئوية المخرأة

الأعداد التخيلية (المركبة)

الأساس الطبيعي للوغاريتمات

الفصل الثاني

المسدى

فئات

طوائف

تكرار الفئة

توزيع تكرارى

جدول تكرارى

البيانات المجمعة

فترة الفئة

حدود الفئة

الحد الأدنى للفئة

الحد الأعلى لفئة

الحدود الحقيقية للفئة

الحد الأدنى الحقيقى للفئة

الحد الأعلى الحقيقى للفئة

Bernoulli distribution
Normal distribution
Normal curve
Gaussian distribution
Standard form
Poisson distribution
Multinomial distribution
Multinomial expansion
Goodness of fit
Chi - Square test
Normal curve graph paper
Probability graph paper

توزيع برنولي
التوزيع الطبيعي (أو الممثل)
المنحنى الطبيعي
توزيع جاوس
الصيغة القياسية
توزيع بواسون
توزيع كثرات الحدود
مفكوك كثرات الحدود
جودة التوفيق
إختبار كاي^٢ أو χ^2
ورق رسم بياني للمنحنى الطبيعي
ورق رسم بياني لإحتمالي

Chapter 8

الفصل الثامن

Estimation
Population parameters
Sample statistics
Test of significance
Test of hypotheses
Theory of decisions
Design of the experiment
Random sampling
Sampling with replacement
Sampling without replacement
Sampling distribution
Sampling distribution of means
Central limit theorem
Asymptotically normal
Sampling distribution of proportions
Sampling distribution of differences of the
statistics
Independent
Sampling distribution of the sum of statistics
Standard error
Large sampling methods
Theory of small samples
Experimental sampling distribution

تقدير
معالم المجتمع
إحصائيات العينة
إختبارات المعنوية
إختبارات الفروض
نظرية القرارات
تصميم التجارب
عينة عشوائية
معاينة مع الإرجاع
معاينة بدون إرجاع
توزيع المعاينة
توزيع المعاينة للأوساط
نظرية الحد المركزية
يؤول إلى التوزيع الطبيعي
توزيع المعاينة للنسب
توزيع المعاينة للفروق بين الإحصائيات
إستقلال
توزيع المعاينة لمجموع الإحصائيات
خطأ معياري
أساليب العينات الكبيرة
نظرية العينات الصغيرة
توزيع المعاينة التجريبي

Chapter 9

Unbiased estimator
 Biased estimator
 Efficient estimator
 Inefficient estimator
 Most efficient (best estimator)
 Point estimate
 Interval estimate
 Reliability
 Confidence intervals
 Confidence limit
 Fiducial limit
 Confidence level
 Confidence coefficients
 Critical values
 Probable error

Chapter 10

Statistical decisions
 Statistical hypotheses
 Null hypotheses
 Alternative hypothesis
 Significant
 Rules of decisions
 Type I error
 Type II error
 Level of significance
 Critical region
 Region of rejection of the hypothesis
 Region of significance
 Region of acceptance of the hypothesis
 Region of non-significance
 Test statistic
 Two - tailed test
 Two - sided test
 One - tailed test
 One - sided test

الفصل التاسع

تقدير غير متحيز
 تقدير متحيز
 تقدير كفؤ
 تقدير غير كفؤ
 الأكثر كفاءة
 تقدير بنقطة
 تقدير بفترة
 المأمونية
 فترات الثقة
 حدود الثقة
 حدود الاطمئنان
 مستوى الثقة
 معاملات الثقة
 القيم الحرجة
 الخطأ المحتمل

الفصل العاشر

القرارات الاحصائية
 الفروض الاحصائية
 فروض العدم
 الفرض البديل
 معنوية
 قواعد اتخاذ القرارات
 خطأ من النوع الأول
 خطأ من النوع الثاني
 مستوى المعنوية
 المنطقة الحرجة
 منطقة رفض الفرض
 منطقة المعنوية
 منطقة قبول الفرض
 منطقة عدم المعنوية
 إحصائية الاختبار
 إختبار من طرفين
 إختبار من جانبيين
 إختبار من طرف واحد
 إختبار من جانب واحد

Bernoulli dis
 Normal dist
 Normal cur
 Gaussian di
 Standard fo
 Poisson dist
 Multinomjal
 Multinomia
 Goodness o
 Chi - Squa
 Normal cur
 Probability

Chapte

Estimation
 Population
 Sample sta
 Test of sig
 Test of hy
 Theory of
 Design of
 Random s
 Sampling
 Sampling
 Sampling
 Central lir
 Asymptoti
 Sampling
 Sampling
 statisti
 Independe
 Sampling
 Standard
 Large san
 Theory o
 Experime

Operating characteristic curves
Power of test
Quality control
Control charts
Probably significant
Experimental significance level (descriptive)
Power function

منحنيات توصيف العمليات
قوة الاختبار
الرقابة على الجودة
خرائط المراقبة
محتمل المعنوية
مستوى المعنوية التجريبي (الوصفي)
دالة القوة

Chapter 11

Small sampling theory
Exact sampling theory
"Students" t distribution
Chi - square distribution
Number of degrees of freedom
t score (t statistic)
Z score (z statistic)

الفصل الحادي عشر

نظرية العينات الصغيرة
النظرية المفضوطة للعينات
توزيع « ستودينت » ت
توزيع كا - تربيع
عدد درجات الحرية
إحصائية « ت »
إحصائية z

Chapter 12

Observed frequencies
Expected or theoretical frequencies
Dichotomy or dichotomous classification
One - way classification table
Two - way classification table (h x k table)
Contingency tables
Cell frequencies
Marginal frequency
Yates correction
Coefficient of contingency
Correlation of attributes
Tetrachoric correlation
Additive property

الفصل الثاني عشر

التكرارات المشاهدة
التكرارات المتوقعة أو النظرية
تقسيم ثنائي
جدول تقسيم في اتجاه واحد
جدول تقسيم في اتجاهين (h x k)
جداول الاقتران
تكرارات الخلايا
التكرار الهامشي
تصحيح ياتس
معامل الاقتران
ارتباط الصفات
ارتباط رباعي
خاصية الانجماع

Chapter 13

Scatter diagram
Approximating curve
Linear relationship
Non - linear relationship
Curve fitting
Polynomials

الفصل الثالث عشر

شكل الانتشار
المنحنى التقريبي
علاقة خطية
علاقة غير خطية
توليف المنحنى
كثيرات الحدود

Semi - log paper
Log - log paper
Freehand method of curve fitting
Slope
Y intercept
Residual
Best fitting curve
Least square curve
Least square parabola
Normal equations
Center of gravity
Regression curve of Y on X
Regression curve of X on Y
Trend line
Trend curve
Approximating plane
Regression surfaces
Linear interpolation
Linear extrapolation
Multiple regression
Base period
Reference period

Chapter 14

Correlation
Perfect correlation
Uncorrelated
Simple correlation
Simple regression
Multiple correlation
Positive (direct) correlation
Negative (inverse) correlation
Measures of correlation
Perfect linear correlation
Standard error of estimate of Y on X
Total variation
Unexplained variation
Explained variation

ورق نصف لوغاريتمي
ورق لوغاريتمي - لوغاريتمي
توفيق المنحنى باليد
الميل
الجزء المقطوع من محور الصادات
الباق
المنحنى الأحسن توفيقاً
منحنى المربعات الصغرى
قطع المربعات الصغرى
المعادلات الاعتدالية
مركز الثقل
منحنى انحدار Y على X
منحنى انحدار X على Y
خط الاتجاه العام
منحنى الاتجاه العام
المستويات التقريبية
سطوح الانحدار
استكمال خطي
استكمال خارجي
الانحدار المتعدد
فترة الأساس
فترة الإسناد

الفصل الرابع عشر

ارتباط
ارتباط تام
غير مرتبط
ارتباط بسيط
انحدار بسيط
ارتباط متعدد
ارتباط موجب (طردى)
ارتباط سالب (عكسى)
مقاييس الارتباط
ارتباط خطي تام
الخطأ المعياري لتقدير Y على X
الاختلافات الكلية
الاختلاف الغير مفسر
الاختلاف المفسر

Operating
Power of
Quality co
Control ch
Probably
Experimen
Power fun

Chap

Small sam
Exact sam
"Students"
Chi - squ
Number
t score (t
Z score (

Chap

Observed
Expected
Dichotom
One - wa
Two - wa
Contingen
Cell frequ
Marginal
Yates co
Coefficient
Correlati
Tetrachor
Additive

Chap

Scatter d
Approxir
Linear re
Non - li
Curve fit
Polynom

Coefficient of determination	معامل التحديد
Coefficient of correlation	معامل الارتباط
Modified standard error of estimate	الخطأ المعياري المعدل للتقدير
Degrees of freedom	درجات الحرية
Non - Linear correlation	ارتباط غير خطي
Nonsense (spurious) correlation	ارتباط لا معنى له (زائف)
Product - moment formula	صيغة عزم حاصل الضرب
Covariance	تغاير
Bivariate table	جدول مزدوج - ذو متغيرين
Bivariate frequency distribution	توزيع تكراري ذو متغيرين
Correlation table	جدول الارتباط
Coefficient of rank correlation	معامل ارتباط الرتب
Auto correlation	الارتباط الذاتي
Attributes	الصفات
Bivariate population	مجمع ثنائي
Bivariate normal distribution	توزيع طبيعي ثنائي
Fisher's Z transformation	تحويله Z لفisher
Marginal totals	المجموع الهامشية

Chapter 15

الفصل الخامس عشر

Regression equation	معادلة الانحدار
Partial regression coefficients	معاملات الانحدار الجزئية
Linear regression equation	معادلة الانحدار الخطي
Regression plane	مستوى الانحدار
Least square regression planes	مستويات انحدار المربعات الصغرى
Zero order correlation coefficients	معاملات الارتباط من الرتبة صفر
Coefficient of multiple correlation	معامل الارتباط المتعدد
Coefficient of multiple determination	معامل التحديد المتعدد
Coefficient of linear multiple correlation	معامل الارتباط المتعدد الخطي
Hyper plane in four dimensional space	مستوى زائدي في مجال ذو أبعاد أربعة
Least square regression equation	معادلة انحدار المربعات الصغرى
Coefficient of partial correlation	معامل الارتباط الجزئي

Chapter 16

الفصل السادس عشر

Characteristic movements (variations)	التحركات المميزة
Forecasting	التنبؤ
Secular variation (trend)	الاتجاه العام
Cyclical variations	التغيرات الدورية
Seasonal variations	التغيرات الموسمية

Decomposition
Moving average of order N
Moving total of order N
N year moving average
N month moving average
Smoothing of time series
Weighted moving average of order N
Seasonal index
Centred 12 month moving average
Link relatives
Cyclical indexes
Long range forecasting
Short range forecasting
Chain relatives

Chapter 17

Cost of living index
Consumer price index
Price relative
Quantity relatives
Volume relatives
Factor reversal property (test)
Time reversal test
Weighted average of relatives
Laspeyres volume index
Paasche volume index
Value indexes
Simple aggregate index
Circular test
Real incomes
Purchasing powers
Apparent or physical incomes
Cost of living
Consumer index numbers
Deflating (a time series)
Deseasonalize data
Seasonal index numbers

تفكيك
وسط متحرك من الدرجة N
مجموع متحركة من الدرجة N
N سنة وسط متحرك
N شهر وسط متحرك
تسهيل السلاسل الزمنية
وسط متحرك مرجح من الدرجة N
الدليل الموسمي
١٢ شهر متوسط متحرك مركزي
الوصلات النسبية
الأدلة الدورية
التنبؤ طويل المدى
التنبؤ قصير المدى
سلسلة المناسيب

الفصل السابع عشر

الرقم القياسي لتكاليف المعيشة
الرقم القياسي للمستهلك
منسوب السعر
مناسيب الكمية
مناسيب الحجم
خاصية اختبار الانعكاس في المعامل
اختبار الانعكاس في الزمن
الوسط المرجح للمناسيب
رقم لاسبيرز القياسي للحجوم
رقم باشي القياسي للحجوم
الأرقام القياسية للقيمة
رقم قياسي تجميعي بسيط
إختبار الدائرية
الدخول الحقيقية
القوى الشرائية
الدخل الظاهري أو المادي
تكلفة المعيشة
الأرقام القياسية للمستهلك
أنقاص (سلسلة زمنية)
بيانات مخلصة من أثر الموسم
الأرقام القياسية الموسمية

Coefficient
Coefficient
Modified
Degrees of
Non - Li
Nonsense
Product
Covarian
Bivariate
Bivariate
Correlation
Coefficient
Auto correlation
Attribute
Bivariate
Bivariate
Fisher's
Marginal

Chapter

Regression
Partial regression
Linear regression
Regression
Least squares
Zero order
Coefficient
Coefficient
Coefficient
Hyperplane
Least squares
Coefficient

Chapter

Characteristics
Forecast
Secular
Cyclical
Seasonal

مكتبة
الجامعة
الاسلامية
بغداد
١٩٥٢

المصطلحات

Changing the base period
Shifting the base
Cost per employee index number
Law of supply and demand
Overestimate
Under estimate

تغيير فترة الأساس
إزاحة الأساس
الرقم القياسي للتكلفة للمسا
قانون العرض والطلب
المبالاة في التقدير
التقليل في التقدير